УДК 62—50

М. М. Копец

Задача построения линейного квадратичного регулятора в гильбертовом пространстве в случае запаздывания в управлении

Пусть поведение системы описывается уравнением

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_0 u(t) + B_1 u(t-h), \tag{1}$$

где A — инфинитезимальный производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $S(t)$, определенной над действительным гильбертовым пространством H, операторы B_0 и B_1 — линейные ограниченные операторы, действующие из действительного гильбертового пространства H_1 в H; параметр t обозначает время и $t \in (0, T)$, где величина T наперед фиксирована. Постоянная $h > 0$ характеризует время запаздывания. Значения абстрактных функций $x(t)$ и $u(t)$ принадлежат соответственно пространствам H и H_1, под производной функцией $x(t)$ понимаем ее сильную производную. Начальные условия для уравнения (1) задаются следующим образом:

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

$$u(t) = \varphi(t), \quad t \in [-h, 0]. \tag{3}$$

Относительно функции $u(t)$, называемой в дальнейшем управлением, предполагаем, что $u(t) \in L_2((0, T), H_1)$ [1, с. 172]. Под решением $x(t)$ уравнения (1) при начальных условиях (2), (3) понимаем функцию

$$x(t) = S(t)x_0 + \int_0^t S(t-\tau)B_0u(\tau)\,d\tau + \int_0^t S(t-\tau)B_1u(\tau-h)\,d\tau. \tag{4}$$

Как и в [1, с. 255], можно показать, что таким образом определенное решение $x(t)$ уравнения (1) для заданных $x_0 \in H$, $u(t) \in L_2((0, T), H_1)$, $\varphi(t) \in L_2((-h, 0), H_1)$ существует и единственно. На функциях $x(t)$ вида (4) рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I(u) = [Cx(T), x(T)] + \int_0^T [u(t), u(t)]\,dt, \tag{5}$$

где C — линейный ограниченный самосопряженный неотрицательно определенный оператор в пространстве H.

Найдем необходимые условия оптимальности для рассматриваемой задачи оптимального управления. Эти условия можно получить путем исследования приращения функционала (5) [2, с. 152]. Из условия равенства нулю первой вариации функционала (5) имеем

$$u_0(t) = \begin{cases} -B_0^*S^*(T-t)Cx_0(T) - B_1^*S^*(T-h-t)Cx_0(T), & t \in [0, T-h), \\ -B_0^*S^*(T-t)Cx_0(T), & t \in [T-h, T). \end{cases} \tag{6}$$

Введем в рассмотрение функцию $z_0(t) = S^*(T-t)Cx_0(T)$. Легко проверить, что она является единственным решением уравнения $\dot{z}_0(t) = -A^*z_0(t)$, $t \in (0, T)$ с граничным условием $z_0(T) = Cx_0(T)$ [1, с. 304]. Тогда соотношения (6) можно представить следующим образом:

$$u_0(t) = \begin{cases} -B_0^*z_0(t) - B_1^*z_0(t+h), & t \in [0, T-h), \\ -B_0^*z_0(t), & t \in [T-h, T). \end{cases} \tag{7}$$

На основании изложенного выше легко получаем для рассматриваемой задачи оптимального управления необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума:

при $t \in [0, T-h)$

$$\frac{1}{2}[u_0(t), u_0(t)] + B_0^*z_0(t) + B_1^*z_0(t+h), u_0(t)] =$$

$$= \min_u \left\{\frac{1}{2}[u, u] + [B_0^*z_0(t) + B_1^*z_0(t+h), u]\right\}, \tag{8}$$

при $t \in [T-h, T]$

$$\frac{1}{2}[u_0(t), u_0(t)] + [B_0^*z_0(t), u_0(t)] = \min\left\{\frac{1}{2}[u, u] + [B_0^*z_0(t), u]\right\}. \tag{9}$$

Рассмотрим возможность построения оптимального управления $u_0(t)$ по принципу обратной связи. С этой целью определим операторнозначную функцию $L(t)$ следующим образом:

$$L(t) = \int_t^{T-h} [S(T-\tau)B_0 + S(T-h-\tau)B_1][S(T-\tau)B_0 + S(T-h-$$

$$-\tau)B_1]^* d\tau + \int_{T-h}^{T} S(T-\tau)B_0B_0^*S^*(T-\tau)\,d\tau, \quad t \in [0, T-h),$$

$$L(t) = \int_t^T S(T-\tau)B_0B_0^*S^*(T-\tau)\,d\tau, \quad t \in [T-h, T].$$

Отметим, что функция $L(t)$ непрерывна по t в точке $t = T-h$. Как и в [1, с. 306], можно показать, что существует число $T_0 > 0$ такое, что при всех $t \in [0, T]$, где $T \leqslant T_0$, оператор $I + CL(t)$ имеет ограниченный обратный. Теперь определим операторнозначные функции $K(t)$, $M(t, s)$, $N(t, s, \tau)$ следующим образом:

$$K(t) = S^*(T-t)[I + CL(t)]^{-1}CS(T-t), \quad M(t,s) = S^*(T-t)[I +$$

$$+ CL(t)]^{-1}CS(T-h-t-s)B_1, \quad N(t,s,\tau) = B_1^*S^*(T-h-t-s) \times$$

$$\times [I + CL(t)]^{-1}CS(T-h-t-\tau)B_1. \tag{10}$$

При $t + s > T-h$ полагаем $M(t,s) = 0$, при $t+s > T-h$ и $t+\tau > T-h$ — $N(t, s, \tau) = 0$. Поскольку справедливо равенство $[I + CL(t)]^{-1}C = C[I + + L(t)C]^{-1}$, то нетрудно показать, что $K(t) = K^*(t)$ и $N(t, s, \tau) = N^*(t, \tau, s)$. Очевидным образом проверяются следующие граничные условия:

$$K(T) = C, \quad M(t, -h) = K(t)B_1, \quad N(t, -h, s) = B_1^*M(t, s). \tag{11}$$

Непосредственной проверкой доказывается, что функции $K(t)$, $M(t, s)$, $N(t, s, \tau)$ удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

при $t \in (0, T-h)$

$$\dot{K}(t) = -A^*K(t) - K(t)A + [K(t)B_0 + M(t,0)][B_0^*K(t) + M^*(t,0)],$$

$$\partial M(t,s)/\partial t = \partial M(t,s)/\partial s - A^*M(t,s) + [K(t)B_0 + M(t,0)][B_0^*M(t,s) +$$

$$+ N(t,0,s)], \quad -h \leqslant s \leqslant 0, \tag{12}$$

$$\partial N(t,s,\tau)/\partial t = \partial N(t,s,\tau)/\partial s + \partial N(t,s,\tau)/\partial \tau + [N(t,s,0) +$$

$$+ M^*(t,s)B_0][B_0^*M(t,\tau) + N(t,0,\tau)], \quad -h \leqslant s \leqslant 0, \quad -h \leqslant \tau \leqslant 0,$$

при $t \in [T-h, T)$

$$\dot{K}(t) = -A^*K(t) - K(t)A + K(t)B_0B_0^*K(t),$$

$$\partial M(t,s)/\partial t = \partial M(t,s)/\partial s - A^*M(t,s) + K(t)B_0B_0^*M(t,s), \quad -h \leqslant s \leqslant 0, \tag{13}$$

$$\partial N(t,s,\tau)/\partial t = \partial N(t,s,\tau)/\partial s + \partial N(t,s,\tau)/\partial \tau + M^*(t,s)B_0B_0^*M(t,\tau),$$

$$-h \leqslant s \leqslant 0, \quad -h \leqslant \tau \leqslant 0.$$

Оптимальное управление $u_0(t)$, построенное по принципу обратной связи, будет иметь вид:

при $t \in (0, T-h)$

$$u_0(t) = -[B_0^*K(t) + M^*(t,0)]x_0(t) - \int_{-h}^{0} [B_0^*M(t,s) + N(t,0,s)]u_0(t+s)\,ds, \tag{14}$$

при $t \in [T-h, T)$

$$u_0(t) = -B_0^*K(t)\,x_0(t) - \int_{-h}^{0} B_0^*M(t,s)\,u_0(t+s)\,ds. \qquad (15)$$

Рассмотрим выражение

$$E(t) = d/dt\left\{[K(t)\,x(t), x(t)] + \int_{-h}^{0}[M(t,s)\,x(t), u(t+s)]\,ds + \right.$$

$$\left. + \int_{-h}^{0}[x(t), M(t,s)\,u(t+s)]\,ds + \int_{-h}^{0}\int_{-h}^{0}[N(t,s,\tau)\,u(t+s), u(t+\tau)]\,d\tau ds\right\} +$$

$$+ [u(t), u(t)].$$

Выполняя дифференцирование по t, учитывая соотношение $\partial u(t+s)/\partial t = \partial u(t+s)/\partial s$, дифференциальные уравнения и граничные условия для функций $K(t)$, $M(t,s)$ и $N(t,s,\tau)$, соотношения (14), (15) для оптимального управления $u_0(t)$, после интегрирования функции $E(t)$ в пределах от 0 до T получаем

$$\min_{u(t)}\left\{[Cx(T), x(T)] + \int_0^T [u(t), u(t)]\,dt\right\} = [K(0)\,x_0(0), x_0(0)]. \qquad (16)$$

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Оптимальное управление* $u_0(t)$ *в задаче* (1) — (3), (5) *существует и единственно* [3, с. 13].

Если $x_0(t)$ — *оптимальная траектория, соответствующая управлению* $u_0(t)$, $z_0(t)$ — *решение уравнения* $\dot z_0(t) = -A^*z_0(t)$ *с граничным условием* $z_0(t) = Cx_0(T)$, *то при* $t \in (0, T-h)$ *выполняется соотношение* (8), *при* $t \in [T-h, T)$ — *соотношение* (9). *Функции* $K(t)$, $M(t,s)$ *и* $N(t,s,\tau)$, *с помощью которых строится оптимальное управление* $u_0(t)$ *по принципу обратной связи (соотношение* (14) *для* $t \in [0, T-h)$ *и соотношение* (15) *для* $t \in [T-h, T]$), *удовлетворяют системам дифференциальных уравнений* (12) *(для* $t \in [0, T-h)$) *и уравнений* (13) *(для* $t \in [T-h, T]$), *а также граничным условиям* $K(T) = C$, $M(t,-h) = K(t)B_1$, $N(t,-h,s) = B_1^*M(t,s)$. *Минимум функционала* (5) *определяется с помощью соотношения* (16).

В качестве примера рассмотрим управляемую систему, поведение которой описывается уравнением

$$\partial x(t,s)/\partial t = \partial^2 x(t,s)/\partial s^2 + u(t,s) + u(t-h,s), \quad -\infty < s < +\infty, \quad t > 0,$$

функция $x(0,s)$ задана, $x(t,\cdot) \in L_2(-\infty, \infty)$ $\forall t \geqslant 0$. В данном случае оператор $A = \partial^2/\partial s^2$ и его область определения $D(A)$ состоит из всех функций $x(\cdot)$ из $L_2(-\infty, \infty)$, для которых $x'(\cdot)$ и $x''(\cdot)$ также принадлежат $L_2(-\infty, \infty)$. Как показано в [1, с. 239], для каждой такой функции $x(-\infty) = x(\infty) = 0$ и $x'(-\infty) = x'(\infty) = 0$. Очевидно, $D(A)$ плотна в $L_2(-\infty, \infty)$ и оператор A самосопряжен. Функционал (5) при условии, что $C = I$ — тождественный оператор, запишется в виде $I(u) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(T,s)\,ds + \int_0^T\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t,s)\,dsdt$. Тогда сопряженная система будет следующей; $\partial z_0(t,s)/\partial t = -\partial^2 z_0(t,s)/\partial s^2$, $z_0(T,s) = x_0(T,s)$, и оптимальное управление $u_0(t,s)$, например, на отрезке $[T-h, T]$ равно $u_0(t,s) = -z_0(t,s)$. Для исключения функции $z_0(t,s)$ рассмотрим соотношение $z_0(t,s) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t, r-s)\,x_0(t,r)\,dr$. Тогда первое из уравнений (13) примет вид

$$\partial K(t, r-s)/\partial t = -\partial^2 K(t, r-s)/\partial r^2 - \partial^2 K(t, r-s)/\partial s^2 +$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} K(t, r-\tau)\,K(t, \tau-s)\,d\tau$$

с граничным условием $K(T, r-s) = \delta(s-r)$. Остальные уравнения (12), (13) можно представить аналогично. Для их численного решения можно использовать разностные методы.

1. *Балакришнан А. В.* Прикладной функциональный анализ.— М.: Наука, 1980.— 384 с.
2. *Янушевский Р. Т.* Управление объектами с запаздыванием.— М.: Наука, 1978.— 416 с.
3. *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.— М.: Мир, 1972.— 414 с.

Киев. политехн. ин-т

Получено 15.08.84,
после доработки — 21.05.85