УДК 517.5

З. Цесельский

О базисе B-сплайнов в пространстве алгебраических полиномов

1. Введение. Зададим целое $k \geqslant 1$ — порядок сплайнов и произвольную последовательность узлов $\mathrm{t} = (t_i)$, удовлетворяющих условиям $t_i \leqslant t_{i+1}$, $t_1 < t_{i+k}$, $A = \lim\limits_{i\to-\infty} t_i$, $B = \lim\limits_{i\to\infty} t_i$. Пределы A и B могут быть конечными или бесконечными. Каждой последовательности t соответствуют B-сплайны $N_{i,k}^{\mathrm{t}}(s) = (t_{i+k} - t_i)[t_i, \ldots, t_{i+k}; (t-s)_+^{k-1}]$, где $[t_i, \ldots, t_{i+k}, f(t)]$ обозначает общую разделенную разность функции f, взятую по узлам $t_i, \ldots, t_{i+k}$. О свойствах B-сплайнов см. в [5,6]. Напомним лишь, что $\operatorname{supp} N_{i,k}^{\mathrm{t}} = \langle t_i, t_{i+k}\rangle$ и

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+k}} N_{i,k}^{\mathrm{t}} = \frac{t_{i+k} - t_i}{k}. \tag{1}$$

Для формулировки основного неравенства введем функции

$$N_{i,k,p}^{\mathrm{t}} = \left(\frac{k}{t_{i+k} - t_i}\right)^{1/p} N_{i,k}^{\mathrm{t}}. \tag{2}$$

Положим теперь $f(\mathrm{a}, \mathrm{t}) = \sum\limits_i a_i N_{i,k,p}^{t}$,

$$\varkappa_{k,p}^{\mathrm{t}} = \sup_{\mathrm{a}\in l_p} \frac{\|\mathrm{a}\|_p}{\|f(a, t)\|_p}, \quad \varkappa_{k,p} = \sup_{\mathrm{t}} \varkappa_{k,p}^{\mathrm{t}}, \quad \lambda_{k,p}^{\mathrm{t}} = \sup_{\mathrm{a}\in l_p} \frac{\|f(a, t)\|_p}{\|\mathrm{a}\|_p},$$

$$\lambda_{k,p} = \sup_{\mathrm{t}} \lambda_{k,p}^{\mathrm{t}},$$

где $\|f\|_p = \left(\int\limits_A^B |f|^p\right)^{1/p}$, $\|a\|_p = \left(\sum\limits_{i=-\infty}^{\infty} |a_i|^p\right)^{1/p}$. Легко видеть, что

$$\lambda_{k,p}^{\mathrm{t}} = 1 \ \forall t, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{3}$$

а де Бор доказал неравенство [2]

$$\varkappa_{k,p} \leqslant (2k-1)\, g^{k-1}, \quad k \geqslant 1, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{4}$$

Существует предположение де Бора, что $\varkappa_{k,p} \leqslant c2^k$.

Рассмотрим последовательности $\mathbf{t}^*$ экстремальных узлов, т. е. узлов максимальной кратности, и положим $\varkappa_{k,p}^* = \varkappa_{k,p}^{\mathbf{t}^*}$. Нашим основным результатом является неравенство

$$\varkappa_{k,p}^* \leqslant 2^{k+1} \text{ для } k \geqslant 1, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{5}$$

Оно представляет самостоятельный интерес как неравенство для алгебраических полиномов. Более того, есть некоторый численный довод к тому, что $\varkappa_{k,p} = \varkappa_{k,p}^*$, и поэтому (5) может оказаться существенным шагом в доказательстве предположения де Бора.

2. Базис B-сплайнов и двойственный ему в пространстве алгебраических полиномов порядка k. В экстремальном случае достаточно рассмотреть узлы $t_0 = \ldots = t_{k-1} = a < b = t_k = \ldots = t_{2k-1}$, и тогда соответствующие B-сплайны имеют общий носитель и являются полиномами

$$N_{i,k}(t) = \binom{k-1}{i}\left(\frac{t-a}{b-a}\right)^{k-1-i}\left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{i}, \quad i = 0, \ldots, k-1. \tag{6}$$

В таком случае

$$\int_a^b N_{i,k} = \frac{b-a}{k}, \quad i = 0, \ldots, k-1. \tag{7}$$

Обозначая через $\mathcal{P}_k$ действительное линейное пространство алгебраических полиномов порядка k (степени не выше $k-1$), находим

$$\mathcal{P}_k = \operatorname{span}(N_{i,k},\ i = 0, \ldots, k-1). \tag{8}$$

Предложение 1. *Для $i = 0, \ldots, k-1$, $k \geqslant 1$, имеем*

$$N_{i,k} = \frac{k-i}{k} N_{i,k+1} + \frac{i+1}{k} N_{i+1,k+1}.$$

Доказательство. Пусть $w = \frac{k-1}{k} N_{i,k+1} + \frac{i+1}{k} N_{i+1,k+1}$. Теперь $\frac{k-1}{k}\binom{k}{i}(-1)^i + \frac{i+1}{k}\binom{k}{i+1}(-1)^{i+1} = 0$, и, следовательно, $w \in \mathcal{P}_k$. С другой стороны, все нули w и $N_{i,k}$ совпадают, откуда для некоторой постоянной c имеем $N_{i,k} = cw$. Вместе с тем из (7) вытекает $c = 1$, и доказательство закончено.

Далее для удобства без потери общности будем предполагать, что $\langle a, b\rangle = \langle -1, 1\rangle$.

В $L^2\langle -1, 1\rangle$ используем скалярное произведение

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} fg \tag{9}$$

и в $L^p\langle -1, 1\rangle$ — норму

$$\| f \|_p = \left(\int_{-1}^{1} | f |^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty. \tag{10}$$

Пространство $\mathbb{R}^k$ с нормой $\| \mathbf{a} \|_p = \left(\sum_{i=0}^{k-1} | a_i |^p\right)^{1/p}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^k$ обозначено через l_k^p.

Так как имеет место (8) и $\dim \mathcal{P}_k = k$, то, следовательно, существует единственный биортогональный относительно (9) базис в $\mathcal{P}_k$, т. е. $N_{i,k}^* \in \mathcal{P}_k$ такие, что

$$(N_{i,k}^*, N_{j,k}) = \delta_{i,j}, \quad i, j = 0, \ldots, k-1. \tag{11}$$

Исследуем полиномы $N^*_{i,k}$. В этих рассмотрениях особую роль играют полиномы Лежандра P_0, $P_1, \ldots$. Они нормированы так, что $P_n(1) = 1$. Напомним, что

$$\| P_n \|_2 = (n + 1/2)^{-1/2}, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{12}$$

Для P_n имеется классическое представление (см. [1])

$$P_n = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i \binom{n}{i} N_{i,n+1}. \tag{13}$$

Ортонормированные полиномы Лежандра обозначим

$$\hat{P}_n = (n + 1/2)^{1/2} P_n. \tag{14}$$

Лемма 1. *Для $k \geqslant 1$ положим $N^*_{-1,k} = N^*_{k,k} = 0$. Тогда для $i = 0, \ldots$ $\ldots, k$ имеем*

$$N^*_{i,k+1} = \frac{k-i}{k} N^*_{i,k} + \frac{i}{k} N^*_{i-1,k} + (k + 1/2)^{1/2} (-1)^i \binom{k}{i} \hat{P}_k.$$

Доказательство. Так как $N_{i,k}$, $i = 0, \ldots, k-1$, является базисом в $\mathcal{P}_k$, то имеем

$$w = \sum_{i=0}^{k-1} (w, N^*_{i,k}) N_{i,k} \text{ для } w \in \mathcal{P}_k. \tag{15}$$

Применяя предложение 1, получаем

$$w = \sum_{i=0}^{k} \left(w, \frac{k-1}{k} N^*_{i,k} + \frac{i}{k} N^*_{i-1,k} \right) N_{i,k+1},$$

что вместе с равенством (15), в котором k заменено на $k+1$, дает

$$(w, N^*_{i,k+1}) = \left(w, \frac{k-i}{k} N_{i,k} + \frac{i}{k} N^*_{i+1,k} \right),$$

т. е.

$$v = N^*_{i,k+1} - \frac{k-i}{k} N^*_{i,k} - \frac{i}{k} N^*_{i-1,k} \in \mathcal{P}_{k+1}$$

и ортогонален пространству $\mathcal{P}_k$. Таким образом, $v = c\hat{P}_k$ с некоторой постоянной c и $(v, \hat{P}_k) = (N^*_{i,k+1}, \hat{P}_k) = c$. Вместе с тем из (12), (13) следует

$$(N^*_{i,k+1}, \hat{P}_k) = (-1)^i \binom{k}{i} (k + 1/2)^{1/2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $k \geqslant 1$. Тогда*

$$\| N^*_{i,k} \|_2 \leqslant (3\pi)^{-1/2} 2^{k+1} \text{ *для* } i = 0, \ldots, k-1.$$

Доказательство. Положим $c_k = \sup\limits_{0 \leqslant i \leqslant k-1} \| N^*_{i,k} \|_2$. Так как $N^*_{0,1} = 2^{-1/2}$, то $c_1 = 1$. Теперь из леммы 2 вытекает

$$c^2_{k+1} \leqslant c^2_k + \lambda^2_k, \quad \lambda_k = (k + 1/2)^{1/2} \binom{k}{\left[\frac{1}{2} k\right]}.$$

Таким образом, $c_{k+1}^2 \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^2$. Так как (см. [4]) $\lambda_i < (\pi)^{-1/2} 2^{i+1}$ для $i = 1, 2, \ldots$, то получаем $c_{k+1}^2 \leqslant 1 + \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{k} 4^{i+1} < \frac{4^{k+2}}{3\pi}$, или $c_{k+1} < \frac{2^{k+2}}{(3\pi)^{1/2}}$.

Следствие 1. *Для $i = 0, \ldots, k-1$ имеем* $\| N_{i,k}^* \|_1 \leqslant 2^k$.

Лемма 3. *Пусть $k \geqslant 1$ и $\mathrm{a} \in \mathbb{R}^k$. Тогда* $\left\| \sum_{i=0}^{k-1} a_i N_{i,k}^* \right\|_\infty \leqslant k \cdot 2^k \| \mathrm{a} \|_\infty$.

Доказательство. Пусть $D_k = \sup \left\{ \frac{1}{k} \left\| \sum_{i=0}^{k-1} a_i N_{i,k}^* \right\|_\infty : \| \mathrm{a} \|_\infty \leqslant 1 \right\}$. Ясно, что $D_1 = \sqrt{1/2}$. Из леммы следует, что для $\| \mathrm{a} \|_\infty \leqslant 1$

$$\frac{1}{k+1} \left| \sum_{i=0}^{k} a_i N_{i,k+1}^* \right| \leqslant \frac{1}{k} \left| \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{k-1}{k+1} a_i + \frac{i+1}{k+1} a_{i+1} \right) N_{i,k}^* \right| +$$

$$+ \frac{(k+1/2)^{1/2}}{k+1} | \widehat{P}_k | \left| \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} a_i \right|$$

и $D_{k+1} \leqslant D_k + \frac{k+1/2}{k+1} 2^k \| P_k \|_\infty$. Вместе с тем из $\| P_k \|_\infty = | P_k(1) | = 1$ вытекает неравенство $D_{k+1} \leqslant \sqrt{1/2} + \sum_{i=1}^{k} 2^i < 2^{k+1}$, и это завершает доказательство леммы.

Постоянная $\varkappa_{k,p}^*$ связана с нормой оператора $L_{k,q} : [\mathcal{P}_k, \| \cdot \|_q] \to l_k^q$, определенного по формуле $L_{k,q}(\mathrm{a}) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i N_{i,k,q}^*$, где $q = p/(p-1)$ и $N_{i,k,q}^* = \left(\frac{2}{k} \right)^{1/p} N_{i,k}^*$. Ясно, что

$$(N_{i,k,q}^*, N_{j,k,p}) = \delta_{i,j}. \tag{16}$$

Аналогично норма оператора $(L_{k,q})^{-1}$ связана с $\lambda_{k,p}^* = \lambda_{k,p}^{t*}$, а именно справедливо предложение.

Предложение 2. *Для $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $k \geqslant 1$ и $q = p/(p-1)$ имеем*

$$\varkappa_{k,p}^* \leqslant \| L_{k,q} \|, \tag{17}$$

$$1 = \lambda_{k,p}^* \geqslant \| (L_{k,q})^{-1} \|. \tag{18}$$

Доказательство. Пусть

$$w = \sum_{i=0}^{k-1} a_i N_{i,k,p}, \quad b_i = \begin{cases} \operatorname{sgn} a_i \, | a_i |^{p-1}, & 1 \leqslant p < \infty, \\ \delta_{ij} \operatorname{sgn} a_j, \quad | a_j | = | \mathrm{a} |, & p = \infty. \end{cases}$$

Тогда с помощью стандартных двойственных рассуждений получаем

$$\| \mathrm{a} \|_t^t = \sum_{i=0}^{k-1} a_i b_i = (w, L_{k,q}(b)) \leqslant \| w \|_p \, \| L_{k,q}(\mathrm{b}) \|_q \leqslant \| w \|_p \, \| L_{k,q} \| \, \| \mathrm{b} \|_q,$$

откуда $\| a \|_p \leqslant \| L_{k,q} \| \| \omega \|_p$, что влечет (17). Доказательство (18) аналогично.

Теорема 1. *Для* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $k \geqslant 1$ *имеем* $\varkappa^*_{k,p} \leqslant 2^{k+1}$.

Доказательство. Обозначая $L_k(a) = \sum_{i=0}^{k-1} a_i N^*_{i,k}$, заметим, что

$$\| L_{k,q} \| = (2/k)^{1/p} \| L_k \|_q, \tag{19}$$

где $\| L_k \|_q = \sup_{a \in l^q_k} \frac{\| L_k(a) \|_q}{\| a \|_q}$. Последняя норма будет оценена с помощью теоремы выпуклости Рисса.

Из следствия 1 вытекает $\| L_k \|_1 \leqslant 2^k$, а из леммы — $\| L_k \|_\infty \leqslant k \cdot 2^k$. Теперь с помощью интерполяционной теоремы Рисса имеем $\| L_k \|_q \leqslant k^{1/p} \cdot 2^k$. Объединяя эту оценку с (19), получаем

$$\| L_{k,q} \| \leqslant 2^{1/p} \cdot 2^k, \tag{20}$$

откуда с учетом (17) следует требуемый результат.

Следствие 2. *Пусть* $k \geqslant 1$ *и* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Тогда*

$$\| a \|_p \frac{1}{2^{k+1}} \leqslant \left\| \sum_{i=0}^{k-1} a_i N_{i,k,p} \right\|_p \leqslant \| a \|_p$$

и

$$\| a \|_p \leqslant \left\| \sum_{i=0}^{k-1} a_i N^*_{i,k,p} \right\|_p \leqslant 2^{k+1} \| a \|_p.$$

3. Комментарии. Оценка снизу для $\varkappa^*_{k,\infty}$ была найдена Личем [3] с помощью полиномов Чебышева первого рода. Оказывается, его оценка снизу на самом деле равна $\varkappa^*_{k,\infty}$, т. е. имеем

$$\varkappa^*_{k,\infty} = \frac{\binom{2(k-1)}{2\left[\frac{k-1}{2}\right]}}{\binom{k-1}{\left[\frac{k-1}{2}\right]}}. \tag{21}$$

Интересно, что полином Лежандра P_{k-1} является экстремальным для $\varkappa^*_{k,2}$, и в этом случае получаем

$$\varkappa^*_{k,2} = \binom{2k-1}{k}^{1/2} = \| L_{k,2} \|. \tag{22}$$

Можно было бы ожидать, что полиномы Чебышева второго рода U_{k-1} являются экстремальными для $\varkappa^*_{k,1}$, но это не так.

Теорема 2. *Для* $k \geqslant 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $q = p/(p-1)$ *и для некоторой абсолютной постоянной с выполняются оценки*

$$\frac{2^{k+1}}{k^{1/(2p)}} c \leqslant \varkappa^*_{k,p} \leqslant \| L_{k,q} \| \leqslant \frac{2^{k+1}}{k^{1/(2r)}},$$

где $r = \max(p, q)$.

Доказательства результатов, упомянутых в этом пункте, будут опубликованы позже.

Содержание этой работы было доложено автором на Международной конференции по теории приближения функций (Киев, июнь 1983 г.)

1. *Справочник* по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган.—М.: Наука, 1979.— 830 с.
2. *De Boor C.* On local linear functionals which vanish at all B-splines but one.// Theory of approximation with applications. — New York : Acad. press, 1976.
3. *Lyche T.* A note on condition numbers of the B-spline bases//J. Approxim. Theory. — 1978. —N 22.— P. 202—205.
4. *Kazan D. K.* On walli's formula//Edinburgh Math., Notes.— 1956. — N 40. — P. 1921.
5. *Schumaker L. L.* Spline functions : Basic theory.— New York : Wiley & Sons, 1981.
6. *Де Бор К.* Практическое руководство по сплайнам.— М. : Радио и связь, 1985.— 304 с.

Польша

Получено 16.09.85