УДК 517.5

А. Г. Резников

Спектр лапласиана на многообразиях с замкнутыми геодезическими

Оценки первого ненулевого собственного числа λ_1 оператора Лапласа—Бельтрами на римановых многообразиях и связанные с ними изопериметрические неравенства изучались многими авторами (см. [1]). Все эти оценки содержат кривизну (скалярную, секционную или кривизну Риччи). Гипотеза Берже о связи λ_1 с объемом V без ограничений на кривизну не подтвердилась [2]. Невозможно также оценить λ_1 через диаметр многообразия d [3]. Оказывается, однако, что в случае $C_{2\pi}$-многообразия M, т. е. компактного риманового многообразия, все геодезические которого замкнуты и имеют длину 2π (такие многообразия изучались в [4]), можно получить на λ_1 оценку снизу.

1. Обозначения и формулировка теоремы. Обозначим через (M, g) $C_{2\pi}$-многообразие с метрикой g; пусть n — его размерность. Топологически M устроено как сфера или проективное пространство над классическим телом [4]. $C_{2\pi}$-Метрика g на M называется цоллевой, если M гомеоморфно S^n и существует гладкая деформация g_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, переводящая g в стандартную метрику сферы, причем все g_t — $C_{2\pi}$-метрики. Существует бесконечно параметрическое семейство цоллевых метрик на $M \approx \approx S^n$, и неизвестно, имеются ли нецоллевы $C_{2\pi}$-метрики [4]. Далее, Δ обозначает оператор Лапласа — Бельтрами [1], действующий в $L^2(M, \rho)$, где ρ — мера объема (на гладких функциях f оператор Δ действует по формуле $\Delta f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f$). Оператор $(-\Delta)$ самосопряжен, неотрицателен и имеет дискретный спектр; через λ_1 обозначим первое ненулевое собственное число. Докажем следующее утверждение.

Теорема. *Пусть M — $C_{2\pi}$-многообразие с цоллевой метрикой g. Тогда $\lambda_1 \geqslant n/2$.*

Многообразие CM, состоящее из ориентированных геодезических M, имеет размерность $2n - 2$, снабжено канонической симплектической структурой и, следовательно, формой объема [4]. Пусть f — гладкая функция на M, а Φf — функция на CM, определяемая обобщенным преобразованием Радона, т. е. $2\pi\Phi f(\gamma) = \int_\gamma f$, где $\gamma \in CM$ — некоторая геодезическая. Легко видеть [4], что Φ продолжается до ограниченного оператора из $L^2(M)$ в $L^2(CM)$. Обозначим через $\|\Phi\|$ норму сужения Φ на подпространство, ортогональное константам.

Основная лемма. *Для $C_{2\pi}$-многообразия M имеет место оценка $\lambda_1 \geqslant n(1 - \|\Phi\|^2)$.*

Утверждение теоремы непосредственно вытекает теперь из следующего факта.

Лемма 1. *Для цоллевой метрики на* $M \approx S^n$ $\|\Phi\|^2 \leqslant 1/2$.

2. Факторизация оператора Лапласа. Пусть $\hat{\pi}: U \to M$ — единичное касательное расслоение над M; риманова метрика определяет послойный изоморфизм $TM \approx T^*M$, с помощью которого TM, а значит, и U, снабжается канонической лиувиллевой 1-формой α и формой объема $\mu = \alpha \wedge (d\alpha)^{n-1}$ [4]. Пусть ξ — векторное поле геодезического потока на U, интегральные кривые которого проектируются в геодезические M. Оказывается [4], что поток Φ_t, порожденный ξ, сохраняет формы α и μ и, следовательно, определяет по формуле $\psi \to \psi \circ \Phi_t$ однопараметрическую унитарную группу операторов в $L^2(U, \mu)$, которую обозначим $\tilde{\Phi}_t$. Генератором этой группы будет кососопряженный оператор $\mathcal{L}_\xi$ — производная Ли вдоль поля ξ (это следует непосредственно из определения $\mathcal{L}_\xi$). Рассмотрим далее естественное вложение $i: L^2(M) \to L^2(U)$, определяемое формулой $f \mapsto f \circ \pi$. Формула декомпозиции меры μ, приведенная в [4], показывает, что i — изометрическое вложение, причем сопряженный оператор $i^*: L^2(U) \mapsto L^2(M)$ действует так: $(i^*\varphi)(x) = \int\limits_{S_x} \varphi d\nu_x$, где S_x — сферический слой U над $x \in M$, снабженный нормированной канонической мерой $d\nu_x$.

Лемма 2. *Имеет место формула* $\Delta = ni^*\mathcal{L}_\xi^2 i$.

Доказательство. Пусть $f \in C^\infty M$, $Hf = \Delta \operatorname{grad} f$ — гессиан функции f, являющийся симметрическим (1, 1)-тензором. Как известно [5], $\Delta f = TrHf$. Пусть $u \in U_x M$, тогда значение на u квадратичной формы $(Hf\cdot, \cdot)$ равно $\frac{d^2(f\circ\gamma)}{dt^2_{t=0}}$, где $\gamma(t)$ — геодезическая с $\gamma(0) = x$ и $\gamma'(0) = u$ [5]. Иными словами, $Hf(u, u) = (\mathcal{L}_\xi^2(f\circ\pi))(u) = (\mathcal{L}_\xi^2(if))(u)$. Заметим теперь, что для любого симметрического оператора H в евклидовом пространстве W с единичной сферой S имеет место формула $TrH = n \int\limits_S (Hv, v)\, d\nu$, где $d\nu$ — нормированная каноническая мера на S. Отсюда $\Delta f(x) = TrHf(x) = n \int\limits_{S_x} \mathcal{L}_\xi^2(if)\, d\nu_x = n(i^*\mathcal{L}_\xi^2 if)(x)$, что и требовалось. Ограничение $f \in C^\infty(M)$ снимается стандартными рассуждениями.

Заметим, что формула факторизации леммы 2 справедлива для всех римановых многообразий и, возможно, представляет самостоятельный интерес.

3. Спектральное разложение для группы $\tilde{\Phi}_t$. Так как M — $C_{2\pi}$-многообразие, поток Φ_t, а вместе с ним группа $\tilde{\Phi}_t$ 2π-периодичны. Иными словами, $\exp 2\pi\mathcal{L}_\xi = I$, где I — единичный оператор. Отсюда сразу следует, что самосопряженный оператор $\frac{1}{i}\mathcal{L}_\xi$ имеет целочисленный спектр, и, следовательно, то же верно для $(-\mathcal{L}_\xi^2)$. Пусть R — ядро $\mathcal{L}_\xi$; непосредственно видно, что $\varphi \in R$ означает постоянство φ на траекториях поля ξ. Пусть $\hat{\varepsilon}: U \to CM$ сопоставляет каждому $u \in U$ определяемую им геодезическую, тогда $\hat{\varepsilon}$ — расслоение со слоем окружность [4]. Аналогично вложению i введем вложение $j: L^2(CM) \to L^2(U)$ формулой $jh = h \circ j$; сопряженный оператор будет действовать следующим образом: $j^*f(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\tilde{\gamma}} f$, где $\tilde{\gamma}$ — поднятие γ в U. Ясно, что пространство $jL^2(CM)$ есть просто $R = \operatorname{Ker} \mathcal{L}_\xi$, а оператор jj^* есть ортопроектор на R. Поскольку на дополнении $R^\perp$ оператор $(-\mathcal{L}_\xi^2)$ имеет натуральный спектр, то для любого $\psi \in D(\mathcal{L}_\xi^2)$ $(-\mathcal{L}_\xi^2\psi, \psi) \geqslant (\|\psi\|^2 - \|jj^*\psi\|^2) = \|\psi\|^2 - \|j^*\psi\|^2$.

Доказательство основной леммы. Пусть $f \in C^\infty(M)$. Применим полученное выше неравенство к $if \in C^\infty(U): (-\mathcal{L}_\xi^2 if, if) \geqslant \| if \|^2 - \| j^*if \|^2$, или $-(i^*\mathcal{L}_\xi^2 if, f) \geqslant \| f \|^2 - \| j^*if \|^2$. Левая часть равна $-\frac{1}{n}(\Delta f, f)$ в силу леммы 2. Далее, по определению оператор $\Phi = j^*i$. Тем самым получаем $-(\Delta f, f) \geqslant n(\| f \|^2 - \| \Phi f \|^2)$. Остается заметить, что λ_1 есть $\inf \frac{(-\Delta f, f)}{(f, f)}$, когда f пробегает дополнение к константам.

4. Случай цоллевых метрик. Для того чтобы оценить $\| \Phi \|$, воспользуемся теоремой Вейнстейна [6], утверждающей, в частности, что операторы Φ, построенные для стандартной метрики g_{can} сферы S^n и произвольной цоллевой метрики, унитарно эквивалентны. Тем самым достаточно рассмотреть случай стандартной сферы (S^n, g_{can}). Так как $\Phi = j^*i$, то самосопряженный оператор $\Psi = \Phi^*\Phi$ равен i^*jj^*i, т. е. для $f \in C^\infty(M)$ $\Psi f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S_x} \left(\int\limits_{\gamma_u} f ds \right) d\nu_x(u)$, где γ_u — геодезическая, определяемая вектором $u \in S_x$. Поскольку оператор Φ определялся только в терминах метрики и геодезического потока, ясно, что $\Psi = \Phi^*\Phi$ будет коммутировать с любым оператором вида $f \mapsto f \circ L$ ($L: S^n \to S^n$ — изометрия S^n). Иными словами, считая S^n вложенным в $\mathbb{R}^{n+1}$, видим, что Ψ является сплетающим оператором естественного представления $SO(n+1)$ в $L^2(S^n)$ и, значит, скалярен на всех пространствах W_p, где $\bigoplus\limits_{p=0}^{\infty} W_p = L^2(S^n)$ — разложение этого представления на неприводимые. Пусть δ_p — единственное собственное число Ψ в W_p.

Доказательство леммы 1. Так как для $f \in L^2(S^n)$ $\| \Phi f \|^2 = (\Psi f, f)$, достаточно показать, что $\delta_p < 1/2$ при $p \geqslant 1$ (пространство W_0 состоит из констант). Пусть $x_0 = (0, 0 \ldots, 1)$ — верхний полюс сферы. Как известно [7], пространство W_p содержит функцию $f_p = C_p^{(n-1)/2}(t_{n+1})$, где t_{n+1} — последняя координата в $\mathbb{R}^{n+1}$, а $C_k^\nu(\cdot)$ — многочлен Гегенбауэра. Вычислим $\Psi f_p(x_0)$. Интеграл $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma_u} f_p dS$ не зависит от выбора геодезической γ_u, проходящей через x_0, и равен, очевидно, $\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} C_p^{(n-1)/2}(\cos\varphi)\, d\varphi$. Последнее выражение, как показано в [7], равно $\frac{[\Gamma(p/2 + (n-1)/2)]^2}{[\Gamma((n-1)/2)]^2 ((p/2)!)^2}$, если p четно, и нулю, если p нечетно. Поэтому далее считаем p четным. Поскольку интегрирование по S_x ничего не изменит, для вычисления $\delta_p = \Psi f_p(x_0)/f_p(x_0)$ достаточно поделить полученную величину на $f_p(x_0)$, равную [7] $\Gamma(p + n - 1)/(p!\Gamma(n-1))$.

В результате после упрощений имеем

$$\delta_p = \frac{p!}{((p/2)!)^2 2^p} \frac{(n-1)n \ldots (n+p-3)}{n(n+1) \ldots (n+p-2)} < \frac{p!}{((p/2)!)^2 2^p}.$$

Стало быть, достаточно показать, что $p!/((p/2)!)^2 \leqslant 2^{p-1}$. Но по формуле для биномиальных коэффициентов левая часть последнего неравенства равна

$$\binom{p}{p/2} = \binom{p-1}{p/2-1} + \binom{p-1}{p/2+1} \leqslant \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p}{k} = 2^{p-1},$$

что и требовалось.

Замечание. В свете упомянутых работ о связи λ_1 с кривизной представляется интересным выяснить, нельзя ли получить оценки на кривизну $C_{2\pi}$-многообразий.

1. *Gallot S.* Minorations sur le λ_1 des varietes riemanniennes // Sem. Bourbaki.—1980.—N 569.—P. 132—148.
2. *Weiner B.* Deformations of metrics and the first eigenvalue of the Laplacian // Invent. math.—1982.—65.—P. 67—81.
3. *Li P.* Poincare inequalities on riemannian manifolds// Ann. Math. Stud.—1982.—N 102.—P. 73—83.
4. *Бесce А.* Многообразия с замкнутыми геодезическими.— М. : Мир, 1981.— 325 с.
5. *Громол Д. Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом.— М. : Мир, 1971.— 343 с.
6. *Weinstein A.* Fourier integral operators, quantization and the spectra of manifolds.— Paris : Publ. CNRS, 1976.— 230 p.
7. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции.— М. : Наука, 1965.— 294 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Получено 26.06.84