УДК 513.88

И.-П. П. Сыроид

Условия отсутствия спектральных особенностей у несамосопряженного оператора Дирака в терминах потенциала

В настоящей статье доказаны достаточные условия на потенциал несамосопряженного оператора Дирака на всей оси, при которых оператор Дирака не имеет спектральных особенностей на непрерывном спектре и оператор является спектральным в смысле Данфорда — Бэйда.

1. Определения и леммы. Пусть $\mathfrak{H} = L_2(R) \times L_2(R)$, а комплекснозначные функции $v_i(x)$ удовлетворяют условиям

$$|v_1(x)| \leqslant \frac{C}{(1+|x|)^{2+\varepsilon}}, \qquad |v_2(x)| \leqslant \frac{C}{(1+|x|)^{1+\varepsilon}}, \quad C>0, \quad \varepsilon>0. \tag{1}$$

Определение 1. *Пусть L — несамосопряженный оператор Дирака, порожденный в $\mathfrak{H}$ дифференциальным выражением*

$$\mathcal{L} = \mathfrak{B}\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x \in R = (-\infty, \infty),$$

на множестве $D(L) = \{f = (f_1, f_2) \in \mathfrak{H} \mid f_i$ — *абсолютно непрерывны на каждом конечном замкнутом промежутке вещественной оси и* $\mathcal{L}(f) \in \mathfrak{H}\}$.

Уравнение Дирака

$$\mathfrak{B}\frac{d}{dx}f(x) + \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 \end{pmatrix} f(x) = \zeta f(x) \tag{2}$$

при условии (1) имеет (см. [4]) решения $e_1^+(x, \zeta)$, $e_2^+(x, \zeta)$ с асимптотиками

$$e_1^+(x, \zeta) = e^{i\zeta x}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + o(1) \text{ при } x \to \infty, \quad e_2^+(x, \zeta) = e^{-i\zeta x}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} + o(1)$$
$$\text{при } x \to -\infty,$$

если $\operatorname{Im}\zeta \geqslant 0$, и решения $e_1^-(x, \zeta)$, $e_2^-(x, \zeta)$ с асимптотиками

$$e_1^-(x, \zeta) = e^{i\zeta x}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + o(1) \text{ при } x \to -\infty, \quad e_2^-(x, \zeta) = e^{-i\zeta x}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} + o(1)$$
$$\text{при } x \to \infty,$$

если $\operatorname{Im}\zeta \leqslant 0$. Решения $e_i^\pm(x, \zeta)$, $i = 1, 2$, представимы посредством операторов преобразования

$$e_1^+(x, \zeta) = e_1(x, \zeta) + \int_x^\infty k(x, y)\, e_1(y, \zeta)\, dy, \qquad e_2^-(x, \zeta) = e_2(x, \zeta) +$$
$$+ \int_x^\infty k(x, y)\, e_2(y, \zeta)\, dy, \tag{3}$$
$$e_1^-(x, \zeta) = e_1(x, \zeta) + \int_{-\infty}^x \tilde{k}(x, y)\, e_1(y, \zeta)\, dy, \qquad e_2^+(x, \zeta) = e_2(x, \zeta) +$$
$$+ \int_{-\infty}^x \tilde{k}(x, y)\, e_2(y, \zeta)\, dy,$$

где $e_1(x, \zeta) = e^{i\zeta x}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2(x, \zeta) = e^{-i\zeta x}\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

При вещественных ζ пары $e_1^+(x, \zeta)$, $e_2^-(x, \zeta)$ и $e_2^+(x, \zeta)$, $e_1^-(x, \zeta)$ образуют две фундаментальные системы решений уравнения (2). Вронскианы систем равны $\{e_1^+(x, \zeta), e_2^-(x, \zeta)\} = 2i$, $\{e_2^+(x, \zeta), e_1^-(x, \zeta)\} = -2i$. Переход между системами осуществляется по формулам

$$e_2^+(x, \zeta) = \delta_2(\zeta)\, e_1^+(x, \zeta) + a_+(\zeta)\, e_2^-(x, \zeta), \quad e_1^-(x, \zeta) = a_-(\zeta)\, e_1^+(x, \zeta) +$$
$$+ \delta_1(\zeta)\, e_2^-(x, \zeta),$$
$$e_1^+(x, \zeta) = -\delta_1(\zeta)\, e_2^+(x, \zeta) + a_+(\zeta)\, e_1^-(x, \zeta), \quad e_2^-(x, \zeta) = a_-(\zeta)\, e_2^+(x, \zeta) - \tag{4}$$
$$- \delta_2(\zeta)\, e_1^-(x, \zeta).$$

Функции $\delta_1(\zeta)$, $\delta_2(\zeta)$, $a_\pm(\zeta)$ называются коэффициентами перехода. Здесь

$$a_\pm(\zeta) = \frac{1}{2i}\{e_1^\pm(x, \zeta), e_2^\pm(x, \zeta)\}, \quad \delta_1(\zeta) = \frac{1}{2i}\{e_1^+(x, \zeta), e_1^-(x, \zeta)\}, \quad \delta_2(\zeta) =$$
$$= \frac{1}{2i}\{e_2^+(x, \zeta), e_2^-(x, \zeta)\}.$$

Функция $a_+(\zeta)$ $(a_-(\zeta))$ аналитически продолжима в полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$ $(\operatorname{Im}\zeta < 0)$ параметра ζ.

Для функций $a_\pm(\zeta)$, $\delta_i(\zeta)$ справедливы формулы

$$a_+(\zeta)\, a_-(\zeta) = 1 + \delta_1(\zeta)\, \delta_2(\zeta), \tag{5}$$

$$\delta_i(\zeta) = (-1)^i \frac{1}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \langle e_i^\pm(t, \zeta),\ Ve_i(t, \zeta)\rangle\, dt, \tag{6}$$

Функции $\delta_1(\zeta)$, $\delta_2(\zeta)$ определены при вещественных ζ, а $\langle f, g\rangle = f_1 g_1 + f_2 g_2$, $Vf(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_2(x) & -v_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$.

Определение 2. *Вещественное число ζ_0 называется спектральной особенностью* [5] *оператора Дирака L, если $a_+(\zeta_0)\, a_-(\zeta_0) = 0$.*

Из формулы (5) получаем условие отсутствия у оператора L спектральных особенностей: $1 + \delta_1(\zeta)\,\delta_2(\zeta) \neq 0$.

Исходя из этого условия, определим несамосопряженные операторы, которые не имеют особенностей.

Определение 3. *Потенциал $V = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_2 & -v_1 \end{pmatrix}$ в операторе Дирака называется безотражательным, если один из коэффициентов $\delta_1(\zeta)$ или $\delta_2(\zeta)$ тождественно равен нулю.*

В самосопряженном случае безотражательные потенциалы Шредингера определены и исследованы Боргом [6] и Баргманом [7]. Несамосопряженные безотражательные потенциалы Шредингера определены автором [1, 3].

Лемма 1. *Пусть потенциал в операторе Дирака безотражателен. Тогда оператор Дирака не имеет спектральных особенностей.*

Доказательство следует из формулы (5).

Определение 4. *Потенциал в операторе Дирака назовем мнимоотражательным, если при вещественных ζ $\delta_1(\zeta)\,\delta_2(\zeta) = i\tilde{\delta}(\zeta)$, где $\tilde{\delta}(\zeta)$ — вещественная функция.*

Лемма 2. *Пусть потенциал в операторе Дирака мнимоотражателен. Тогда оператор Дирака не имеет спектральных особенностей.*

Доказательство следует из формулы (5) и условия мнимоотражательности.

Следствие 1. *В случае безотражательного и мнимоотражательного потенциала операторы Дирака не имеют точек сгущения дискретного спектра на конечной вещественной оси.*

2. Безотражательные потенциалы.

Теорема 1. *Пусть L — оператор Дирака с безотражательным потенциалом. Тогда: 1) функция $a_+(\zeta)(a_-(\zeta))$ аналитически продолжима из полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ $(\operatorname{Im}\zeta < 0)$ в полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > \nu$ $(\operatorname{Im}\zeta < \mu)$, где $\nu < 0$ $(\mu > 0)$. Более того, функция $a_+(\zeta)$ $(a_-(\zeta))$ мероморфно продолжима из полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta > 0$ $(\operatorname{Im}\zeta < 0)$ в комплексную плоскость ζ. Множество корней (и полюсов) функций $a_\pm(\zeta)$ (и продолжений) конечно, полюсы и корни невещественны; 2) оператор L спектрален в смысле Данфорда — Бэйда; 3) функции $v_i(x)$ абсолютно непрерывны.*

Доказательство. Функции δ_1 и δ_2 имеют представления Фурье

$$\delta_1(\zeta) = -\frac{1}{2i}\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\zeta x}\delta(x)\,dx \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle,$$

$$\delta_2(\zeta) = \frac{1}{2i}\left\langle \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\zeta x}\delta(x)\,dx \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\rangle, \tag{7}$$

где

$$\delta(x) = V(x) + 2\int_{-\infty}^{x} V(t)\,k(t, 2x - t)\,dt. \tag{8}$$

Формулы (7) получаются из (6) с помощью (3). Из (7) следует, что $\delta_1 \equiv 0$ тогда и только тогда, когда $\delta_2 \equiv 0$.

Пусть потенциал у оператора Дирака L безотражательный. Из $\delta_1 \equiv 0$ следует $a_+(\zeta)\, a_-(\zeta) \neq 0$ (см. (5)) и $e_1^+(x, \zeta) = \dfrac{e_1^-(x, \zeta)}{a_-(\zeta)}$ (см. (4)) на вещественной оси. Определим функцию

$$\widehat{e_1^+}(x,\zeta)=\begin{cases} e_1^+(x,\zeta) \text{ при } \operatorname{Im}\zeta>0;\\ e_1^+(x,\zeta)=\dfrac{1}{a_-(\zeta)}e_1^-(x,\zeta) \text{ при вещественных } \zeta;\\ \dfrac{1}{a_-(\zeta)}e_1^-(x,\zeta) \text{ при } \operatorname{Im}\zeta<0.\end{cases}$$

Найдется такое $\nu_0<0$, что функция $\widehat{e_1^+}(x,\zeta)$ непрерывна в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>\nu_0$ и аналитична при $\operatorname{Im}\zeta>0$ и в полосе $0>\operatorname{Im}\zeta>\nu_0$ по построению. Следовательно, функция $\widehat{e_1^+}(x,\zeta)$ аналитична при $\operatorname{Im}\zeta>\nu_0$. Из построения следует теперь, что $\widehat{e_1^+}(x,\zeta)$ мероморфна в плоскости ζ. Функция $\widehat{e_1^+}(x,\zeta)$ имеет асимптотику

$$\widehat{e_1^+}(x,\zeta)=e^{i\zeta x}\begin{pmatrix} i\\ 1\end{pmatrix}+o(1) \text{ при } x\to\infty.$$

При $\delta_2\equiv 0$ $a_+(\zeta)a_-(\zeta)\neq 0$ и $e_2^+(x,\zeta)=\dfrac{e_2^-(x,\zeta)}{a_-(\zeta)}$ на вещественной оси. Определим функцию

$$\widehat{e_2^+}(x,\zeta)=\begin{cases} e_2^+(x,\zeta) \text{ при } \operatorname{Im}\zeta>0;\\ e_2^+(x,\zeta)=\dfrac{1}{a_-(\zeta)}e_2^-(x,\zeta) \text{ при вещественных } \zeta;\\ \dfrac{1}{a_-(\zeta)}e_2^-(x,\zeta) \text{ при } \operatorname{Im}\zeta<0.\end{cases}$$

Найдется такое $\nu_0<0$, что $\widehat{e_2^+}(x,\zeta)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>\nu_0'$. Более того, $\widehat{e_2^+}(x,\zeta)$ мероморфна в плоскости ζ. Доказательство подобно предыдущему случаю. Функция $\widehat{e_2^+}(x,\zeta)$ имеет асимптотику

$$\widehat{e_2^+}(x,\zeta)=e^{-i\zeta x}\begin{pmatrix} -i\\ 1\end{pmatrix}+o(1) \text{ при } x\to-\infty.$$

Используя определение для $a_+(\zeta)$, получаем, что при $\delta_1\equiv\delta_2\equiv 0$ $a_+(\zeta)$ аналитически продолжима из полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta>0$ в полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta>\nu$, где $\nu<0$ и $\nu=\min\{|\nu_0|,|\nu_0'|\}$. Продолжение $\widehat{a}_+(\zeta)$ имеет вид

$$\widehat{a}_+(\zeta)=\frac{1}{2i}\{\widehat{e_1^+}(x,\zeta),\ \widehat{e_2^+}(x,\zeta)\} \tag{9}$$

и мероморфно в плоскости ζ.

Аналогично при $\delta_1\equiv 0$ ($\delta_2\equiv 0$) определяются функции $\widehat{e_1^-}(x,\zeta)$ ($\widehat{e_2^-}(x,\zeta)$):

$$\widehat{e_1^-}(x,\zeta)=\begin{cases} \dfrac{1}{a_+(\zeta)}e_1^+(x,\zeta) \text{ при } \operatorname{Im}\zeta>0;\\ e_1^-(x,\zeta)=\dfrac{1}{a_+(\zeta)}e_1^+(x,\zeta) \text{ при вещественных } \zeta;\\ e_1^-(x,\zeta) \text{ при } \operatorname{Im}\zeta<0;\end{cases}$$

$$\widehat{e_2^-}(x,\zeta)=\begin{cases} \dfrac{1}{a_+(\zeta)}e_2^+(x,\zeta) \text{ при } \operatorname{Im}\zeta>0;\\ e_2^-(x,\zeta)=\dfrac{1}{a_+(\zeta)}e_2^+(x,\zeta) \text{ при вещественных } \zeta;\\ e_2^-(x,\zeta) \text{ при } \operatorname{Im}\zeta<0.\end{cases}$$

С помощью $\widehat{e_1^-}(x, \zeta)$ и $\widehat{e_2^-}(x, \zeta)$ получаем, что функция $a_-(\zeta)$ аналитически продолжима из полуплоскости $\operatorname{Im}\zeta < 0$ в полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta < \mu$, где $\mu > 0$, и мероморфно продолжима в плоскость ζ. Продолжение $\widehat{a_-}(\zeta)$ таково:

$$\widehat{a_-}(\zeta) = \frac{1}{2i}\{\widehat{e_1^-}(x, \zeta), \widehat{e_2^-}(x, \zeta)\}. \tag{10}$$

Из (9) и (10) и определений функций $\widehat{e_i^\pm}(x, \zeta)$ имеем

$$\widehat{a_+}(\zeta) = \begin{cases} a_+(\zeta) \text{ при } \operatorname{Im}\zeta > 0; \\ a_+(\zeta) = \dfrac{1}{a_-(\zeta)} \text{ при вещественных } \zeta; \\ \dfrac{1}{a_-(\zeta)} \text{ при } \operatorname{Im}\zeta < 0; \end{cases}$$

$$\widehat{a_-}(\zeta) = \begin{cases} \dfrac{1}{a_+(\zeta)} \text{ при } \operatorname{Im}\zeta > 0; \\ a_-(\zeta) = \dfrac{1}{a_+(\zeta)} \text{ при вещественных } \zeta; \\ a_-(\zeta) \text{ при } \operatorname{Im}\zeta < 0. \end{cases}$$

Следовательно, множество полюсов и корней функций $a_\pm(\zeta)$ конечно, при этом полюсы и корни невещественны. Спектральность оператора L при доказанных условиях получается из результатов работы [2].

Докажем абсолютную непрерывность безотражательного потенциала $V(x)$. В силу представлений Фурье (7) из $\delta_1 \equiv 0$ следует $\delta \equiv 0$ и из (8) получаем $V(x) = -2\int\limits_{-\infty}^{x} V(t)\,k(t, 2x-t)\,dt$, что и доказывает абсолютную непрерывность.

3. Условия спектральности в терминах потенциала. Определим нелинейное уравнение

$$\left[\mathfrak{B}\frac{d}{dx} + \mathcal{U},\ M_n + c_1M_{n-1} + \ldots + c_nM_0\right] = 0, \tag{11}$$

где $c_1, \ldots, c_n$ — комплексные параметры, операторы $\mathfrak{B}\dfrac{d}{dx} + \mathcal{U}$ и M_i образуют пары Лэкса, $\mathfrak{B}^2 = -1$, $\mathfrak{B}\mathcal{U} = -\mathcal{U}\mathfrak{B}$, $[T, S] = TS - ST$, а

$$M_i = 2\mathfrak{B}^{i+1}\frac{d^i}{dx^i} + \sum_{l=0}^{i-1} P_l(\mathfrak{B}, \mathcal{U}, \mathcal{U}', \mathcal{U}'', \ldots)\frac{d^l}{dx^l}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $P_l(\mathfrak{B}, \mathcal{U}, \mathcal{U}', \ldots)$ полиномиально зависят от операторнозначной функции $\mathcal{U}(x)$ и производных $\mathcal{U}'(x)$, $\mathcal{U}''(x)$, …, причем

$$\|P_l(\mathfrak{B}, \mathcal{U}, \mathcal{U}', \ldots)\| \to 0 \text{ при } \|\mathcal{U}^{(l)}(x)\| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0. \tag{12}$$

Из множества уравнений (11) образуем уравнения, получающиеся за счет операторов M_i только нечетных порядков:

$$\left[\mathfrak{B}\frac{d}{dx} + \mathcal{U},\ M_{2n+1} + c_1M_{2n-1} + \ldots + c_nM_1\right] = 0. \tag{13}$$

Теорема 2. *Пусть*: 1) *для комплексных параметров* $c_1, \ldots, c_n$, $c_n \neq 0$, *из уравнения* (13) *уравнение*

$$\zeta^{2n} + c_1\zeta^{2(n-1)} + \ldots + c_{n-1}\zeta^2 + c_n = 0 \tag{14}$$

имеет только невещественные корни; 2) *функция* $V(x)$ *вида* $V(x) = \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_2(x) & -v_1(x) \end{pmatrix}$ *удовлетворяет уравнению* (13), *условию* (1) *и условиям на производные*

$$\| V^{(i)}(x) \| \xrightarrow[|x| \to \infty]{} 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1, \tag{15}$$

где m — *порядок уравнения* (13).

Тогда V — *безотражательный потенциал, оператор Дирака* L *с потенциалом* V *безотражателен и спектрален в смысле Данфорда — Бэйда. Невещественные корни уравнения* (14) *определяют дискретный спектр оператора* L.

Доказательство. Докажем безотражательность потенциала V, используя заметку [8]. Пусть $M = M_{2n+1} + c_1 M_{2n-1} + \ldots + c_n M_1$.

Операторы $\mathfrak{B} \frac{x}{dx} + V$ и M коммутируют, поэтому оператор M переводит решения уравнения (2) снова в решения этого уравнения. Справедливы асимптотические формулы

$$Me_1^{\pm}(x, \zeta) = -2i\zeta (\zeta^{2n} + c_1 \zeta^{2(n-1)} + \ldots + c_n) e_1(x, \zeta) + o(1), \quad x \to \pm\infty,$$

$$Me_2^{\pm}(x, \zeta) = 2i\zeta (\zeta^{2n} + c_1 \zeta^{2(n-1)} + \ldots + c_n) e_2(x, \zeta) + o(1), \quad x \to \mp\infty, \tag{16}$$

где $e_1(x, \zeta) = e^{ix\zeta} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ и $e_2(x, \zeta) = e^{-ix\zeta} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Чтобы доказать асимптотику (16) для $Me_1^+(x, \zeta)$, применим оператор M к решению $e_1^+(x, \zeta)$, представленному тождеством

$$e_1^+(x, \zeta) = e_1(x, \zeta) - \int_x^\infty (\sin \zeta (x - t) + \cos \zeta (x - t) \mathfrak{B}) V(t) e_1^+(t, \zeta) \, dt.$$

Учитывая (12) и (15), получаем (16). Остальные асимптотические равенства доказываются аналогично.

Сравним асимптотики $e_1^+(x, \zeta)$ и $Me_1^+(x, \zeta)$ при $x \to -\infty$. Из (4) находим асимптотику для $e_1^+(x, \zeta)$: $e_1^+(x, \zeta) = -\delta_1(\zeta) e_2(x, \zeta) + a_+(\zeta) e_1(x, \zeta)$, $x \to -\infty$. Функция $Me_1^+(x, \zeta)$ имеет асимптотику при $x \to -\infty$ (см. (16)): $Me_1^+(x, \zeta) = -2i\zeta (\zeta^{2n} + c_1 \zeta^{2(n-1)} + \ldots + c_n)(\delta_1(\zeta) e_2(x, \zeta) + a_+(\zeta) e_1(x, \zeta))$. Требуя, чтобы асимптотики отличались на множитель, зависящий только от ζ, при вещественных ζ имеем $\zeta(\zeta^{2n} + c_1 \zeta^{2(n-1)} + \ldots + c_n) \delta_1(\zeta) \equiv 0$. Учитывая, что корни уравнения (14) невещественны, получаем* $\delta_1 \equiv 0$. Следовательно, V — безотражательный потенциал. В силу теоремы 1 оператор L не имеет спектральных особенностей и L спектрален в смысле Данфорда — Бэйда.

Докажем, что невещественные корни уравнения (14) определяют дискретный спектр оператора L. Наряду с системой $e_2^+(x, \zeta)$, $e_1^-(x, \zeta)$ рассмотрим систему $Me_2^+(x, \zeta)$, $Me_1^-(x, \zeta)$ решений уравнения (2) с вронскианом $\{Me_2^+(x, \zeta), Me_1^-(x, \zeta)\} = -8i\zeta^2 (\zeta^{2n} + c_1 \zeta^{2(n-1)} + \ldots + c_n) \neq 0$ при $\zeta \neq 0$ в силу условий теоремы.

Если обозначить

$$a_+^M(\zeta) = \frac{1}{2i} \{e_1^+(x, \zeta), Me_2^+(x, \zeta)\}, \quad a_-^M(\zeta) = \frac{1}{2i} \{Me_1^-(x, \zeta), e_2^-(x, \zeta)\},$$

то

$$a_+^M(\zeta) = 2i\zeta (\zeta^{2n} + c_1 \zeta^{2(n-1)} + \ldots + c_n) a_+(\zeta), \quad \operatorname{Im} \zeta \geqslant 0, \ \zeta \neq 0,$$

$$a_-^M(\zeta) = -2i\zeta (\zeta^{2n} + c_1 \zeta^{2(n-1)} + \ldots + c_n) a_-(\zeta), \quad \operatorname{Im} \zeta \leqslant 0, \ \zeta \neq 0. \tag{17}$$

Из (17) следует, что невещественные корни уравнения (14) определяют дискретный спектр оператора L.

---

* Используется также непрерывность $\delta_1(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = 0$.

Теорема 3 обобщает теорему 2.

Теорема 3. *Пусть*: 1) *в уравнении* (11) *хотя бы один из операторов* M_l *имеет нечетный порядок*: $c_{n-l} \neq 0$ *и* $l = 2i+1$; 2) *уравнение*

$$\zeta^n + c_1\zeta^{n-1} + \dots + c_{n-l}\zeta^l + \dots + c_n = 0 \tag{18}$$

имеет только невещественные корни; 3) $V(x)$ *удовлетворяет уравнению* (11), *условию* (1) *и условиям вида* (15) *на производные*.

Тогда V — *безотражательный потенциал. Оператор* L *с потенциалом* V *не имеет спектральных особенностей и* L *спектрален в смысле Данфорда — Бэйда. Невещественные корни уравнения* (18) *определяют дискретный спектр оператора* L.

Замечание 1. Операторы $M = M_n + c_1M_{n-1} + \dots + c_nM_0$, коммутирующие в силу (11) с оператором $\mathfrak{B}d/dx + V$, образуют коммутативное кольцо с единицей $\mathfrak{A}$. Асимптотическое равенство $Me_1^+(x, \zeta) = -2i(\zeta^n + c_1\zeta^{n-1} + \dots + c_n)e^{i\zeta x}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} + o(1)$ при $x \to \infty$ и равенства $a_\pm^M(\zeta) = 2i(\zeta^n + c_1\zeta^{n-1} + \dots + c_n)a_\pm(\zeta)$ определяют гомоморфизм $M \to \zeta^n + c_1\zeta^{n-1} + \dots + c_n$ из $\mathfrak{A}$ в кольцо многочленов.

Теорема 4. *Если для пары операторов* L, M *оператор* $M = M_n + c_1M_{n-1} + \dots + c_nM_0$ *осуществляет гомоморфизм мультипликативного группоида кольца* $\mathfrak{A}$ *в мультипликативный группоид полиномов, имеющих только невещественные корни, то оператор* L *не имеет спектральных особенностей и* L *спектрален в смысле Данфорда —Бэйда в пространстве* $L_2(R) \times L_2(R)$. (см. пример).

В случае гомоморфизма из кольца $\mathfrak{A}$ в кольцо полиномов можно привести пример периодического решения уравнения (11) за счет полиномов с вещественными корнями.

Следствие 2. *Пусть*: 1) *в уравнении* (11) *операторы* M_i *имеют только четные порядки, а для параметров* $c_1, \dots, c_n$ *из* (11) *уравнение* $\zeta^{2n} + c_1\zeta^{2(n-1)} + \dots + c_{n-1}\zeta^2 + c_n = 0$ *имеет только невещественные корни*; 2) *функция* V *удовлетворяет уравнению* (11) *и условию* $\int_R e^{\varepsilon|x|}\|V(x)\|\,dx < \infty$, $\varepsilon > 0$.

Тогда оператор Дирака с потенциалом V *не имеет спектральных особенностей и оператор Дирака спектрален в смысле Данфорда — Бэйда.*

Пример. Из уравнения $\left[\mathfrak{B}\frac{d}{dx} + \mathcal{U}, M_2\right] + c\left[\mathfrak{B}\frac{d}{dx} + \mathcal{U}, M_0\right] = 0$ получаем нелинейное уравнение Шредингера

$$\mathcal{U}'' - 2\mathcal{U}^3 - 4c\mathcal{U} = 0 \tag{19}$$

при $M_2 = B_0\frac{d^2}{dx^2} + B_1\frac{d}{dx} + B_2$, $B_0 = -2\mathfrak{B}$, $B_1 = -2\mathcal{U}$, $B_2 = -\mathcal{U}' + \mathfrak{B}\mathcal{U}^2$.

Функция

$$V(x) = \frac{2\mu}{\operatorname{sh}(2\mu x + i)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad x \in R, \ c = \mu^2 \tag{20}$$

при $\operatorname{Im} i\mu \neq 0$ удовлетворяет уравнению (19) и следствию 2. Для корней $\pm i\mu$ уравнения $\zeta^2 + c = 0$, $c = \mu^2$ при $\operatorname{Im} i\mu \neq 0$ получаем

$$Lf = \pm i\mu f, \quad f(x) = V(x)\begin{pmatrix} \sqrt{1 + i\operatorname{sh}(2\mu x + i)} \\ \sqrt{1 - i\operatorname{sh}(2\mu x + i)} \end{pmatrix}.$$

Если корни уравнения $\zeta^2 + \mu^2 = 0$ вещественны: $\mu = \pm i\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi = 0$, то потенциал (20) и задача становятся периодическими.

1. *Сыроид И. П.* Несамосопряженный аналог безотражательных потенциалов // Математический анализ и ТВ.— Киев : Наук. думка, 1978.— С. 168—172.
2. *Сыроид И.-П. П.* Несамосопряженное возмущение непрерывного спектра оператора Дирака // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 1.— С. 115—119.
3. *Сыроид И.-П. П.* Достаточные условия отсутствия спектральных особенностей у несамосопряженного оператора Шредингера в терминах потенциала // Сиб. мат. журн.— 1981.— 22, № 1.— С. 151—157.
4. *Гасымов М. Г.* Обратная задача теории рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$ // Тр. Моск. мат. о-ва,— 1968.— **19**.— С. 41—112.
5. *Наймарк М. А.* Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора 2-го порядка на полуоси // Там же.— 1954.— 3.— С. 181—270.
6. *Borg G.* Eine Umkerhrung der Sturm — Liouvilleschen Eigenwirtaufgabe // Acta Math.— 1946.— **78**, N 1.— P. 1—96.
7. *Bargmann V.* Determination of a central field of force form the elastic scattering phase shifts // Phys. Rev.— 1949. **75**.— P. 301—303.
8. *Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.*, A method for solving the Korteweg — de Vries equation // Phys. Rev. Lett.— 1967.— **19**, N 19.— P. 1095—1097.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР,
Львов

Получено 08.02.83