УДК 517.925

С. К. Норкин

Асимптотическая и локально-асимптотические воронки для систем из класса Осгуда для скалярного произведения

1. Пусть $x \in \mathbb{R}_+$, $w = \operatorname{colon}(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$, $n > k$; $F(x, w) = \operatorname{colon}(f(x, y, z),\ g(x, y, z)) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$; $\omega(x, u, v) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$; $\sigma(x, u, v) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_0 \times \mathbb{R}_0 \to \mathbb{R}$; $I_a =]0; a[$, $\mathcal{I}_a = [0; a[$; $\mathbb{C}_0(I_a)$ $[\mathbb{C}_+(I_a)]$ — множество неотрицательных (положительных) функций, определенных в интервале I_a; $\|\cdot\|$ — евклидова норма; $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение.

Обозначим через $\overline{\mathrm{osg}}_{\langle y,\cdot\rangle}(\omega(x,\cdot,\cdot))$ и $\underline{\mathrm{osg}}_{\langle y,\cdot\rangle}(\omega(x,\cdot,\cdot))$ множества вектор-функций $f(x,y,z)$ таких, что в области S выполняются соответственно неравенства

$$\langle y, f(x,y,z[\rangle \leqslant \omega(x, \|y\|^2, \|z\|^2), \quad \langle y, f(x,y,z)\rangle \geqslant \omega(x, \|y\|^2 \|z\|^2).$$

Обозначим через $\overline{\mathrm{Osg}}_{\langle y,\cdot\rangle}(\sigma(x,\cdot,\cdot))$ и $\underline{\mathrm{Osg}}_{\langle y,\cdot\rangle}(\sigma(x,\cdot,\cdot))$ множества вектор-функций $f(x,y,z)$ таких, что в области S выполняются соответственно неравенства

$$\langle y_2-y_1, f(x,y_2,z_2)-f(x,y_1,z_1)\rangle \leqslant \sigma(x, \|y_2-y_1\|^2, \|z_2-z_1\|^2),$$
$$\langle y_2-y_1, f(x,y_2,z_2)-f(x,y_1,z_1)\rangle \geqslant \sigma(x, \|y_2-y_1\|^2, \|z_2-z_1\|^2).$$

Множества $\overline{\mathrm{osg}}_{\langle y,\cdot\rangle}$, $\underline{\mathrm{osg}}_{\langle y,\cdot\rangle}$, $\overline{\mathrm{Osg}}_{\langle y,\cdot\rangle}$, $\underline{\mathrm{Osg}}_{\langle y,\cdot\rangle}$ будем называть классами Осгуда для скалярного произведения.

2. Рассмотрим систему

$$w' = F(x, w), \tag{1}$$

определенную в области

$$S\{(x,w): x \in I_a, \|y\| \in \mathscr{I}_b, \|z\| \in \mathscr{I}_d\}, \tag{2}$$

где $a, b, d \in \mathbb{R}_+$ — фиксированные числа.

Обозначим через $w(x; x^*, w^*) = \mathrm{colon}\,(y(x; x^*, y^*, z^*), \ z(x; x^*, y^*, z^*))$, $w^* = \mathrm{colon}\,(y^*, z^*)$, решение системы (1), удовлетворяющее условию $w(x^*; \ x^*, w^*) = w^*$.

Будем предполагать, что система (1) принадлежит классу $(\mathbb{C}(S), U_n)$. Это означает, что $F \in \mathbb{C}(S) \setminus$ и $\forall (x^*, w^*) \in S$ существует решение $w(x; x^*, w^*)$ системы (1), рассматриваемое на максимальном интервале существования.

Решение $w(x; x^*, w^*)$ назовем O-решением, если $\lim\limits_{x\to+0} \|w(x; x^*, w^*)\| = 0$.

Будем изучать для системы (1) в области (2) интегральное O-множество

$$\mathfrak{M} = \{(x^*, w^*) \in S: \lim_{x\to+0} \|w(x; x^*, w^*)\| = 0\}, \tag{3}$$

образованное с помощью O-решений системы (1). Очевидно, что $\{(x, w(x; x^*, w^*)): x \in I_{x^*}\} \subset \mathfrak{M}$, поэтому будем говорить, что интегральная O-кривая $(x, w(x; x^*, w^*))$, $x \in I_{x^*}$, входит во множество $\mathfrak{M}$.

Известно [1, 2], что при исследовании ТО-полутраекторий автономной системы в окрестности изолированного исключительного направления исходная автономная система преобразуется в сингулярную систему вида

$$xw' = F(x, w), \tag{4}$$

рассматриваемую в области (2). Система (4) легко преобразуется в систему (1). Для системы (4) ставятся аналоги проблем различения Фроммера в многомерных пространствах. В узком смысле для решения проблем различения Фроммера нужно найти размерность $\dim \mathfrak{M}$, а в широком смысле — дополнительно асимптотику $\mathfrak{M}$ и представление $\mathfrak{M}$ с помощью вектор-функций.

В работах [1—5] найдена размерность $\dim \mathfrak{M}$, причем в работе [1] найдено представление $\mathfrak{M}$ с помощью некоторой вектор-функции. Система (1) при этом предполагалась из класса Липшица для скалярного произведения.

В настоящей статье решается задача исследования асимптотики $\mathfrak{M}$, а также находятся размерность $\dim \mathfrak{M}$ и представление интегрального O-множества $\mathfrak{M}$ системы (1) из класса Осгуда для скалярного произведения.

3. Подмножество $\mathfrak{M}^* \subset \mathfrak{M}$ назовем интегральным O-подмножеством, если $\forall (x^*, w^*) \in \mathfrak{M}^* \Rightarrow \{(x, w(x; x^*, w^*)): x \in I_{x^*}\} \subset \mathfrak{M}^*$.

Будем изучать интегральное O-подмножество вида

$$\mathfrak{M}_{x_0} = \{(\bar{x}, \bar{w}) \in \mathfrak{M} : \bar{x} \in I_{x_0}, \{(x, w(x; \bar{x}, \bar{w})) : x \in I_{x_0}\} \subset \mathfrak{M}\}, \tag{5}$$

где x_0 — фиксированное число. Интегральное O-подмножество $\mathfrak{M}_{x_0}$, являясь сечением $\mathfrak{M}$, содержит интегральные O-кривые системы (1), продолжимые на интервал I_{x_0}.

Пусть $\Omega \subset S$ — некоторая область, $(x, w) = (0, 0) \in \bar{\Omega}$. Обозначим через $\mathfrak{M}(\Omega)$ максимальное интегральное O-подмножество, находящееся в Ω $\forall x \in I_{x_0}$, т. е. $\forall (x^*, w^*) \in \mathfrak{M}(\Omega) \Rightarrow \{(x, w(x; x^*, w^*)) : x \in I_{x_0}\} \subset \mathfrak{M}(\Omega)$ и $\forall (x_1, w_1) \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}(\Omega) \Rightarrow \exists x_2 \in I_{x_0} : (x_2, w(x_2; x_1, w_1)) \notin \bar{\Omega}$.

Определение 1. *Область $\Omega \subset S$ назовем асимптотической воронкой для интегрального O-множества $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}(\Omega) \neq \varnothing$ и $\mathfrak{M}(\Omega) = \mathfrak{M}_{x_0}$.*

Определение 2. *Область $\Omega \subset S$ назовем локально-асимптотической воронкой для интегрального O-множества $\mathfrak{M}$, если $\mathfrak{M}(\Omega) \neq \varnothing$ и $\mathfrak{M}(\Omega) \subset \mathfrak{M}_{x_0}$.*

Рассмотрим область Ω вида

$$\Omega = \{(x, w) \in S : x \in I_{x_0}, \|y\| < h(x)\|z\|, \|z\| \leqslant H(x)\}, \tag{6}$$

где $h, H \in \mathbb{C}_+(I_{x_0})$ и

$$h(x), H(x) = o(1) \quad \text{при} \quad x \to +0. \tag{7}$$

Если область (6) является локально-асимптотической воронкой для интегрального O-множества $\mathfrak{M}$, то в области (2) существует интегральная O-кривая $(x, w(x; x^*, w^*))$ системы (1), удовлетворяющая оценкам

$$\|y(x; x^*, y^*, z^*)\| < h(x)\|z(x; x^*, y^*, z^*)\|, \quad \|z(x; x^*, y^*, z^*)\| \leqslant H(x), \quad x \in I_{x_0}, \tag{8}$$

т. е. асимптотика соответствующего O-решения (поскольку выполняются (7) системы (1) известна и определяется конструкцией самой области (6) Асимптотику (8) имеют лишь те интегральные O-кривые, которые образуют O-подмножество $\mathfrak{M}(\Omega) \subset \mathfrak{M}_{x_0}$. В указанном смысле будем говорить, что известна локально асимптотика $\mathfrak{M}$.

Если область (6) является асимптотической воронкой для интегрального O-множества $\mathfrak{M}$, то асимптотику (8) имеют все интегральные O-кривые системы (1), образующие $\mathfrak{M}_{x_0}$. Указать асимптотику интегральных O-кривых системы (1), образующих $\mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_{x_0}$, нетрудно, нужно уменьшать значение x_0 для (5) и (6). В указанном смысле будем говорить, что известна асимптотика $\mathfrak{M}$.

Итак, для исследования асимптотики $\mathfrak{M}$ достаточно указать условия, при выполнении которых область (6) является локально-асимптотической или асимптотической воронкой. Конкретный вид функций h и H будет указан в интегральной форме с помощью функций из условий Осгуда для скалярного произведения.

4. Установим в каком случае интегральное O-множество $\mathfrak{M}$ непусто. Для этого в силу определения 2 достаточно показать, что область Ω является локально-асимптотической воронкой.

Условие 1: 1) функция $\omega_2(x, u, v) \in \mathbb{C}(I_a \times \mathcal{I}_b \times \mathcal{I}_c)$ является однородной 1-го порядка относительно u и v; т. е. $\forall t \in \mathbb{R}$ имеем $\omega_2(x, tu, tv) = t\omega_2(x, u, v)$;

2) функция $\omega_2(x, u, v)$ невозрастает относительно u;

3) в области S $g \in \underline{\mathrm{osg}}_{\langle z, \cdot \rangle}(\omega_2(x, \cdot, \cdot))$.

Лемма 1. *Пусть выполняется условие 1, существует функция $h \in \mathbb{C}_+(I_a)$, удовлетворяющая свойству (7), выполняется неравенство*

$$\omega_2(x, h^2(x), 1) > 0, \quad x \in I_{x_0}, \tag{9}$$

и расходится интеграл

$$\int_{+0} \omega_2(x, h^2(x), 1)\, dx = +\infty. \tag{10}$$

Если множество $\partial\Sigma = \{(x, w) \in S : x \in I_{x_0},\ \| y \| = h(x) \| z \|,\ \| z \| \in I_c\}$, *где* $x_0 \in I_a$, $c \in I_d$ — *фиксированные числа, есть множество точек строгого выхода по отношению к системе* (1) *из области* $\Sigma = \{(x, w) \in S : x \in I_{x_0},$ $\| y \| < h(x) \| z \|,\ \| z \| \in I_c\}$ *при убывании* x, *то область* (6), *для которой функция* H *определяется равенством*

$$H(x) = c \exp\left(-\int\limits_{x}^{x_0} \omega_2(s, h^2(s), 1)\, ds\right), \tag{11}$$

является локально-асимптотической воронкой.

В лемме 1 для локально-асимптотической воронки указывается функция H и не указывается вид функции h. Укажем теперь некоторые функции h. Тем самым будет выяснена локально асимптотика интегрального O-множества $\mathfrak{M}$.

Условие 2: 1) справедливо условие 1;

2) функция $\omega_1(x, u, v) \in \mathbb{C}(I_a \times \mathcal{I}_b \times \mathcal{I}_c)$ является однородной 1-го порядка относительно u и v;

3) существуют функции $p \in \mathbb{C}(I_a)$, $q \in \mathbb{C}_0(I_a)$, причем функция $p(x)$ сохраняет знак в I_a, такие, что $\forall (x, v) \in I_a \times \mathcal{I}_b$ выполняются неравенства

$$\omega_1(x, u, 1) - \omega_1(x, 0, 1) \leqslant p(x) u, \quad \omega_2(x, u, 1) - \omega_2(x, 0, 1) \geqslant -q(x) u; \tag{12}$$

4) в области S $f \in \overline{\operatorname{osg}}_{(y,\cdot)}(\omega_1(x, \cdot, \cdot))$.

Теорема 1. *Пусть для системы* (1) *выполняется условие* 2. *Если* $p(x) < 0$, $x \in I_a$, *расходится интеграл* (10), *сходится интеграл*

$$h(x) = \int\limits_{0}^{x} q(s) \exp \int\limits_{x}^{s} \omega_2(\tau, 0, 1)\, d\tau ds, \tag{13}$$

и в интервале I_{x_0} *выполняются неравенства* (9),

$$\omega_1(x, 0, 1) < | p(x) | h^2(x), \tag{14}$$

то область (6), *где функция* H *определяется формулой* (11), *а функция* h — *формулой* (13), *является локально-асимптотической воронкой для* $\mathfrak{M}$, *причем* $\forall \bar{x} \in I_{x_0} \forall \| \bar{z} \| \in I_c \ \exists \ \bar{y} : (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathfrak{M}(\Omega)$.

Доказательство. Полагаем $\xi(\in) = \| y \|^2 - h^2(x) \| z \|^2$, $\zeta(x) = \| z \|^2 - c^2$. Введем область $\Sigma = \{(x, w) \in S : x \in I_{x_0},\ \xi(x) < 0,\ \zeta(x) < 0,$ $\| z \| > 0\}$, в границу которого входят множества

$$\partial\Sigma_1 = \{(x, w) \in S : x \in I_{x_0},\ \xi(x) = 0,\ \zeta(x) \leqslant 0,\ \| z \| > 0\},$$

$$\partial\Sigma_2 = \{(x, w) \in S : x \in I_{x_0},\ \xi(x) \leqslant 0,\ \zeta(x) = 0,\ \| z \| > 0\}.$$

На множестве $\partial\Sigma_1$ имеем $\| y \| = h(x) \| z \|$, $0 < \| z \| < c$. Поэтому, учитывая условия 2.1, 2.4, 2.2, получаем

$$\frac{1}{2} \zeta'(x) |_{\partial\Sigma_1} = -h'(x) h(x) \| z \|^2 + \langle y, f(x, y, z) \rangle - h^2(x) \langle z, g(x, y, z) \rangle \leqslant$$

$$\leqslant -h'(x) h(x) \| z \|^2 + \omega_1(x, \| y \|^2, \| z \|^2) - h^2(x) \omega_2(x, \| y \|^2, \| z \|^2) \leqslant$$
$$\leqslant -h'(x) h(x) \| z \|^2 + \omega_1(x, h^2(x), 1) \| z \|^2 - h^2(x) \omega_2(x, h^2(x), 1) \| z \|^2.$$

Применяя условие 2.3, находим

$$\frac{1}{2} \xi'(x) |_{\partial\Sigma_1} \leqslant \| z \|^2 [-h'(x) h(x) + p(x) h^2(x) + \omega_1(x, 0, 1) +$$

$$+ q(x) h^4(x) - \omega_2(x, 0, 1) h^2(x)].$$

Поскольку функция (13) является решением линейного дифференциального уравнения $h' + \omega_2(x, 0, 1) h - q(x) = 0$, то с учетом (14) получаем

$$\xi'(x) |_{\partial\Sigma_1} < 0. \tag{15}$$

На множестве $\partial\Sigma_2$ имеем $\| y \| \leqslant h(x) \| z \|$, $\| z \| = c$. Поэтому, учитывая условия 1.2, 1.3, имеем

$$\frac{1}{2} \zeta'(x) |_{\partial\Sigma_2} \geqslant \omega_2(x, \| y \|^2, \| z \|^2) \geqslant \omega_2(x, h^2(x), 1) c^2.$$

Из неравенства (9) следует

$$\zeta'(x) |_{\partial\Sigma_2} > 0. \tag{16}$$

Из неравенств (15), (16) вытекает, что $\Sigma_{sl} = \partial\Sigma_1 \setminus \partial\Sigma_2$ есть множество точек строгого выхода относительно системы (1) из области Σ при убывании x. Таким образом, справедливы условия леммы 1. В силу леммы 1 теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть для системы* (1) *выполняется условие* 2. *Если в интервале* I_{x_0} *выполняются неравенства* (9), $\omega_1(x, 0, 1) + p(x) h^2(x) < 2\omega_2(x, 0, 1) h^2(x)$, *расходится интеграл* (10), *то область* (6), *где функция* H *определяется формулой* (11), *а функция* h — *формулой*

$$h(x) = \left[\int_x^a 2q(s) \exp \int_x^s 2\omega_2(\tau, 0, 1) \, d\tau ds \right]^{-1/2}, \tag{17}$$

является локально-асимптотической воронкой для $\mathfrak{M}$, *причем* $\forall \bar{x} \in I_{x_0} \forall \| \bar{z} \| \in I_c \exists \bar{y} : (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathfrak{M}(\Omega)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1 с той лишь разницей, что функция h удовлетворяет уравнению Бернулли $h' - \omega_2(x, 0, 1) h - q(x) h^3 = 0$.

5. Установим, в каком случае $\mathfrak{M}$ является интегральным O-многообразием определенной размерности и найдем представление для $\mathfrak{M}$ с помощью некоторой вектор-функции, удовлетворяющей условию Липшица.

Условие 3: 1) функции $\sigma_i(x, u, v) \in \mathbb{C}(I_a \times \mathcal{I}_{2b} \times \mathcal{I}_{2c})$, $i = 1, 2$, являются однородными 1-го порядка относительно u и v;

2) функция $\sigma_1(x, u, v)$ неубывает по v; функция $\sigma_2(x, u, v)$ невозрастает относительно u;

3) существуют функции $p \in \mathbb{C}(I_a)$, $q \in \mathbb{C}_0(I_a)$, $l \in \mathbb{C}_+(I_a)$, причем функция $p(x)$ сохраняет знак в интервале I_a, такие, что $\forall (x, u, v) \in I_a \times \mathcal{I}_{2b} \times \mathcal{I}_1$ выполняются неравенства

$$\sigma_1(x, u, 1) - \sigma_1(x, 0, 1) \leqslant p(x) u, \quad \sigma_2(x, u, 1) - \sigma_2(x, 0, 1) \geqslant -q(x) u,$$
$$\sigma_1(x, 1, 1) - \sigma_2(x, 1, 0) \leqslant l(x), \quad \sigma_2(x, 1, v) - \sigma_2(x, 1, 0) \geqslant l(x) v;$$

4) в области S $f \in \overline{\mathrm{Osg}}_{(y, \cdot)}(\sigma_1(x, \cdot, \cdot))$, $g \in \underline{\mathrm{Osg}}_{(z, \cdot)}(\sigma_2(x, \cdot, \cdot))$.

Теорема 3. *Пусть для системы* (1) *выполняется условие* 3, *а также условия теоремы* 1 *или* 2. *Если сходится интеграл*

$$\int_{+0} \sigma_1(x, 1, 1) \, dx < +\infty, \tag{18}$$

то

1) *область* (6) *является асимптотической воронкой для* $\mathfrak{M}$;
2) $\dim \mathfrak{M}_{x_0} = n - k + 1$;
3) *интегральное* O-*многообразие* $\mathfrak{M}_{x_0}$ *представимо в виде*

$$y = h(x) g^{(1)}(x, z), \quad g^{(1)} \in \mathbb{C}(\mathfrak{N}), \tag{19}$$

$$\| g^{(1)}(x, z_2) - g^{(1)}(x, z_1) \| < \| z_2 - z_1 \|, \tag{20}$$

где $\mathfrak{N} = \{(x, z) : x \in I_{x_0}, \| z \| \in I_c\}$.

Доказательство. Согласно теоремам 1 и 2 $\forall \bar{x} \in I_{x_0} \forall \| \bar{z} \| \in I_c \exists \bar{y} : (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathfrak{M}(\Omega)$. Допустим, что $(\bar{x}, \bar{\bar{y}}, \bar{z}) \in \mathfrak{M}_{x_0}$, $\bar{\bar{y}} \neq \bar{y}$. Рассмотрим два O-решения $w_1(x) = \mathrm{colon}(y_1(x), z_1(x))$, $w_2(x) = \mathrm{colon}(y_2(x), z_2(x))$, удовлетворяющие начальным условиям $y_1(\bar{x}) = \bar{y}$, $z_1(\bar{x}) = \bar{z}$; $y_2(\bar{x}) = \bar{\bar{y}}$, $z_2(\bar{x}) = \bar{z}$.

Обозначим $\theta(x) = \| y_2(x) - y_1(x) \|^2 - \| z_2(x) - z_1(x) \|^2$, и, учитывая, что $\theta(\bar{x}) = \| \bar{\bar{y}} - \bar{y} \|^2 > 0$, положим $x^* = \inf\{x : \theta(s) > 0,\ s \in [x; \bar{x}]\} \geqslant 0$.

Докажем, что $x^* = 0$. Действительно, в интервале $]x^*; \bar{x}]$ выполняется неравенство

$$\| z_2(x) - z_1(x) \| < \| y_2(x) - y_1(x) \|. \tag{21}$$

В силу системы (1) и из условия 3.4 следует

$$\frac{1}{2}\theta'(x) \leqslant \sigma_1(x, \| y_2(x) - y_1(x) \|^2, \| z_2(x) - z_1(x) \|^2) - \sigma_1(x, \| y_2(x) -$$

$$- y_1(x) \|^2, \| z_2(x) - z_1(x) \|^2) \leqslant \sigma_1(x, \| y_2(x) - y_1(x) \|^2, \| y_2(x) - y_1(x) \|^2) -$$

$$- \sigma_2(x, \| y_2(x) - y_1(x) \|^2, \| z_2(x) - z_1(x) \|^2) \leqslant \| y_2(x) - y_1(x) \|^2 \sigma_1(x, 1, 1) -$$

$$- \| z_2(x) - z_1(x) \|^2 l(x) - \| y_2(x) - y_1(x) \|^2 \sigma_2(x, 1, 0) = \| y_2(x) -$$

$$- y_1(x) \|^2 [\sigma_1(x, 1, 1) - \sigma_2(x, 1, 0)] - \| z_2(x) - z_1(x) \|^2 l(x) \leqslant l(x)\theta(x).$$

Итак, $\theta'(x) \leqslant 2l(x)\theta(x)$.

Очевидно, что $\theta(x^*) = 0$. Интегрируя полученное неравенство от x^* до $\bar{x}$ и применяя лемму Гронуолла в случае $x^* > 0$, находим $\theta(x) \equiv 0$. Это противоречит неравенству $\theta(\bar{x}) > 0$.

Таким образом, $x^* = 0$ и неравенство (21) справедливо в интервале $I_{\bar{x}}$. Используя это, в силу условий 3.1, 3.2 находим

$$\frac{d\| y_2(x) - y_1(x) \|^2}{dx} \leqslant 2\sigma_1(x, \| y_2(x) - y_1(x) \|^2, \| z_2(x) - z_1(x) \|^2) \leqslant$$

$$\leqslant 2\sigma_1(x, 1, 1) \| y_2(x) - y_1(x) \|^2.$$

Из сходимости интеграла (18) и известной леммы Гронуолла легко вывести, что $\| y_2(x) - y_1(x) \| \to 0$, когда $x \to +0$.

Итак, доказана однозначность отображения $(x, z) \in \mathfrak{N} \mapsto (x, g(x, z), z) \in \mathfrak{M}_{x_0} = \mathfrak{M}(\Omega)$. Это отображение непрерывно в силу интегральной непрерывности и имеет однозначное обратное отображение.

Таким образом, множества $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}_{x_0}$ гомеоморфны, а потому $\dim \mathfrak{M}_{x_0} = n - k + 1$, и множество $\mathfrak{M}_{x_0}$ представимо в виде $y = g(x, z)$, $g \in \mathbb{C}(\mathfrak{N})$.

Поскольку $\mathfrak{M}_{x_0} = \mathfrak{M}(\Omega) \subset \Omega$, то $\| y \| = \| g(x, z) \| < h(x) \| z \|$. Обозначим $g^{(1)}(x, z) = g(x, z)/h(x)$, тогда получаем представление для $\mathfrak{M}_{x_0}$ в виде (19).

Убедимся в справедливости условия Липшица (20). Пусть $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \in \mathfrak{M}_{x_0}$. Рассмотрим интегральную O-кривую $(x, y_1(x), z_1(x))$, проходящую через точку $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Сделав в системе (1) замену

$$Y = y - y_1(x), \quad Z = z - z_1(x), \tag{22}$$

получим систему

$$\begin{aligned} Y' &= f(x, Y + y_1(x),\ Z + z_1(x)) - f(x, y_1(x),\ z_1(x)) \equiv F(x, Y, Z), \\ Z' &= g(x, Y + y_1(x),\ Z + z_1(x)) - g(x, y_1(x), z_1(x)) \equiv G(x, Y, Z). \end{aligned} \tag{23}$$

Нетрудно установить, что $F \in \overline{\operatorname{osg}}_{\langle Y,\cdot\rangle}(\sigma_1(x, \cdot, \cdot))$, $G \in \underline{\operatorname{osg}}_{\langle Z,\cdot\rangle}(\sigma_2(x, \cdot, \cdot))$. Действительно, в силу (22), (23) и условия 3.4

$$\langle Y, F(x, Y, Z)\rangle = \langle y - y_1(x), f(x, y, z) - f(x, y_1(x), z_1(x))\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_1(x, \| y - y_1(x) \|^2, \| z - z_1(x) \|^2) = \sigma_1(x, \| Y \|^2, \| Z \|^2).$$

Аналогично $\langle Z, G(x, Y, Z)\rangle \geqslant \sigma_2(x, \| Y \|^2, \| Z \|^2)$.

Итак, условие 3 обеспечивает для системы (23) выполнение условия 2 в области $D = \{(x, Y, Z) : x \in I_a,\ \| Y \| \in \mathcal{I}_{2b},\ \| Z \| \in \mathcal{I}_{2c}\}$.

Так как справедливы условия одной из теорем 1 или 2, то $\forall \bar{x} \in I_{x_0} \forall$ $\forall \| Z_0 \| = \| \bar{\bar{z}} - \bar{z} \| \in I_{2c} \exists Y_0, \| Y_0 \| \in I_{2b}$ такое, что $\| Y (x; \bar{x}, Y_0, Z_0) \| <$ $< h(x) \| Z(x; \bar{x}, Y_0, Z_0) \|$, $x \in I_{\bar{x}}$. В частности, при $x = \bar{x}$ получаем

$$\| y_0 \| < h(\bar{x}) \| Z_0 \| = h(\bar{x}) \| \bar{\bar{z}} - \bar{z} \|. \tag{24}$$

В силу замены (22) имеем O-решение $y_2(x) = Y(x; \bar{x}, Y_0, Z_0) + y_1(x)$, $z_2(x) =$ $= Z(x; \bar{x}, Y_0, Z_0) + z_1(x)$ системы (1), удовлетворяющее начальным условиям $y_2(\bar{x}) = Y_0 + \bar{y}$, $z_2(\bar{x}) = Z_0 + \bar{z} = \bar{\bar{z}}$.

По первой части теоремы $y_2(\bar{z}) = Y_0 + \bar{y} = h(\bar{x}) g^{(1)}(\bar{x}; \bar{\bar{z}})$, $y_1(\bar{x}) = \bar{y} =$ $= h(\bar{x}) g^{(1)}(\bar{x}, \bar{z})$. Отсюда находим $\| y_0 \| = \| h(\bar{x}) g^{(1)}(\bar{x}, \bar{\bar{z}}) - h(\bar{x}) g^{(1)}(\bar{x}, \bar{z}) \| <$ $< h(\bar{x}) \| \bar{\bar{z}} - \bar{z} \|$, и в силу произвольности $\bar{x}$ получаем (20). Теорема доказана.

1. *Андреев А. Ф.* Об исключительном направлении системы n-го порядка в точке покоя // Дифференц. уравнения.— 1974.— **10**, № 2.— С. 187—194.
2. *Бодунов Н. А.* О многообразиях O-кривых многомерных систем // Там же.— 1975.— **11**, № 5.— С. 914—917.
3. *Норкин С. К.* О размерности множества, покрытого интегральными кривыми, примыкающими к особой точке многомерной системы // Укр. мат. журн.— 1978.— **30**, № 4.— С. 563—569.
4. *Норкин С. К.* Об асимптотической оценке O-решений многомерной системы // Дифференц. уравнения.— 1978.— **14**, № 11.— С. 2079—2081.
5. *Норкин С. К.* Асимптотика решений, покрывающих интегральное O-множество одной нелинейной системы // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 5.— С. 636—641

Одес. политехн. ин-т

Получено 05.11.84