УДК 517.55

В. И. Горбайчук

Об обратных теоремах приближения гармоническими функциями

В обратных теоремах теории приближения функций устанавливается степень гладкости функций в зависимости от скорости стремления ее приближений к нулю. В классической постановке приближение осуществляется с помощью тригонометрических и алгебраических полиномов. Применяются и другие аппараты приближения. В частности, в работах [1—4] рассматривались оценки приближения непрерывных 2π-периодических функций интегралами Пуассона, построенными по этим функциям. Полученные при этом оценки являются прямыми теоремами приближения функций решениями задачи Дирихле в круге (гармоническими функциями). В [5, 6] рассмотрена обратная задача: по заданной скорости уклонения решения задачи Дирихле от ее граничного значения установлены свойства граничного значения. Аналогичный вопрос рассмотрен в [7, 8] в случае решений уравнения $\Delta u - c^2 u = 0$ в полуплоскости.

В настоящей работе исследования [5—8] по обратным теоремам дополнены указанием таких свойств приближения функции $f(x)$ гармоническими функциями $u_f(x, y)$, которые обеспечивают существование непрерывной производной $f^r(x)$ граничного значения. Будем пользоваться определением и свойствами интегрального модуля гладкости [9, с. 115].

1. Обозначим через L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, класс функций $f(x)$, интегрируемых на $\mathbb{R} =]-\infty, \infty[$ с конечной нормой, определяемой соотношениями

$$\| f \| = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} | f(u) |^p du \right\}^{1/p}, \text{ если } 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\| f \| = \operatorname*{ess\,sup}_{-\infty < x < \infty} | f(x) |, \text{ если } p = +\infty.$$

Кроме того, обозначим через $u_f(x, y)$ решение краевой задачи

$$\Delta u = 0, \tag{1}$$

$$u|_{y=0} = f(x), \tag{2}$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа, $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, — заданная функция, принадлежащая классу L_p, $p \geqslant 1$. Тогда, как известно,

$$u_f(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + y^2} dt. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $f \in L_p$, $p \geqslant 1$. Если для $y > 0$ и фиксированных целых неотрицательных r выполняется условие*

$$\| u_f(\cdot, y) - f(\cdot) \| \leqslant A y^r \omega(y), \quad A = \text{const} > 0, \tag{4}$$

где $\omega(y)$, $y>0$, *— функция типа модуля непрерывности второго порядка, удовлетворяющая при* $r\geqslant 1$ *условию Дини*

$$\int_0^1 \frac{\omega(u)}{u}\,du<\infty, \tag{5}$$

то функция $f(x)$ *почти всюду на* $(-\infty,\infty)$ *совпадает с функцией, имеющей абсолютно непрерывную производную* $f^{(r-1)}(x)$ *и производную* $f^{(r)}(x)$, *принадлежащую* L_p, $p\geqslant 1$ *(при* $p=+\infty$ *непрерывную), и интегральный модуль гладкости* $\omega_2(f^{(r)};t)$ *удовлетворяет соотношению*

$$\omega_2(f^{(r)};t)\leqslant\begin{cases} A_1t^2\displaystyle\int_t^1\frac{\omega(u)}{u^3}\,du, & \text{если } r=0;\\[2ex] A_2\left[\displaystyle\int_0^t\frac{\omega(u)}{u}\,du+t^2\int_t^1\frac{\omega(u)}{u^3}\,du\right], & \text{если } r\geqslant 1,\end{cases} \tag{6}$$

$0<t\leqslant 1/2$, *где* A_1, A_2 *— положительные постоянные, не зависящие от* (>0).

Доказательство. Учитывая специфику оператора $u_f(x,y)$ как аппарата приближения, обоснование утверждения будем проводить известным методом С. Н. Бернштейна. Рассмотрим два случая.

1. Пусть $r=0$. Следуя [10], будем говорить, что оператор $u_f(x,y)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$ (и писать $u_f\in\mathcal{B}$), если $u_f(x,y)$ обладает свойствами:

α) $u_{f+g}(x,y)=u_f(x,y)+u_g(x,y)$;

β) $u_{u_{f(\cdot,y_1)}}(x,y_2)=u_{u_{f(\cdot,y_2)}}(x,y_1)$;

γ) $u_f(x,y)$ является в области $y>0$, $-\infty<x<\infty$, дважды непрерывно дифференцируемой по x функцией и выполняется неравенство типа С. Н. Бернштейна $\|\partial^2u_f(x,y)/\partial x^2\|\leqslant M\|f\|/y^2$, $y>0$, $M=\mathrm{const}>0$.

Если $f\in L_p$, $p\geqslant 1$, и для оператора $u_f(x,y)$, определенного равенством (3), справедливо соотношение $u_f\in\mathcal{B}$, то при $r=0$ неравенство (6) является непосредственным следствием теоремы 3 работы [10].

Докажем включение $u_f\in\mathcal{B}$.

Свойство α) очевидно. Докажем свойство β). Имеем

$$u_{u_{f(t,y_2)}}(x,y_1)=\frac{y_1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\dfrac{y_2}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^2+y_2^2}\,d\tau}{(x-t)^2+y_1^2}\,dt=$$

$$=\frac{y_1y_2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{[(t-\tau)^2+y_2^2]\,[(x-t)^2+y_1^2]}\,d\tau, \tag{7}$$

$$u_{u_{f(t,y_1)}}(x,y_2)=\frac{y_2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\dfrac{y_1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^2+y_1^2}\,d\tau}{(x-t)^2+y_2^2}\,dt=$$

$$=\frac{y_1y_2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{[(t-\tau)^2+y_1^2]\,[(x-t)^2+y_2^2]}\,d\tau. \tag{8}$$

Проводя во внутренних интегралах в (7) и (8) замену $t = u + (\tau + x)/2$ и полагая $v = (\tau - x)/2$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{[(u-v)^2 + y_2^2]\,[(u+v)^2 + y_1^2]} - \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{[(u-v)^2 + y_1^2]\,[(u+v)^2 + y_2^2]} =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(y_2^2 - y_1^2)(-4uv)}{[(u-v)^2 + y_2^2]\,[(u+v)^2 + y_1^2]\,[(u-v)^2 + y_1^2]\,[(u+v)^2 + y_2^2]}\, du = 0,$$

так как подынтегральная функция является нечетной по u. Свойство β) доказано.

Свойство γ) следует при $r = 2$ из такого общего утверждения.

Лемма 1. *Если $f \in L_p$, $p \geqslant 1$, и оператор u_f определен равенством* (3), *то для произвольных натуральных r выполняется неравенство*

$$\| \partial^r u_f(x, y)/\partial x^r \| \leqslant M \| f \| / y^r, \quad y > 0, \tag{9}$$

где $M > 0$ — постоянная, не зависящая от y.

При доказательстве леммы используется дифференцирование по параметру x интеграла $u_f(x, y)$, а также и элементарные вычисления с применением обобщенного неравенства Минковского [9, с. 601] и известных соотношений [11, с. 309]:

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(x^2 + y^2)^n}\, dx = \frac{(2m-1)!!\,(2n-2m-3)!\,\pi}{2\,(2n-2)!!\;(y^2)^{n-m-1}\, y}, \quad y > 0, \quad n > m + 1,$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(x^2 + y^2)^n}\, dx = \frac{m!\,(n-m-2)!}{2\,(n-1)!\,(y^2)^{n-m-1}}, \quad y > 0, \quad n > m + 1 \geqslant 1.$$

Для случая $r = 0$ теорема доказана.

2. Пусть $r \geqslant 1$. Для фиксированного $l > 0$ рассмотрим равенство

$$f(x) = u_f(x, l/2) + \sum_{j=1}^{N-1} [u_f(x, l/2^{j+1}) - u_f(x, l/2^j)] + [f(x) - u_f(x, l/2^N)]. \tag{10}$$

Из (10), используя (4), сходимость в среднем с показателем $p \geqslant 1$ функционального ряда и теорему Ф. Рисса, приходим к выводу, что почти для всех $x \in (-\infty, \infty)$ справедливо равенство

$$f(x) = u_f(x, l/2) + \sum_{j=1}^{\infty} [u_f(x, l/2^{j+1}) - u_f(x, l/2^j)]. \tag{11}$$

При $p = +\infty$ ряд (11) сходится равномерно к непрерывной функции $f(x)$.

Рассмотрим ряд

$$u_f^{(r)}(x, l/2) + \sum_{j=1}^{\infty} [u_f^{(r)}(x, l/2^{j+1}) - u_f^{(r)}(x, l/2^j)], \tag{12}$$

составленный из производных порядка r членов ряда (11). Пользуясь свойствами α) и β), неравенством (9) и условием (4), получаем

$$\| u_f^{(r)}(\cdot, l/2^{j+1}) - u_f^{(r)}(\cdot, l/2^j) \| = \| u^{(r)}_{f - u_f(\cdot, l/2^j)}(\cdot, l/2^{j+1}) -$$

$$- u^{(r)}_{f - u_f(\cdot, l/2^{j+1})}(\cdot, l/2^j) \| \leqslant \| u^{(r)}_{f - u_f(\cdot, l/2^j)}(\cdot, l/2^{j+1}) \| + \| u^{(r)}_{f - u_f(\cdot, l/2^{j+1})}(\cdot, l/2^j) \| \leqslant$$

$$\leqslant M \left(\frac{\| f - u_f(\cdot, l/2^j) \|}{(l/2^{j+1})^r} + \frac{\| f - u_f(\cdot, l/2^{j+1}) \|}{(l/2^j)^r} \right) \leqslant$$

$$\leqslant MA \left(\frac{(l/2^j)^r \omega(l/2^j)}{(l/2^{j+1})^r} + \frac{(l/2^{j+1})^r \omega(l/2^{j+1})}{(l/2^j)^r} \right) \leqslant M(r, l)\, \omega(1/2^j), \tag{13}$$

где $M(r, l) > 0$ — постоянная, зависящая от r, l и независящая от j. Так как при всех $j = 1, 2, \ldots$ верна оценка

$$\int_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \frac{\omega(u)}{u}\, du \geqslant \frac{1}{2}\,\omega(1/2^j),$$

то из (13) имеем

$$\| u_f^{(r)}(\cdot, l/2^{j+1}) - u_f^{(r)}(\cdot, l/2^j) \| \leqslant 2M(r, l) \int_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \frac{\omega(u)}{u}\, du, \tag{14}$$

и поскольку в силу условия (5) сходится ряд

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{2^{-j}}^{2^{-(j-1)}} \frac{\omega(u)}{u}\, du = \int_0^1 \frac{\omega(u)}{u}\, du,$$

то ряд (12) сходится на $(-\infty, \infty)$ в среднем в смысле метрики L_p (при $p = +\infty$ сходимость равномерная). По теореме Ф. Рисса существует подпоследовательность $S_{n_m}^{(k)}(f; x)$ частичных сумм ряда (12), которая при всех $k = 1, 2, \ldots, r$ сходится почти всюду к некоторой функции $f_k(x)$ из класса L_p. Считая, что x_0 — одна из точек сходимости при всех $k = 1, 2, \ldots, r$, рассмотрим равенство

$$\left\| f_{k-1}(x) - f_{k-1}(x_0) - \int_{x_0}^{x} f_k(t)\, dt \right\| = \left\| f_{k-1}(x) - S_{n_m}^{(k-1)}(f; x) - f_{k-1}(x_0) + \right.$$

$$\left. + S_{n_m}^{(k-1)}(f; x_0) - \int_{x_0}^{x} [f_k(t) - S_{n_m}^{(k)}(f; t)]\, dt \right\|,$$

из которого, используя свойство плотности множества финитных функций в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$, $p \geqslant 1$, при $m \to \infty$ получаем, что почти для всех $x \in (-\infty, \infty)$ при $k = 1, 2, \ldots, r$ имеем $f_{k-1}(x) - f_{k-1}(x_0) = \int_{x_0}^{x} f_k(t)\, dt$. И поскольку почти всюду $f_0(x) = f(x)$, то $f(x)$ почти всюду на $(-\infty, \infty)$ совпадает с функцией, имеющей абсолютно непрерывную производную $(r - 1)$-го порядка и производную порядка r $f^{(r)}(x) = f_r(x) \in L_p$, которая является пределом в среднем последовательности $S_n^{(r)}(f; x)$. Этим доказано, что почти для всех $x \in (-\infty, \infty)$ справедливо равенство

$$f^{(r)}(x) = u_f^{(r)}(x, l/2) + \sum_{j=1}^{\infty} [u_f^{(r)}(x, l/2^{j+1}) - u_f^{(r)}(x, l/2^j)].$$

Оценим интегральный модуль непрерывности второго порядка этой производной (случай $p = +\infty$ рассматривается аналогично). Для этого отметим сначала, что аналогично предыдущему обосновывается верное почти для всех $x \in (-\infty, \infty)$ равенство

$$f^{(r)}(x) = u_f^{(r)}(x, l/2^j) + \sum_{k=j+1}^{\infty} [u_f^{(r)}(x, l/2^k) - u_f^{(r)}(x, l/2^{k-1})],$$

из которого, используя (14), получаем

$$\| f^{(r)}(\cdot) - u_f^{(r)}(\cdot, l/2^j) \| \leqslant \sum_{k=j+1}^{\infty} \| u_f^{(r)}(\cdot, l/2^k) - u_f^{(r)}(\cdot, l/2^{k-1}) \| \leqslant$$

$$\leqslant 2M(r,l)\sum_{k=j+1}^{\infty}\int\limits_{2^{-(k-1)}}^{2^{-(k-2)}}\frac{\omega(u)}{u}\,du = 2M(r,l)\int\limits_{0}^{2^{-(j-1)}}\frac{\omega(u)}{u}\,du \leqslant$$

$$\leqslant 8M(r,l)\int\limits_{0}^{2^{-j}}\frac{\omega(u)}{u}\,du. \qquad (15)$$

Поскольку функция $\Omega(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \int\limits_0^t \frac{\omega(u)}{u}\,du$ обладает всеми свойствами модуля непрерывности второго порядка, то неравенство (15) позволяет считать, что задано оценку уклонения $f^{(r)}(x)$ от оператора $u_f^{(r)}(x, l/2^j)$ в интегральной метрике, а потому на основании случая $r = 0$ убеждаемся, что

$$\omega_2(f^{(r)}; t) \leqslant Ct^2 \int\limits_t^1 \frac{\Omega(u)}{u^3}\,du, \quad C = \mathrm{const} > 0.$$

Преобразование правой части последнего неравенства приводит к оценке (6) при $r \geqslant 1$. Теорема полностью доказана.

2. Обозначим через $u_g(\varphi, r)$ решение в единичном круге краевой задачи

$$\Delta u = 0, \qquad (16)$$

$$u|_{r=1} = g(\varphi), \qquad (17)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$ — оператор Лапласа в полярных координатах, $g(\varphi)$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, — заданная функция, принадлежащая классу $L_p[-\pi, \pi]$, $p \geqslant 1$. Обозначим через $L_p[-\pi, \pi]$, $p \geqslant 1$, класс 2π-периодических функций $g(\varphi)$, $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, с конечной нормой, определяемой соотношениями

$$\|g\| = \left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |g(\varphi)|^p d\varphi\right\}^{1/p}, \text{ если } 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|g\| = \operatorname*{ess\,sup}_{-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi} |g(\varphi)|, \text{ если } p = +\infty.$$

Известно, что решение задачи (16), (17) представляется в виде

$$u_g(\varphi, r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(\tau)\,\frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(\tau - \varphi) + r^2}\,d\tau. \qquad (18)$$

Теорема 2. *Пусть $g \in L_p[-\pi, \pi]$, $p \geqslant 1$. Если для фиксированных целых неотрицательных k выполнено условие*

$$\|u_g(\cdot, r) - g(\cdot)\| \leqslant A(1-r)^k\omega(1-r), \quad A = \mathrm{const} > 0, \quad 0 \leqslant r < 1,$$

где $\omega(t)$, $t > 0$, — та же функция, что и в теореме 1, то функция $g(\varphi)$ почти всюду на $[-\pi, \pi]$ совпадает с функцией, имеющей абсолютно непрерывную производную $g^{(k-1)}(\varphi)$ и производную $g^{(k)} \in L_p[-\pi, \pi]$, $p \geqslant 1$ (при $p = +\infty$ непрерывную), и интегральный модуль гладкости $\omega_2(g^{(k)}; 1-r)$ удовлетворяет соотношению

$$\omega_2(g^{(k)}; 1-r) \leqslant \begin{cases} B_1(1-r)^2 \int\limits_{1-r}^{1} \frac{\omega(u)}{u^3}\,du, & \text{если } k = 0; \\ B_2\left[\int\limits_0^{1-r} \frac{\omega(u)}{u}\,du + (1-r)^2\int\limits_{1-r}^{1}\frac{\omega(u)}{u^3}\,du\right], & \text{если } k \geqslant 1, \end{cases}$$

$1/2 \leqslant r < 1$, *где B_1, B_2 — положительные постоянные, не зависящие от r.*

Замечание. В случае $k=0$ теорема получена в [6].

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1. При этом используются такие вспомогательные утверждения.

Лемма 2. *Если $g \in L_p[-\pi, \pi]$, $p \geqslant 1$, то для оператора* (18) *при фиксированных r_1 и r_2 ($0<r_1<1$, $0<r_2<1$) справедливо тождество*

$$u_{g-u_{g(\cdot,r_1)}}(\varphi, r_2) - u_{g-u_{g(\cdot,r_2)}}(\varphi, r_1) = u_g(\varphi, r_2) - u_g(\varphi, r_1).$$

Лемма 3. *Если $g \in L_p[-\pi, \pi]$, $p \geqslant 1$, то для оператора $u_g(\varphi, r)$ при произвольных фиксированных целых неотрицательных k выполняются оценки*

$$\| \partial^k u_g(\varphi, r)/\partial\varphi^k \| \leqslant M_1 \| g \|/(1-r)^k, \quad 0 \leqslant r < 1,$$

где $M_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от r.

В доказательстве леммы 2 используются линейность оператора $u_g(\varphi, r)$ и тождество $u_{u_{g(\cdot,r_1)}}(\varphi, r_2) = u_{u_{g(\cdot,r_2)}}(\varphi, r_1)$, которое доказывается аналогично свойству β) в теореме 1.

Лемма 3 следует из неравенства

$$\left\| \frac{\partial^k u_g(\varphi, r)}{\partial\varphi^k} \right\| \leqslant \frac{\| g \|}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial^k}{\partial\tau^k} \left(\frac{1-r^2}{1-2r\cos\tau + r^2} \right) \right| d\tau,$$

представления ядра Пуассона

$$P_r(\tau) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos\tau+r^2} = -1 + \frac{1}{1-re^{i\tau}} + \frac{1}{1-re^{-i\tau}}$$

и его производной по τ порядка k, $k = 1, 2, \ldots$,

$$\frac{\partial^k P_r(\tau)}{\partial\tau^k} = r(i)^k \left[\frac{e^{i\tau} Q_{k-1}^{(1)}(r, e^{i\tau})}{(1-re^{i\tau})^{k+1}} + \frac{e^{-i\tau} Q_{k-1}^{(2)}(r, e^{-i\tau})}{(1-re^{-i\tau})^{k+1}} \right],$$

где $Q_{k-1}^{(1)}(r, e^{i\tau})$, $Q_{k-1}^{(2)}(r, e^{-i\tau})$ — многочлены степени $k-1$ по каждому из указанных аргументов. Эти многочлены ограничены в замкнутом круге $0 \leqslant r \leqslant 1$ константой, зависящей только от степени многочлена.

3. Аналогичная обратная теорема приближения получена для решений $u = u(x, y)$ краевой задачи $\Delta u - c^2 u = 0$, $u|_{x=0} = f(y)$, $-\infty < y < \infty$, в полуплоскости $x > 0$, где Δ — оператор Лапласа, $c > 0$ — постоянная. Эта теорема дополняет теорему 3 работы [8].

1. *Натансон И. П.* О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции при помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР.— 1950.— 72, № 1.— С. 11—14.
2. *Тиман А. Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемых функций интегралами Пуассона // Там же.— 1950.— 74, № 1. — С. 17—20.
3. *Геронимус Я. Л.* О порядке приближения посредством интеграла Пуассона // Там же.— 1959.— 129, № 4.— С. 726—728.
4. *Тиман М. Ф.* Отклонение гармонических функций от их значений на границе и наилучшее приближение // Там же.— 1962.— 145, № 5.— С. 1008—1009.
5. *Горбайчук В. И., Задерей П. В.* О некоторых граничных свойствах гармонических в полосе функций // Мат. заметки.— 1975.— 18, № 2.— С. 169—178.
6. *Горбайчук В. И., Задерей П. В.* Свойства решений задачи Дирихле для круга и полосы // Математический сборник.— Киев : Наук. думка, 1976.— С. 64—68.
7. *Горбайчук В. И., Лукиянчук М. В.* Граничные свойства решений уравнения $\Delta u - c^2 u = 0$ в полуплоскости // Моногенные функции и отображения.— Киев : Наук. думка, 1982.— С. 75—81.
8. *Горбайчук В. И., Лукиянчук М. В.* Изучение некоторых граничных свойств решений уравнения $\Delta u - c^2 u = 0$ в полуплоскости // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 6.— С. 681—688.
9. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного.— М.: Физматгиз, 1960.— 624 с.
10. *Горбайчук В. И.* Прямые и обратные теоремы приближений решениями краевых задач для некоторых эллиптических уравнений // Теория приближения функций: Тр. Междунар. конф. по теории приближения функций.— М.: Наука, 1977.— С. 126—128.
11. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1963.— 1100 с.

Луцк. пед. ин-т

Получено 25.10.84,
после доработки — 23.09.85