УДК 519.21

В. С. Королюк, А. В. Свищук

Центральная предельная теорема для полумарковских случайных эволюций

Случайные эволюции представляют собой операторнозначные случайные процессы [1] и являются абстрактной моделью переключаемых случайных процессов, в частности сумм случайных величин и аддитивных функционалов от марковских и полумарковских процессов [2—5].

Изучению сумм случайных величин на цепях Маркова и аддитивных функционалов от марковских процессов посвящено большое количество работ.

Определение и формулировка результатов. Пусть на измеримом фазовом пространстве $(X, \mathfrak{X})$ со счетно-порожденной σ-алгеброй $\mathfrak{X}$ задан полумарковский процесс $\varkappa(t)$, построенный по процессу марковского восстановления $\{x_n, \theta_n;\ n \geqslant 0\}$ с полумарковским ядром $Q(x, A, t)$, причем $P(x, A) := Q(x, A, +\infty)$ — переходные вероятности вложенной цепи Маркова (ВЦМ) $\{x_n;\ n \geqslant 0\}$, $G_x(t) := Q(x, X, t)$ — распределение времен пребывания в состояниях, $x \in X$, $A \in \mathfrak{X}$, $t \geqslant 0$.

На сепарабельном банаховом пространстве B функций рассмотрим семейство $\{\Gamma^{\varepsilon}_x(t);\ x \in X,\ t \geqslant 0\}$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, сильно непрерывных сжимающих полугрупп операторов и соответствующую этому семейству совокупность производящих операторов $\{\Gamma^{\varepsilon}(x);\ x \in X\}$, допускающих асимптотическое разложение вида

$$\Gamma^{\varepsilon}(x) f = \Gamma_1(x) f + \varepsilon \Gamma_2(x) f + o(\varepsilon) \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{1}$$

где $f \in B_0$ — плотная в B и не зависящая от x общая область определения операторов $\Gamma_i(x)$, $i = 1, 2$; $o(\varepsilon)/\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\to} 0$ в сильном смысле. Задано также семейство ограниченных операторов $\{D^{\varepsilon}(x);\ x \in X\}$ на B, допускающих асимптотическое разложение вида

$$D^{\varepsilon}(x) f = f + \varepsilon D_1(x) f + \varepsilon^2 D_2(x) f + o(\varepsilon^2) \tag{2}$$

при $\varepsilon \to 0$, где $\{D_i(x);\ x \in X,\ i = 1, 2\}$ — совокупность замкнутых линейных операторов с областью определения B_0.

Разрывная полумарковская случайная эволюция (ПМСЭ) $V^d_{\varepsilon}(t)$ задается по ПМП $\varkappa(t)$, семействам $\{\Gamma^{\varepsilon}_x(t);\ x \in X,\ t \geqslant 0\}$ и $\{D^{\varepsilon}(x);\ x \in X\}$ соотношением

$$V_\varepsilon^d(t) = \Gamma_{x_0}^\varepsilon(\varepsilon\theta_1) D^\varepsilon(x_1) \Gamma_{x_1}^\varepsilon(\varepsilon\theta_2) D^\varepsilon(x_2) \ldots$$
$$\ldots D^\varepsilon(x_{\nu(t/\varepsilon^2)}) \Gamma^\varepsilon_{x_{\nu(t/\varepsilon^2)}}(t/\varepsilon - \varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon^2)}), \tag{3}$$
$$\tau_n = \sum_{k=1}^n \theta_k, \ \ \nu(t) = \max\{n : \tau_n \leqslant t\}.$$

Предполагается, что ВЦМ $\{x_n;\ n \geqslant 0\}$ равномерно эргодична со стационарным распределением $\rho(A)$, $A \in \mathfrak{X}$, а распределения времен пребывания в состояниях имеют равномерно ограниченные первые два момента:

$$m(x) = \int_0^\infty t G_x(dt), \quad m_2(x) = \int_0^\infty t^2 G_x(dt).$$

Теорема. *В предположении, что*

$$\int_X \rho(dx)\,[m(x)\Gamma_1(x) + D_1(x)]\,f = 0 \quad \forall f \in B_0,$$

справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda t} M_x\,[V_\varepsilon^d(t)\,f(\varkappa(t/\varepsilon^2))]\,dt = [\lambda I - m^{-1}L_d]^{-1}\hat{f}.$$

Здесь

$$L_d = \int_X \rho(dx)\,[m(x)\Gamma_1(x) + PD_1(x)]\,R_0\,[m(x)\Gamma_1(x) + PD_1(x)] +$$
$$+ \int_X \rho(dx)\,m(x)\Gamma_1(x)PD_1(x) + \int_X \rho(dx)\,D_2(x) +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_X \rho(dx)\,m_2(x)\Gamma_1^2(x) + \int_X \rho(dx)\,m(x)\Gamma_2(x), \ \ Pf(x) = \int_X P(x, dy)\,f(y), \tag{4}$$

$\hat{f} = m^{-1}\int_X \rho(dx)\,m(x)\,f(x)$, $m = \int_X \rho(dx)\,m(x)$, I — *единичный оператор*, R_0 — *потенциал цепи* $\{x_n;\ n \geqslant 0\}$ [6].

Непрерывная ПМСЭ $V_\varepsilon^c(t)$ задается по ПМП $\varkappa(t)$ и семейству $\{\Gamma_x^\varepsilon(t);\ x \in X,\ t \geqslant 0\}$ соотношением

$$V_\varepsilon^c(t) = \Gamma_{x_0}^\varepsilon(\varepsilon\theta_1)\,\Gamma_{x_1}(\varepsilon\theta_2) \ldots \Gamma^\varepsilon_{x_{\nu(t/\varepsilon^2)}}(t/\varepsilon - \varepsilon\tau_{\nu(t/\varepsilon^2)}). \tag{5}$$

Непрерывная ПМСЭ (5) в отличие от разрывной (3) не содержит операторов скачков $\{D^\varepsilon(x);\ x \in X\}$, которые действуют на переходах ПМП $\varkappa(t)$.

Следствие 1. *В предположении, что*

$$\int_X \rho(dx)\,m(x)\,\Gamma_1(x)\,f = 0 \quad \forall f \in B_0,$$

справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty e^{-\lambda t} M_x\,[V_\varepsilon^c(t)\,f(\varkappa(t/\varepsilon^2))]\,dt = [\lambda I - m^{-1}L_c]^{-1}\hat{f},$$

где

$$L_c = \int_X \rho(dx)\,m(x)\,\Gamma_1(x)\,R_0 m(x)\,\Gamma_1(x) +$$
$$+ \frac{1}{2}\int_X \rho(dx)\,m_2(x)\,\Gamma_1^2(x) + \int_X \rho(dx)\,m(x)\,\Gamma_2(x),$$

$\hat{f}$ *определена в* (4).

Приложения. а). Процесс накопления задается уравнением [7]

$$z_t^\varepsilon = z_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^{\nu(t/\varepsilon^2)} a(x_{k-1}) - \int_0^t r(z_s^\varepsilon, \varkappa(s/\varepsilon^2))\, ds, \tag{6}$$

где z_t^ε — количество накопляемого запаса за время $[0, t]$; z_0 — начальный запас, $z_0 \in R^+$; функция $a(x): X \to R^+$ измерима и ограничена; $r(z, x): R^+ \times X \to R^+$ ограничена и измерима по x, неубывающая по z и имеет непрерывную и ограниченную производную $r_z'(z, x)$ по z, $r(0, x) \equiv 0$ $\forall x \in X$.

Определим

$$\varphi_\varepsilon(t, x) = M_x[f(z_t^\varepsilon, \varkappa(t/\varepsilon^2))], \tag{7}$$

где функция $f(z, x): R^+ \times X \to R^+$ измерима и ограничена по x, имеет ограниченную и непрерывную вторую производную f_{zz}'' по z.

Следствие 2. *В предположении, что*

$$\int_X \rho(dx)\, m(x)\, r(z, x) = \int_X \rho(dx)\, a(x) \quad \forall z \in R^+,$$

справедливо соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \varphi_\varepsilon(t, x)\, dt = [\lambda I - m^{-1} A]^{-1} \hat{f}(z),$$

где

$$A = \int_X \rho(dx)\, [a_1(x) - m(x)\, r(z, x)]\, R_0 \partial/\partial z\, [a_1(x) - m(x)\, r(z, x)]\, \partial/\partial z -$$

$$- \int_X \rho(dx)\, m(x)\, r(z, x)\, a_1(x)\, \partial^2/\partial z^2 + \frac{1}{2} \int_X \rho(dx)\, a^2(x)\, \partial^2/\partial z^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_X \rho(dx)\, m_2(x)\, r(z, x)\, r_z'(z, x)\, \partial/\partial z +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_X \rho(dx)\, m_2(x)\, r^2(z, x)\, \partial^2/\partial z^2, \quad a_1(x) = \int_X P(x, dy)\, a(y). \tag{8}$$

Для применения теоремы к процессу накопления (6) следует определить операторы $\Gamma_1(x) = -r(z, x)\, \partial/\partial z$, $\Gamma_2(x) \equiv 0$, $D_1(x) = a(x)\, \partial/\partial z$, $D_2(x) = \frac{1}{2} a^2(x)\, \partial^2/\partial z^2$ и проверить для них выполнение условия теоремы.

б). Движение частицы в случайной среде задается скоростью $v(z, x)$, $z \in R$, $x \in X$, зависящей от состояний ПМП $\varkappa(t/\varepsilon^2)$, переключающего скорость движения.

Пусть $z^\varepsilon(t)$ — положение частицы в момент времени t. Эволюция частицы описывается следующей задачей Коши:

$$dz^\varepsilon(t)/dt = v(z^\varepsilon(t), \varkappa(t/\varepsilon^2)), \quad z^\varepsilon(0) = z. \tag{9}$$

Предполагается, что функция $v(z, x): R \times X \to R$ измерима и ограничена по x, имеет ограниченную и непрерывную производную $v_z'(z, x)$ по z $\forall x \in X$.

Определим $\psi_\varepsilon(t, x) = M_x[f(z^\varepsilon(t), \varkappa(t/\varepsilon^2))]$.

Следствие 3. *Предположим, что*

$$\int_X \rho(dx)\, m(x)\, v(z, x) = 0 \quad \forall z \in R.$$

Тогда

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\infty e^{-\lambda t} \psi_\varepsilon(t, x)\, dt = [\lambda I - m^{-1} A_0]^{-1} \hat{f}(z),$$

где

$$A_0 = \int_X \rho(dx)\,[m(x)\,v(z, x)\,R_0 m(x)\,\partial/\partial z\,[v(z, x)\,\partial/\partial z]] +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_X \rho(dx)\,m_2(x)\,v^2(z, x)\,\partial^2/\partial z^2 + \frac{1}{2}\int_X \rho(dx)\,m_2(x)\,v(z, x)\,v'_z(z, x)\,\partial/\partial z. \quad (10)$$

Следствие 3 вытекает из следствия 1, если определить операторы $\Gamma_1(x) = v(z, x)\,\partial/\partial z$, $\Gamma_2(x) \equiv 0$.

Замечание 1. Процесс $z^\varepsilon(t)$, определенный в (9), при $\varepsilon \to 0$ сходится к диффузионному процессу $z(t)$, который определяется стохастическим дифференциальным уравнением

$$dz(t) = \alpha_0(z(t))\,dt + \beta_0(z(t))\,dw(t), \quad (11)$$

с коэффициентами сноса

$$\alpha_0(z) = \int_X \rho(dx)\,[m(x)\,v(z, x)\,R_0 m(x)\,v'_z(z, x) + \frac{1}{2} m_2(x)\,v(z, x)\,v'_z(z, x)]/m$$

и диффузии

$$\beta_0^2(z) = 2\int_X \rho(dx)\left[m(x)\,v(z, x)\,R_0 m(x)\,v(z, x) + \frac{1}{2}\,m_2(x)\,v^2(z, x)\right]/m.$$

Замечание 2. Для процесса накопления z_t^ε в пределе при $\varepsilon \to 0$ получаем диффузионный процесс z_t, описываемый стохастическим дифференциальным уравнением

$$dz_t = \alpha(z_t)\,dt + \beta(z_t)\,dw(t), \quad (12)$$

с коэффициентами сноса

$$\alpha(z) = \int_X \rho(dx)\Big[m(x)\,r(z, x)\,R_0 m(x)\,r'_z(z, x) - a_1(x)\,R_0 m(x)\,r'_z(z, x) +$$

$$+ \frac{1}{2}\,m_2(x)\,r(z, x)\,r'_z(z, x)\Big]/m$$

и диффузии

$$\beta^2(z) = 2\int_X \rho(dx)\Big[(a_1(x) - m(x)\,r(z, x))\,R_0\,(a_1(x) - m(x)\,r(z, x)) -$$

$$- m(x)\,r(z, x)\,a_1(x) + \frac{1}{2}\,a^2(x) + \frac{1}{2}\,m_2(x)\,r^2(z, x)\Big]/m,$$

при дополнительном условии: функция $a(x)$ является эксцессивной относительно оператора P, что обеспечивает неотрицательность коэффициента $\beta^2(z)$. Здесь $w(t)$ — стандартный винеровский процесс [8].

Доказательство теоремы. Для преобразования Лапласа от усредненной ПМСЭ

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(\lambda, x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} M_x\,[V_\varepsilon^d(t)\,f(\varkappa(t/\varepsilon^2))]\,dt$$

строим уравнение марковского восстановления

$$\tilde{\varphi}_\varepsilon(\lambda, x) - \int_X \int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon^2 s}\,\Gamma_x^\varepsilon(\varepsilon s)\,D^\varepsilon(y)\,\tilde{\varphi}_\varepsilon(\lambda, y)\,Q(x, dy, ds) =$$

$$= \varepsilon^2 \int_0^\infty e^{-\lambda\varepsilon^2 s}\,\overline{G}_x(s)\,\Gamma_x^\varepsilon(\varepsilon s)\,f(x)\,ds. \quad (13)$$

Далее находим асимптотическое представление уравнения (13):

$$[I - P - \varepsilon (m(x)\Gamma_1(x)P + PD_1(x)) + \varepsilon^2 (\lambda m(x)P - m(x)\Gamma_1(x)PD_1(x) - $$
$$- PD_2(x) - m_2(x)\Gamma_1^2(x)P/2 - m(x)\Gamma_2(x)P) + o(\varepsilon^2)]\tilde{\varphi}_\varepsilon(\lambda, x) =$$
$$= \varepsilon^2 [m(x)I + m_\varepsilon^{(1)}(\lambda)] f(x), \qquad (14)$$

где

$$m_\varepsilon^{(1)}(\lambda) f(x) = \int_0^\infty (e^{-\lambda\varepsilon^2 s} - 1)\overline{G}_x(s)\Gamma_x^\varepsilon(\varepsilon s) f(x)\, ds +$$
$$+ \int_0^\infty \overline{G}_x(s)[\Gamma_x^\varepsilon(\varepsilon s) - I] f(x)\, ds.$$

Теперь, применяя метод асимптотического обращения операторов, возмущенных на спектре [6, с. 76], следствие 3.2, учитывая, что $\int_X \rho(dx)[m(x)\times \times\Gamma_1(x) + D_1(x)] = 0$, получаем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^2 [I - P - \varepsilon(m(x)\Gamma_1(x)P + PD_1(x)) +$$
$$+ \varepsilon^2(\lambda m(x)P - m(x)\Gamma_1(x)PD_1(x) - PD_2(x) -$$
$$- m_2(x)\Gamma_1^2(x)P/2 - m(x)\Gamma_2(x)P) + o(\varepsilon^2)]^{-1} = R_\lambda^{-1}\Pi, \qquad (15)$$

где

$$R_\lambda = -\int_X \rho(dx)[m(x)\Gamma_1(x) + PD_1(x)] R_0 [m(x)\Gamma_1(x) + PD_1(x)] +$$
$$+ \lambda m - \int_X \rho(dx) m(x)\Gamma_1(x)PD_1(x) - \int_X \rho(dx) D_2(x) -$$
$$- \int_X \rho(dx) m_2(x)\Gamma_1^2(x)/2 - \int_X \rho(dx) m(x)\Gamma_2(x), \quad \Pi f(x) = \int_X \rho(dx) f(x). \qquad (16)$$

Из (14) и (16) следует доказательство теоремы.

1. *Hersh R.* Random evolutions: a survey of results and problems // Rocky Mount. J. Math.— 1974.— 4, N 3.— P. 443—475.
2. *Анисимов В. В.* Переключающиеся процессы // Кибернетика.— 1977. — № 4. — С. 111—115.
3. *Сираждинов С. Х.* Предельные теоремы для однородных цепей Маркова.— Ташкент : Изд-во АН УзССР, 1955.— 83 с.
4. *Королюк В. С., Королюк В. В.* ЦПТ для однородных процессов с независимыми приращениями с полумарковскими переключениями // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 6.— С. 760—763.
5. *Шуренков В. М.* ЦПТ для цепей Маркова // Теория вероятностей и ее применения.— 1983.— 28, № 3.— С. 607—609.
6. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем.— Киев : Наук. думка, 1978.— 217 с.
7. *Yamada K.* Diffusion approximation for storage processes with general release rules // — Math. Oper. Res.— 1984.— 9, N 3.— P. 459—470.
8. *Скороход А. В.* О существовании и единственности решений стохастических диффузионных уравнений // Сиб. мат. журн.— 1961.— 2, № 1.— С. 129—137.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 21.11.85