УДК 517.968.23:539

С. Т. Грибняк, Г. Я. Попов

Об одном обобщении уравнения Карлемана, разрешимом в явном виде, и его приложении в теории изгиба пластин

В данной работе на основе метода аналитического продолжения [1, 2] предложена схема построения в явном виде решения сингулярного интегрального уравнения

$$a(x)\left[\delta p(x)+\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\operatorname{sign}(t-x)\,U_M(t-x)\,p(t)\,dt\right]+$$

$$+\frac{b(x)}{\pi}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\frac{\delta}{t-x}+\ln|t-x|\,U_M(t-x)+V_N(t-x)\right]p(t)\,dt=f(x), \quad (1)$$

где $a^2(x)+b^2(x)\neq 0,\ x\in[\alpha_1,\alpha_2]$,

$$U_M(x)=\sum_{m=0}^{M}a_m x^m,\quad a_0\neq 0,\quad V_N(x)=\sum_{m=0}^{N}b_m x^m, \quad (2)$$

а функции $a(x),\ b(x),\ f(x)\in H(\alpha_1,\alpha_2)$. Решение $p(t)$ уравнения (1) ищем в виде

$$p(t)=(t-\alpha_1)^{-\beta_1}(\alpha_2-t)^{-\beta_2}p_0(t),\quad p_0(t)\in H(\alpha_1,\alpha_2), \quad (3)$$

где $\beta_{1,2}=\text{const},\ 0<\operatorname{Re}\beta_{1,2}<1$.

Уравнения типа (1) часто встречаются в задачах прикладного характера [14, 15].

Частные случаи уравнения (1) ранее рассматривались в [2] при $\delta=1$, $U_M(x)\equiv V_N(x)\equiv 0$, в [3—5] при $\delta=0$, $a_m=0$, $m=\overline{1,M}$, $b_m=0$, $m=\overline{0,N}$, и другим методом в [6] при $a(x)\equiv 0$.

Для построения точного решения уравнения (1) воспользуемся методом аналитического продолжения [1, 2]. С этой целью введем в рассмотрение функцию

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left\{\frac{\delta}{t-z}+\frac{1}{2}\ln\left[\left(1-\frac{\alpha_1-t}{\alpha_1-z}\right)\left(1-\frac{\alpha_2-t}{\alpha_2-z}\right)\right]U_M(t-z)+\right.$$

$$\left.+V_N(t-z)\right\}p(t)\,dt, \quad (4)$$

аналитическую и однозначную в комплексной плоскости z с разрезом по отрезку $[\alpha_1,\alpha_2]$ вещественной оси. Изучение поведения ядра интегрального представления (4) в окрестности точек $z=\alpha_1,\ \alpha_2$ и на бесконечности с учетом результатов [2] позволяет получить асимптотические формулы для функции $\Phi(z)$:

$$\Phi(z)=O\{\delta(\alpha_1-z)^{-\beta_1}(\alpha_2-z)^{-\beta_2}+\gamma\ln[(\alpha_1-z)(\alpha_2-z)]\},$$

$$z\to\alpha_1,\ \alpha_2,\quad \gamma=\text{const}, \quad (5)$$

$$\Phi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\mu_1}c_{kl}m_k z^l,\quad |z|>\max(|\alpha_1|,|\alpha_2|), \quad (6)$$

где

$$\mu_1=\max(M-1,N),\quad m_k=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}t^k p(t)\,dt. \quad (7)$$

Значения постоянных c_{kl} определяются коэффициентами многочленов $U_M(t-z)$, $V_N(t-z)$ и разложениями по переменной z функций $(t-z)^{-1}$ и $\ln[(t-z)^2/(\alpha_1-z)(\alpha_2-z)]$ в окрестности точки $z=\infty$.

Выбрав ветвь многозначной функции $\ln(t-z)=\ln|t-z|+i\arg(t-z)$ соответствующим образом [1], будем иметь

$$\begin{gathered}\ln(t-z)\to\ln|t-x|\mp\pi i \text{ при } z\to x\pm i0 \text{ для } t<x;\\ \ln(t-z)\to\ln(t-x) \text{ при } z\to x\pm i0 \text{ для } t>x.\end{gathered}\tag{8}$$

Тогда с учетом формул Сохоцкого [2] для предельных значений $\Phi^\pm(x)$ функции $\Phi(z)$ при $z\to x\pm i0$, $\alpha_1<x<\alpha_2$, получим выражения

$$\Phi^+(x)+\Phi^-(x)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[\frac{\delta}{t-x}+\ln|t-x|U_M(t-x)+V_N(t-x)\right]p(t)dt-$$

$$-\frac{\ln[(x-\alpha_1)(\alpha_2-x)]}{2\pi i}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}U_M(t-x)\,p(t)\,dt,\tag{9}$$

$$\Phi^+(x)-\Phi^-(x)=\delta p(x)+\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2}\operatorname{sign}(t-x)\,U_M(t-x)\,p(t)\,dt.\tag{10}$$

Вне сегмента $[\alpha_1, \alpha_2]$ предельные значения аналитической функции $\Phi(z)$ совпадают.

Использование формул (9), (10) позволяет свести решение уравнения (1) к решению задачи Римана на отрезке $[\alpha_1, \alpha_2]$ вещественной оси [2]

$$\Phi^+(x)=G(x)\,\Phi^-(x)+g(x),\quad \alpha_1<x<\alpha_2,\tag{11}$$

где

$$G(x)=\frac{a(x)-ib(x)}{a(x)+ib(x)},\quad g(x)=\frac{f(x)}{a(x)+ib(x)}-\frac{b(x)}{a(x)+ib(x)}\times$$

$$\times\frac{\ln[(x-\alpha_1)(\alpha_2-x)]}{2\pi i}\sum_{k=0}^{M}x^k\sum_{n=k}^{M}a_n(-1)^kC_n^km_{n-k}.\tag{12}$$

Ее решение в классе интегрируемых функций имеет вид [2]

$$\begin{gathered}\Psi(z)=\frac{\Phi(z)}{X(z)}-F(z)=P_{\mu_1+\varkappa}(z)=\sum_{k=0}^{\mu_1+\varkappa}z^k\sum_{l=0}d_{kl}m_l,\\ \nu=\begin{cases}\max(N, M+\varkappa) & \text{при } \varkappa\geqslant 0;\\ \mu+\varkappa & \text{при } \varkappa<0,\quad \mu=\max(N, M),\end{cases}\end{gathered}\tag{13}$$

$X(z)$ — каноническая функция задачи Римана (12), (5), (6), $\varkappa$—индекс задачи Римана,

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha}\frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}.\tag{14}$$

Коэффициенты d_{kl} многочлена $P_{\mu_1+\varkappa}(z)$ известны, так как он совпадает с главной частью [8] разложения функции $\Phi(z)/X(z)$ в окрестности точки $z=\infty$ ($P_{\mu_1+\varkappa}(z)\equiv 0$ при $\mu_1+\varkappa<0$).

Использование результатов теоремы 3 [8, с. 293] позволяет утверждать, что необходимым и достаточным условием аналитичности функции $\Psi(z)$ в любой конечной, ограниченной замкнутым гладким контуром области является равенство нулю коэффициентов правильной части [8] разложения функции $\Psi(z)$ в окрестности точки $z=\infty$. Следовательно, если известны разложения

$$\Phi(z)/X(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_{-k}/z^k+\sum_{k=0}^{\mu_1+\varkappa}d_k z^k,\quad |z|>\max(|\alpha_1|,|\alpha_2|), \tag{15}$$

$$F(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f_{-k}}{z^k}=-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k}\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\frac{g(t)\,t^{k-1}dt}{X^+(t)}, \tag{16}$$

то

$$\varphi_{-k}=f_{-k},\quad k=1,2,\ldots, \tag{17}$$

и

$$\Phi(z)=X(z)\,[F(z)+P_{\mu_1+\varkappa}(z)]. \tag{18}$$

Из (12) — (14) следует, что решение задачи Римана (11), (5), (6), определяемое формулой (18), зависит от постоянных m_i, $i=\overline{0,\ \mu_2}$, $\mu_2=\max(M,\nu)$, введенных в (7). Они могут быть найдены из первых μ_2+1 условий (17), которые представимы в виде системы линейных алгебраических уравнений относительно m_i. Отсюда следует, что число решений и условия разрешимости краевой задачи Римана определяются рангом матрицы этой системы.

Полагая постоянные m_i, $i=\overline{0,\ \mu_2}$, в (18) найденными, перейдем к нахождению функции $p(t)$. С этой целью воспользуемся формулой (10) и введем вспомогательную функцию

$$\varphi_M(x)=\frac{1}{2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\operatorname{sign}(t-x)\ (t-x)^M p(t)\,dt, \tag{19}$$

причем

$$\varphi_M^{(k)}(x)=\frac{(-1)^k M!}{2(M-k)!}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\operatorname{sign}(t-x)\,(t-x)^{M-k}p(t)\,dt,\quad k=\overline{1,M}, \tag{20}$$

$$p(x)=\frac{(-1)^{M+1}}{M!}\ \varphi_M^{(M+1)}(x). \tag{21}$$

Тогда из (10) с учетом (19) — (21) получим дифференциальное уравнение относительно функции $\varphi_M(x)$:

$$\frac{(-1)^{M+1}}{M!}\left[\delta\varphi_M^{(M+1)}(x)-\sum_{m=0}^{M}m!\,(-1)^m a_m\varphi_M^{(M-m)}(x)\right]=\varphi(x)=$$

$$=\Phi^+(x)-\Phi^-(x),\quad \alpha_1<x<\alpha_2, \tag{22}$$

которая, как следует из (7), (19), (20), должна также удовлетворять, например, таким граничным условиям: при $x_0=\alpha_1$

$$\varphi_M^{(k)}(x_0)=\frac{(-1)^k M!}{2(M-k)!}\sum_{j=0}^{M-k}(-1)^j\alpha_1^j C_{M-k}^j m_{M-k-j},\quad k=\overline{0,\lambda-1},$$

$$\lambda=\lambda(\delta)=M+\operatorname{sign}(\delta^2). \tag{23}$$

Очевидно, что $x_0\in[\alpha_1,\ \alpha_2]$ можно выбирать из соображений удобства [6].

Общее решение $\psi_\lambda(x)$ дифференциального уравнения (22) представимо в виде

$$\psi_\lambda(x)=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}w_\lambda(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi+\sum_{i=1}^{\lambda}d_i y_i(x). \tag{24}$$

Здесь $w_\lambda(x-\xi)$ —фундаментальное решение [9] уравнения (22), а $y_i(x)$, $i=\overline{1,\lambda}$, — его фундаментальная система решений. Из условий

$$\psi_\lambda^{(k)}(x_0)=\varphi_M^{(k)}(x_0),\quad k=\overline{0,\lambda-1},\quad x_0\in[\alpha_1,\alpha_2], \tag{25}$$

получим систему линейных алгебраических уравнений относительно d_i, $i = \overline{1, \lambda}$, с отличным от нуля определителем Вронского. Следовательно, $\varphi_M(x) \equiv \psi_\lambda(x)$ и тогда, продифференцирсвав функцию $\psi_\lambda(x)$ $M+1$ раз по x с учетом (21), найдем

$$p(x) = \frac{(-1)^{M+1}}{M!}\left[\frac{d^{M+1}}{dx^{M+1}}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} w_\lambda(x-\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \sum_{i=1}^{\lambda} d_i y_i^{(M+1)}(x)\right]. \quad (26)$$

Если решение задачи Римана (11), (5), (6) с помощью интегралов типа Коши [2] при $\delta \neq 0$ строить в классе функций вида (3), а при $\delta = 0$ — в классе функций, ограниченных при $t = \alpha_{1,2}$, то учитывая, что функция Грина удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению с правой частью в виде функции Дирака $\delta(x-\xi)$, можно увидеть, что для решения (26) интегрального уравнения (1) справедливо представление (3).

В качестве иллюстрации изложенного метода решения уравнения (1) рассмотрим задачу об изгибе бесконечной пластины со слабой сдвиговой жесткостью, содержащей на отрезке ($|x| < a$; $y = 0$) абсолютно жесткое включение. Пластина изгибается под действием центрально приложенной к включению силы $2P$ и известной нагрузки интенсивности $-q = \mathrm{const}$, распределенной на отрезках ($|x| < b$; $y = \pm c$).

Необходимо определить реактивные усилия $p(x)$, возникающие в пластине в зоне контакта с включением.

Поставленная задача эквивалентна [10, 11] такому интегральному уравнению:

$$\int_{-a}^{a}\left[(t-x)^2 - \frac{2}{m_\alpha^2}\right]\ln|t-x|\,p(t)\,dt = H(x), \quad |x| < a, \quad (27)$$

$$m_\alpha = \sqrt{\alpha/2}, \quad H(x) = 8\pi DA + qf(x), \quad H(x) = H(-x),$$

$$f(x) = \int_{-b}^{b}\left\{[(x-t)^2 + c^2] - \frac{2}{m_\alpha^2}\right\}\ln[(x-t)^2 + c^2]\,dt, \quad (28)$$

где A — проседание включения, $\alpha = K/D$, K и D — сдвиговая и цилиндрическая жесткости пластины. Причем, как следует из физических соображений, должны выполняться условия равновесия и симметрии

$$m_0 = \int_{-a}^{a} p(t)\,dt = 2P, \quad m_1 = \int_{-a}^{a} tp(t)\,dt = 0, \quad p(x) = p(-x). \quad (29)$$

Уравнение (27) является частным случаем уравнения (1) ($a(x) \equiv 0$; $b(x) = \pi$; $\delta = 0$; $M = 2$; $a_0 = -2/m_\alpha^2$; $a_1 = 0$; $a_2 = 1$; $b_m = 0$; в [11] его решение построено по схеме [6]).

Решение «задачи факторизации» получим с помощью одной из ветвей многозначной аналитической функции

$$\mathrm{X}(z) = (z^2 - a^2)^{1/2}, \quad \mathrm{X}^{\pm}(x) = \pm(a^2 - x^2)^{1/2}, \quad |x| < a,$$

$$\mathrm{X}^{\pm}(x) = i(x^2 - a^2)^{1/2}, \quad |x| > a,$$

$$\frac{1}{\mathrm{X}(z)} = -\frac{i}{z}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\left(\frac{a}{z}\right)^{2k}\right], \quad |z| > a. \quad (30)$$

Коэффициенты f_{-l} функции $F(z)$ имеют вид

$$f_{-k} = \frac{1}{8\pi^2}\int_{-a}^{a}\frac{32\pi DA + 4qf(t)}{\sqrt{a^2 - t^2}}\,t^{k-1}dt - \frac{1}{4\pi^2}\left(m_2 - \frac{2m_0}{m_\alpha^2}\right)j_{k-1} -$$

$$-\frac{1}{4\pi^2}m_0 j_{k+1}, \quad j_k = \int \frac{\ln(a^2 - t^2)}{\sqrt{a^2 - t^2}}\,t^k dt. \quad (31)$$

С помощью формулы (30) найдем разложение

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_{-k}}{z^k} = \frac{m_1}{2\pi} - \frac{1}{z}\,\frac{a^2 m_0 + 3m_2}{4\pi} + \frac{1}{z^2}\,\frac{1}{4\pi}\left[\frac{2}{3}\,m_3 + m_1\left(3a^2 - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{4}{m_\alpha^2}\right)\right] + \frac{1}{z^3}\,\frac{1}{4\pi}\left[\frac{3}{2}\,m_4 - m_2\left(\frac{5}{2}\,a^2 + \frac{2}{m_\alpha^2}\right) - \right.$$
$$\left. - a^2 m_0\left(a^2 - \frac{2}{m_\alpha^2}\right)\right] + O\left(\frac{1}{z^4}\right).$$

Первое из уравнений (17) позволяет выразить m_2 через m_0 ($m_1 = 0$) и после вычисления интегралов $j^0{}_{,2}$ в (31) с помощью формулы (7.343) из [7], формул (350.01); (324.01); (322.01) из [13], а также известного [12] разложения логарифмической функции по многочленам Чебышева второго рода, $j_0 = 2\pi \ln(a/2)$, $j_2 = \pi a^2 [\ln(a/2) - 1/4]$, получим

$$m_2 = \left(2\ln\frac{a}{2} - 3\right)^{-1}\left\{16\pi DA + \frac{2q}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{a^2 - t^2}} - \right.$$
$$\left. - 2m_0\left[\ln\frac{a}{2}\left(\frac{a^2}{2} - \frac{2}{m_\alpha^2}\right) - \frac{1}{8} + \frac{a^2}{2}\right]\right\}.$$

Воспользовавшись затем формулой (26) с учетом свойств [9] фундаментального решения $w_2(x) = \exp(-m_\alpha\,|\,x\,|)/2m_\alpha$ соответствующего дифференциального уравнения, а также четностью функции $p(x)$, найдем решение уравнения (27):

$$p(x) = -\frac{1}{2}\left\{\varphi'(x) + m_\alpha^2\int_{-a}^{a} w_2'(x - \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + m_\alpha^3 d_1 \operatorname{ch} m_\alpha x\right\}. \qquad (32)$$

Постоянную d_1 определим из условий (25) при $k = 1$; $x_0 = -a$. Условия (25) при $x_0 = 0$ и $k = 0$ удовлетворяются за счет свойств четности функций $p(x)$. Величину A — проседание включения, можно определить после подстановки (32) в первое из условий (29).

В заключение отметим, что изложенную схему построения решения уравнения (1) можно использовать при построении приближенного решения уравнения (1) и для случая $U_\infty(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$, $a_0 \neq 0$, $V_\infty(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$, часто встречающегося в задачах механики [16].

1. *Гахов Ф. Д.* О новых типах интегральных уравнений, разрешимых в замкнутой форме // Проблемы механики сплошной среды.— М.: Изд-во АН СССР, 1961.— С. 102—114.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.— М.: Наука, 1977.— 640 с.
3. *Сакалюк К. Д.* Интегральные уравнения с логарифмическими и полярно-логарифмическими ядрами // Учен. зап. Кишинев. ун-та.— 1964.— 70.— С. 17—23.
4. *Чумаков Ф. В.* Об одном обобщении уравнения Карлемана // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.— 1972.— № 4.— С. 114—116.
5. *Самко С. Г.* Интегральные уравнения первого рода с логарифмическим ядром // Методы отображений.— Грозный : Чечено-Ингуш. ун-т, 1976.— С. 41—69.
6. *Morland L. W.* Singular integral equations with logarithmic kernels // Mathematika (Gr. Brit.).— 1970.— 17, N 1.— P. 47—56.
7. *Грандштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1962. — 1100 с.
8. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.— 736 с.
9. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М.: Наука, 1976.— 576 с.

10. *Грибняк С. Т.* О некоторых задачах изгиба составных, подкрепленных пластин с использованием моделей Тимошенко и Кирхгофа. — Одесса, 1980. — 56 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 4861-80 Деп.
11. *Грибняк С. Т.* Точное решение краевой задачи об изгибе бесконечной пластинки, содержащей прямолинейное включение. — Одесса, 1983. — 14 с. — Деп. в УкрНИИНТИ, № 353 Ук-Д83.
12. *Попов Г. Я.* Об одном замечательном свойстве многочленов Якоби // Укр. мат. журн.— 1968.— **20**, № 4.— С. 540—547.
13. *Двайт Г. Б.* Таблицы интегралов.— М.: Наука, 1973.— 228 с.
14. *Попов Г. Я., Толкачев В. М.* Проблема контакта жестких тел с тонкостенными элементами // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.— 1980.— № 4.— С. 192—206.
15. *Онищук О. В., Попов Г. Я.* О некоторых задачах изгиба пластин с трещинами и тонкими включениями // Там же.— С. 141—150.
16. *Развитие* теории контактных задач в СССР / Под ред. Л. А. Галина. — М.: Наука, 1976.— 495 с.

Одес. ун-т

Получено 24.07.84,
после доработки — 11.05.85