УДК 517.512.7

В. А. Глухов

О суммировании рядов Фурье — Уолша

В настоящей статье указана общая оценка сверху констант Лебега линейных средних рядов типа Фурье — Уолша, которая затем применяется к вопросу о сильном суммировании методом средних арифметических с пропусками (теорема 2). Доказывается эквивалентность аппроксимативных свойств (C, α) средних в L_q, $\alpha > 0$, $q \in [1, \infty]$ (теорема 3). Ранее подобные результаты были получены лишь для тригонометрической системы (соответственно [1—3]). В качестве простого следствия получены недавние результаты В. А. Скворцова [4].

1. Пусть $X = \{\chi_k\}_0^\infty$ — периодическая мультипликативная полная ортонормированная на отрезке [0,1] система функций, определенная последовательностью простых (не обязательно различных) целых чисел $\{p_i\}_1^\infty$, $2 \leqslant p_i \leqslant p < \infty$ (см., например, [5]). Частным случаем таких систем ($p_i \equiv 2$) является система Уолша. В дальнейшем используются обозначения $m_0 = 1$, $m_n = p_n m_{n-1}$, $n \geqslant 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$, $x = \sum\limits_{k=1}^\infty x_k/m_k$, причем, если точки вида k/m_n считать дважды, то устанавливается взаимно-однозначное соответствие между точками отрезка [0,1] и элементами группы G, состоящей из последовательностей $\tilde{x} = \{x_1, x_2, \dots x_n, \dots\}$, $0 \leqslant x_n \leqslant p_n - 1$.

В данной работе систему X будем рассматривать в нумерации, соответствующей нумерации системы Уолша — Пэли: $\chi_0(x) \equiv 1$, $\chi_1(x) = \chi_{m_0}(x) = \exp(2\pi i x_1/p_1)$, $\chi_{m_n}(x) = \exp(2\pi i x_{n+1}/p_{n+1})$. Если $k = \sum\limits_{j=0}^r \alpha_j m_j$, $0 \leqslant \alpha_j < p_{j+1}$, то $\chi_k(x) = \prod\limits_{j=0}^r (\chi_{m_j}(x))^{\alpha_j}$.

На множестве целых чисел введем групповую операцию $\oplus$ следующим образом: $k \oplus p = n$, когда $\chi_n(x) = \chi_p(x)\chi_k(x)$. Очевидно, что каждое множество U_n, содержащее все целые числа меньшие, чем m_n, является подгруппой группы всех целых чисел относительно данной групповой операции.

На множестве чисел отрезка [0,1] введем операцию, соответствующую групповой операции группы G: $x \dot{+} y = \sum\limits_{k=1}^\infty (x_k + y_k \pmod{p_k}))/m_k$. Очевидно, что $\chi_n(x \dot{+} y) = \chi_n(x)\chi_n(y)$. Определенный на [0,1] интеграл Лебега от функции f инвариантен относительно операции $\dot{+}$, т. е при любом $y \in [0,1]$ $\int\limits_0^1 f(x \dot{+} y)\,dx = \int\limits_0^1 f(x)\,dx$ (см., например, [5, с. 153]). Поэтому, если $\Lambda = \{\lambda_{N,k}\}$ $(N \geqslant 0, k \geqslant 0, \lambda_{N,k} = 0$ при $k \geqslant N)$ — треугольная матрица чисел, то нормы операторов (в метрике L и C), определяющих последовательность линейных средних ряда Фурье по системе X, при суммировании методом, задаваемым данной треугольной матрицей, определяются следующим образом:

$$L_N(\Lambda) = \int\limits_0^1 \Big| \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_{N,k}\chi_k(x) \Big|\,dx. \tag{1}$$

Теорема 1. *Если $m_n \leqslant N < m_{n+1}$, $n \geqslant 0$, то*

$$L_N(\Lambda) \leqslant \sup_{k \geqslant 0} |\lambda_{N,k}| + C \sum_{s=0}^{n} (m_s)^{-1/2} \Big(\sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} |\lambda_{N,k} - \lambda_{N,k \oplus m_s}|^2 \Big)^{1/2},$$

где постоянная зависит только от $p = \sup\limits_{i \geqslant 1} p_i$.

Для тригонометрического случая аналогичный результат получен в работе [1].

Доказательство. На отрезке [0,1] введем систему множеств $E_s = [1/m_{s+1}, 1/m_s)$, $0 \leqslant s \leqslant n$, $E_{n+1} = [0, 1/m_{n+1})$, $n \geqslant 0$. Данное разбиение отрезка [0,1] соответствует такому разбиению группы G, что если $x \in E_s$, то $x_{s+1} \geqslant 1$ при $0 \leqslant s \leqslant n$. Из очевидного неравенства $|1 - e^{ix}| = 2|\sin x/2| \geqslant 4 \min\{|x|/2, \pi - |x|/2\}/\pi$ следует

$$\min_{x \in E_s} |1 - \chi_{(p_{s+1}-1)m_s}(x)| = \min_{x \in E_s} |1 - \exp(2\pi i (p_{s+1} - 1) x_{s+1}/p_{s+1})| \geqslant 4/p. \quad (2)$$

В силу условий на элементы матрицы Λ сумму под интегралом в (1) можно брать не до $N - 1$, а до $m_{n+1} - 1$, т. е. по $k \in U_{n+1}$. Учитывая, что $(\chi_{m_s}(x))^{p_{s+1}} = 1$, группа U_{n+1} инвариантна относительно сдвига, и производя очевидные преобразования, при $s \leqslant n$ получаем

$$\sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} (\lambda_{N,k} - \lambda_{N,k \oplus m_s}) \chi_k(x) = \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} \lambda_{N,k} \chi_k(x) - \chi_{(p_{s+1}-1)m_s}(x) \times$$

$$\times \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} \lambda_{N,k \oplus m_s} \chi_{k \oplus m_s}(x) = (1 - \chi_{(p_{s+1}-1)m_s}(x)) \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} \lambda_{N,k} \chi_k(x).$$

Применяя к данному соотношению равенство Парсеваля, а далее неравенство (2), находим

$$\Big(\sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} |\lambda_{N,k} - \lambda_{N,k \oplus m_s}|^2 \Big)^{1/2} \geqslant \Big(\int_{E_s} \Big| (1 - \chi_{(p_{s+1}-1)m_s}(x)) \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} \lambda_{N,k} \chi_k(x) \Big|^2 dx \Big)^{1/2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4}{p} \Big(\int_{E_s} \Big| \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} \lambda_{N,k} \chi_k(x) \Big|^2 dx \Big)^{1/2}.$$

Учитывая последнее неравенство, очевидное соотношение $|E_s| < 1/m_s$ ($|E_s|$ — длина отрезка E_s), а также неравенство Коши — Буняковского, получаем нужную оценку

$$L_N(\Lambda) = \sum_{s=0}^{n+1} \int_{E_s} \Big| \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} \lambda_{N,k} \chi_k(x) \Big| dx \leqslant \sup_{0 \leqslant k < N} |\lambda_{N,k}| +$$

$$+ \sum_{s=0}^{n} \Big(\int_{E_s} \Big| \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} \lambda_{N,k} \chi_k(x) \Big|^2 dx \Big)^{1/2} |E_s|^{1/2} \leqslant \sup_{0 \leqslant k < N} |\lambda_{N,k}| +$$

$$+ C \sum_{s=0}^{n} (m_s)^{-1/2} \Big(\sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} |\lambda_{N,k} - \lambda_{N,k \oplus m_s}|^2 \Big)^{1/2}.$$

Замечание:

$$\sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} |\lambda_{N,k} - \lambda_{N,k \oplus m_s}|^r \leqslant C_{p,r} \sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} |\lambda_{N,k} - \lambda_{N,k+m_s}|^r, \quad r > 0, \quad s \geqslant 0,$$

постоянная $C_{p,r}$ зависит от p и от r.

Доказательство. Очевидно, что

$$\sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} |\lambda_{N,k} - \lambda_{N,k \oplus m_s}|^r = \sum_{i=0}^{A_s} \Big\{ \sum_{k \in F_i} + \sum_{i \in F_i} \Big\} |\lambda_{N,k} - \lambda_{N,k \oplus m_s}|^r.$$

где

$$F_i = \{k : im_{s+1} \leqslant k \leqslant im_{s+1} + (p_{s+1} - 1) m_s - 1\}, \quad E_i = \{k : im_{s+1} + (p_{s+1} - 1) m_s \leqslant k \leqslant im_{s+1} + m_{s+1} - 1\}, \quad 0 \leqslant i \leqslant A_s = \prod_{\nu=s+2}^{n+1} p_\nu - 1.$$

При $k = F_i$ $k \oplus m_s = k + m_s$, а при $k \in E_i$ $k \oplus m_s = k - (p_{s+1} - 1) m_s$. Учитывая это, нетрудно проверить, что вторая внутренняя сумма не превышает первую с постоянной $(p-1)^r$, а из этого следует утверждение замечания с постоянной $C_{p,r} = (p-1)^r + 1$.

Следствие 1. *Если существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что*

1) $\sum\limits_{k=0}^{N} |\lambda_{N,k} - \lambda_{N,k+1}| \leqslant C_1$;

2) $|\lambda_{N,k} - \lambda_{N,k\oplus m}| \leqslant C_2 (m/N)^\alpha$, $\alpha > 0$, $0 \leqslant k \leqslant N$, $m > 0$, *то существует постоянная C, зависящая только от α и p такая, что* $\sup\limits_{N\geqslant 1} L_N(\Lambda) \leqslant C$.

Доказательство. Из условия 1 следствия следуют очевидные неравенства

$$\sup_{1\leqslant N}\sup_{0\leqslant k\leqslant N} |\lambda_{N,k}| \leqslant C_1, \quad \sum_{k=0}^{N} |\lambda_{N,k} - \lambda_{N,k+m_s}| \leqslant \sum_{k=0}^{N}\sum_{i=k}^{k+m_s-1} |\lambda_{N,i} - \lambda_{N,i+1}| \leqslant$$

$$\leqslant m_s \sum_{i=0}^{N} |\lambda_{N,i} - \lambda_{N,i+1}| \leqslant C_1 m_s.$$

Применяя теорему 1, замечание к ней, условие 2 следствия 1 и последние неравенства, получаем

$$L_N(\Lambda) = \sup_{0\leqslant k\leqslant N} |\lambda_{N,k}| + C \sum_{s=0}^{n} (m_s)^{-1/2} \Big(\sum_{k=0}^{m_{n+1}-1} |\lambda_{N,k} - \lambda_{N,k\oplus m_s}|^2 \Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 + C \sum_{s=0}^{n} (m_s)^{-1/2} \big(\sup_{0\leqslant k\leqslant N} |\lambda_{N,k} - \lambda_{N,k\oplus m_s}| \big)^{1/2} \Big(C_{p,2} \sum_{k=0}^{N} |\lambda_{N,k} - \lambda_{N,k+m_s}| \Big)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 + C \sum_{s=0}^{n} (m_s)^{-1/2} (C_2)^{1/2} (m_s/N)^{\alpha/2} (C_{p,2} C_1 m_s)^{1/2} \leqslant C_1 + C \sum_{s=0}^{n} (m_s/N)^{\alpha/2} \leqslant C.$$

Следствие 1 доказано.

2. Рассмотрим следующую задачу. Пусть

$$S_j(f; x) = \sum_{k=0}^{j-1} c_k \chi_k(x), \quad c_k = \int_0^1 f(x) \overline{\chi}_k(x)\, dx, \quad j \geqslant 1,$$

— соответственно j-я частная сумма и коэффициенты Фурье функции f по системе X; $\{\nu_j\}_1^\infty$ — строго возрастающая последовательность целых чисел. При каких ограничениях на скорость роста ν_j справедливо равенство

$$\forall f \in C\,[0,1] \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} |f(x) - S_{\nu_k}(f; x)| = 0. \tag{3}$$

В тригонометрическом случае вопрос полностью решен. Из выполнения (3) с необходимостью следует, что $\{\nu_i\}_1^\infty$ удовлетворяет условию $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \ln \nu_k/\sqrt{k} \leqslant C$ [6]. А если $\{\nu_j\}_1^\infty$ выпукла, то это условие является и достаточным (см. [2, 7]).

В случае мультипликативных систем положение иное, так как, например, при $\nu_k = m_k$, $k \geqslant 1$, условие (3), очевидно, выполняется, тогда как $\varlimsup_{k\to\infty} \ln m_k/\sqrt{k} = \infty$.

Пользуясь рассуждениями Салема [6], а также асимптотикой величин $D_n = \int_0^1 |D_n(x)|\,dx$, установленной в [8], легко получаем необходимое условие выполнения (3) для системы Уолша — Пэли. А именно: из выполнения (3) следует $\sum_{k=1}^{n} D_{\nu_k} \leqslant Cn^{3/2}$, где $D_k = i - \sum_{1\leqslant p<r\leqslant i} 2^{n_r - n_p}$ при $k = 2^{n_1} + 2^{n_2} + \ldots + 2^{n_i}$, $n_1 > n_2 > \ldots > n_i$. Достаточное условие аналогично тригонометрическому случаю.

Теорема 2. *Если последовательность* $\{\nu_k\}_1^\infty$ *выпукла, то для того чтобы выполнялось условие* (3), *достаточно чтобы* $\ln \nu_n = O(\sqrt{n})$.

При доказательстве теоремы используется следующая лемма.

Лемма: $\forall \{\lambda_k\}_0^\infty$

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \chi_k(x) \right| dx \leqslant C \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{i\geqslant k} |\lambda_{i-1} - \lambda_i|, \tag{4}$$

постоянная C зависит только от $p = \sup_{i\geqslant 1} p_i$.

В тригонометрическом случае это утверждение есть результат Сидона в записи С. А. Теляковского [9]. В случае мультипликативных систем доказательство этого факта основано на результате С. Л. Блюмина (см., например, [10, с. 334]), из которого следует, что при $|\alpha_i| \leqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{r} \alpha_k D_k(x) \right| dx \leqslant Cr$, где $D_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \chi_i(x)$. (Это же неравенство следует из следствия 1 при $\alpha = 1$.) Обозначая $A_k = \sup_{i\geqslant k} |\lambda_{i-1} - \lambda_i|$, $\alpha_k = (\lambda_{k-1} - \lambda_k)/A_k$, $k \geqslant 1$, и применяя преобразование Абеля к левой части (4), получаем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \chi_k(x) \right| dx = \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda_{i-1} - \lambda_i) D_i(x) \right| dx =$$
$$= \int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_{i-1} - \lambda_i}{A_i} A_i D_i(x) \right| dx \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} (A_i - A_{i+1}) \times$$
$$\times \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{i} \alpha_k D_k(x) \right| dx \leqslant C \sum_{i=1}^{\infty} (A_i - A_{i+1})\, i = C \sum_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Лемма доказана.

Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что при сделанных предположениях на $\{\nu_k\}_1^\infty$ выполняется $\max_{x\in[0,1]} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |S_{\nu_k}(f; x)| \leqslant C \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Вводя множители

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1/n, & k = \nu_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n; \\ 0, & k \neq \nu_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$$

и учитывая общий вид нормы сверточного оператора в пространстве C, можно сделать вывод, что доказательство сводится к установлению неравенства $\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k D_k(x) \right| dx \leqslant C$, $N = \nu_n$. Но

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k D_k(x) \right| dx = \int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k \chi_k(x) \right| dx,$$

где $\lambda_k = \sum_{i=k+1}^{N} \varepsilon_i$, $0 \leqslant k \leqslant N-1$; $\lambda_k = 0$, $k \geqslant N$; $\varepsilon_k = \lambda_{k-1} - \lambda_k$, $k \geqslant 1$.
Каждое λ_m разобьем на два слагаемых следующим образом:

$$\lambda_m = \lambda_m^{(1)} + \lambda_m^{(2)}, \quad \lambda_m^{(1)} = \lambda_{\nu_{k-1}} + \frac{m-\nu_{k-1}}{\nu_k - \nu_{k-1}} (\lambda_{\nu_k} - \lambda_{\nu_{k-1}}), \quad \nu_{k-1} \leqslant m \leqslant \nu_k,$$
$$1 \leqslant k \leqslant n.$$

Учитывая, что

$$|\lambda_{m-1}^{(1)} - \lambda_m^{(1)}| = \left| \frac{\lambda_{\nu_k} - \lambda_{\nu_{k-1}}}{\nu_k - \nu_{k-1}} \right| = \frac{|\varepsilon_{\nu_k}|}{\nu_k - \nu_{k-1}} = \frac{1}{n(\nu_k - \nu_{k-1})}$$

и $\{\nu_k\}$ выпукла ($\nu_k - \nu_{k-1} \leqslant \nu_{k+1} - \nu_k$, $1 \leqslant k \leqslant N$, $\nu_0 = 0$), получаем

$$\sum_{k=1}^{N} \sup_{m \geqslant k} |\lambda_{m-1}^{(1)} - \lambda_m^{(1)}| = \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=\nu_{p-1}+1}^{\nu_p} \sup_{m \geqslant k} |\lambda_{m-1}^{(1)} - \lambda_m^{(1)}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{n} \sum_{k=\nu_{p-1}+1}^{\nu_p} \frac{1}{n(\nu_p - \nu_{p-1})} = 1.$$

Из леммы следует $\int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k^{(1)} \chi_k(x) \right| dx \leqslant 1$. Заметим, что при $\nu_{k-1} \leqslant m < \nu_k$, $k \geqslant 1$

$$|\lambda_m^{(2)}| = |\lambda_m - \lambda_m^{(1)}| = \left| \sum_{i=\nu_{k-1}+1}^{N} \varepsilon_i - \lambda_{\nu_{k-1}} - \frac{m-\nu_{k-1}}{\nu_k - \nu_{k-1}} (\lambda_{\nu_k} - \lambda_{\nu_{k-1}}) \right| \leqslant$$

$$\leqslant |\varepsilon_{\nu_k}| = \frac{1}{n}.$$

Кроме того, очевидно, что $\sum_{m=1}^{N} |\lambda_{m-1}^{(2)} - \lambda_m^{(2)}| \leqslant 2$. Используя теорему 1 и применяя преобразования, подобные таковым при доказательстве следствия 1 при $m_r \leqslant N < m_{r+1}$ получаем

$$\int_0^1 \left| \sum_{k=0}^{N-1} \lambda_k^{(2)} \chi_k(x) \right| dx \leqslant \sup_{0 \leqslant k < N} |\lambda_k^{(2)}| + C \sum_{s=0}^{r} (m_s)^{-1/2} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{m_{r+1}-1} |\lambda_k^{(2)} - \lambda_{k \oplus m_s}^{(2)}|^2 \right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{n} + C \sum_{s=0} (m_s)^{-1/2} (2 \sup_{0 \leqslant k \leqslant N} |\lambda_k^{(2)}|)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\sum_{k=0}^{m_{r+1}-1} |\lambda_k^{(2)} - \lambda_{k+m_s}^{(2)}| \right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{n} + \frac{C}{\sqrt{n}} \sum_{s=} (m_s)^{-1/2} \left(\sum_{k=0}^{m_{r+1}-1} \sum_{i=k+1}^{k+m_s} |\lambda_{i-1}^{(2)} - \right.$$

$$\left. - \lambda_i^{(2)}| \right)^{1/2} \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}} \sum_{s=0} \left(\sum_{i=1}^{m_{r+1}} |\lambda_{i-1}^{(2)} - \lambda_i^{(2)}| \right)^{1/2} \leqslant C \frac{r}{\sqrt{n}}.$$

Учитывая, что при $p = \sup_{i \geqslant 1} p_i < \infty$ $r \leqslant C \ln \nu_n$, получаем утверждение теоремы 2.

Сравним теперь (C, α) средние рядов Фурье по мультипликативным системам в зависимости от их аппроксимативных свойств.

Теорема 3. *При всех $\alpha > 0$ существуют постоянные C_1 и C_2, зависящие лишь от α и p, такие что $\forall f \in L_q$, $q \in [1, \infty]$, выполняются неравенства*

$$C_1 \| f - \sigma_n(f) \|_q \leqslant \| f - \sigma_n^\alpha(f) \|_q \leqslant C_2 \| f - \sigma_n(f) \|_q,$$

где σ_n^α — (C, α) *средние*, $\alpha > 0$, $\sigma_n = \sigma_n^1$, $\| f \|_q = \left\{ \int\limits_0^1 | f(x) |^q dx \right\}^{1/q}$.

Доказательство этой теоремы не отличается от доказательства аналогичной теоремы для тригонометрической системы ([3]) (оно основано на теореме 1 настоящей статьи и принципе сравнения из [11]).

Из теоремы 3 вытекает ряд следствий, которые состоят в том, что результаты, полученные ранее для $(C, 1)$ средних, переносятся на случай (C, α) средних. В частности, следует результат В. А. Скворцова ([4], теорема 3) (для систем с нумерацией, аналогичной нумерации Уолша — Пэли).

Следствие 2. *Если $f \in \mathrm{Lip}_G(\beta, q)$, $q \in [1, \infty]$, то*

$$\| f - \sigma_n^\alpha(f) \|_q = \begin{cases} O\ (1/n^\beta), & 0 < \beta < 1; \\ O\,(\ln n/n), & \beta = 1. \end{cases}$$

Аналогичные оценки для средних арифметических были известны ранее (см. [12], следствие 1).

Учитывая результат М. Ф. Тимана и К. Тухлиева [13], установленный для средних арифметических частных сумм ряда Фурье — Уолша, получаем такое следствие.

Следствие 3. *Пусть функция f задана на $[0, 1]$. Тогда $\forall n : 2^m \leqslant n < 2^{m+1}$ выполняются следующие неравенства:*

$$\Omega_m(f) \leqslant M_1 R_n^\alpha(f), \quad R_n^\alpha(f) \leqslant M_2 (\Omega_m(f) + E_{2^m}(f)),$$

где $R_n^\alpha(f) = \| f - \sigma_n^\alpha(f) \|_\infty$, $E_n(f) = \inf\limits_{\{c_\nu\}} \left\| f - \sum\limits_{\nu=0}^{n-1} c_\nu \psi_\nu \right\|_\infty$, $\Omega_m(f) = \sup\limits_{k \geqslant m} \left\| \frac{1}{2^{k+1}} \sum\limits_{\nu=0}^{k} 2^\nu \left(f(t) - f\left(t + \frac{1}{2^{\nu+1}}\right)\right) \right\|_\infty$, *постоянные M_1 и M_2 зависят только от α.*

1. *Trigub R. M.* Summability of multiply Fourier series. Growth of Lebesgue constants // Anal. Math.— 1980.— **6**, N 3.— P. 255—267.
2. *Загородний Н. А., Тригуб Р. М.* Об одном вопросе Салема // Теория функций и отображений.— Киев: Наук. думка, 1979.— С. 97—101.
3. *Тригуб Р. М.* Суммируемость и абсолютная сходимость рядов Фурье в целом // Метрические вопросы теории функций и отображений.— Киев : Наук. думка, 1971.— С. 173—267.
4. *Скворцов В. А.* О средних Чезаро рядов Фурье по мультипликативным системам // Вестн. Моск. ун-та.— 1982.— № 1.— С. 7—11.
5. *Балашов Л. А., Рубинштейн А. И.* Ряды по системе Уолша и их обобщения // Итоги науки. Сер. Мат. анализ / ВИНИТИ.— 1971.— С. 147—202.
6. *Salem R.* On strong summability of Fourier series // Amer. J. Math.— 1955.— **77**.— P. 393—403.
7. *Carleson L.* Appendix to the paper of J.- P. Kahane and J. Katznelson // Stud. Pure Math. Mem. Paul. Juran.— Budapest, 1983.— P. 411—413.
8. *Fine N. J.* On the Walsh functions // Trans. Amer. Math. Soc. — 1949.— **65**, N 3. — P. 372—414.
9. *Теляковский С. А.* Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов // Мат. заметки.— 1973.— **14**, № 3.— С. 317—328.
10. *Мультипликативные системы* функций и гармонический анализ на нульмерных группах / Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн.— Баку : Элм, 1981.— 180 с.
11. *Тригуб Р. М.* Линейные методы суммирования и абсолютная сходимость рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1968.— **32**, № 1.— С. 24—49.

12. *Блюмин С. Л.* О линейных методах суммирования рядов Фурье по мультипликативным системам // Сиб. мат. журн.— 1968.— 9, № 2.— С. 449—455.
13. *Тиман М. Ф., Тухлиев К.* О приближении функций средними арифметическими частных сумм ряда Фурье — Уолша.— Днепропетровск., 1982.— 10 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 516-82.

Донец. ун-т

Получено 22.11.84,
после доработки — 05.11.85