УДК 530.145,531.51

В. П. ГУСЫНИН, канд. физ.-мат. наук (Ин-т теорет. физики АН Украины, Киев)

Асимптотика теплового ядра для неминимальных дифференциальных операторов

Метод вычисления коэффициентов в асимптотическом разложении ядра теплопроводности обобщается на неминимальные дифференциальные операторы. Вычислены нижайшие нетривиальные коэффициенты разложения для неминимальных операторов второго порядка на римановых многообразиях произвольной размерности.

Метод обчислення коефіцієнтів в асимптотичному розкладі ядра теплопровідності узагальнюється на немінімальні диференціальні оператори. Обчислені найнижчі нетривіальні коефіцієнти розкладу для немінімальних операторів другого порядку на ріманових многовидах довільної розмірності.

Асимптотическое разложение теплового ядра играет важную роль как в теоретической физике, так и в геометрии. Нижайшие коэффициенты в этом разложении определяют расходимости однопетлевого эффективного действия, аномалии в дивергенции аксиального тока и следа тензора энергии-импульса [1—4], индексы эллиптических операторов [5, 6], допускают точное вычисление функциональных детерминантов для определенного типа дифференциальных операторов [7, 8].

Для положительного эллиптического дифференциального оператора H порядка $2r$, действующего на сечениях векторного расслоения замкнутого n-мерного компактного риманова многообразия, соответствующее разложение диагональных матричных элементов теплового ядра $\exp(-tH)$ имеет вид

$$\langle x \,|\, e^{-tH} \,|\, x\rangle \underset{t\to 0+}{\sim} \sum_{m\geqslant 0} E_m(x\,|\,H)\, t^{\frac{m-n}{2r}}. \tag{1}$$

Коэффициенты разложения $E_m(x\mid H)$ (коэффициенты Де Витта — Сили — Гилки (ДВСГ) [9—11]) являются эндоморфизмами слоя в x и представляют собой локальные ковариантные величины определенной размерности, построенные из коэффициентных функций оператора H, кривизн слоя и базового многообразия, и их ковариантных производных.

Алгоритмы вычисления коэффициентов ДВСГ хорошо развиты в случае минимальных дифференциальных операторов второго порядка $H = -\square + X$, действующих на k-формах (X — матрица во внутреннем пространстве). Наиболее известный из них, метод Де Витта [9], основан на использовании определенного анзаца для матричных элементов теплового ядра. Уравнение теплопроводности, которому удовлетворяет $\exp(-tH)$, приводит в этом случае к системе рекуррентных соотношений для E_m. Наиболее полные результаты в этом направлении получены для операторов на 0-формах. Так, коэффициенты E_0, E_2, E_4 вычислены Де Виттом [9], E_6 — Сакаи и Гилки [12, 11], E_8 — Аврамиди [13] ($E_{2m+1} = 0$ в случае дифференциальных операторов на замкнутых многообразиях). Отметим также последние результаты, полученные для компактных многообразий с границей [14].

К сожалению, техника Де Витта не применима к операторам порядка $2r > 2$ и неминимальным дифференциальным операторам, у которых старшие производные не являются степенью оператора Лапласа (о последних попытках обобщить метод Де Витта на случай минимальных операторов четвертого порядка см. [15, 16]). В то же время техника псевдодифференциальных операторов, хотя и свободна от недостатков метода Де Витта, приводит к существенным техническим трудностям для искривленных многообразий ввиду отсутствия явной ковариантности по отношению к общекоординатным преобразованиям.

В последних работах [17, 18] развит новый алгоритм для вычисления ДВСГ коэффициентов, основываясь на обобщении Вайдомом [19] техники псевдодифференциальных операторов в случае искривленных многообразий. Метод обладает явной калибровочной и общекоординатной инвариантностью и применим к операторам произвольного порядка. С его помощью получены наиболее общие результаты для коэффициентов E_0, E_2, E_4 в случае минимальных операторов четвертого порядка в произвольной размерности пространства (для операторов на многообразиях с кручением см. [20]). Важным преимуществом развиваемого метода является его алгоритмический характер, что позволяет проводить вычисления коэффициентов ДВСГ на компьютере с использованием соответствующих систем аналитических вычислений.

В настоящей работе продемонстрируем эффективность метода [17, 18] на примере вычисления нижайших коэффициентов разложения (1) для неминимальных дифференциальных операторов второго порядка. Операторы такого типа возникают в квантовой гравитации [21], при квантовании калибровочных полей во внешних полях произвольного вида [22]. Так, квантование электромагнитного поля A_μ в присутствии внешнего гравитационного поля $g_{\mu\nu}$ приводит к дифференциальному оператору

$$H^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\Box + (1 - 1/\alpha)\,\nabla^\mu\nabla^\nu + R^{\mu\nu}, \quad \Box = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu \tag{2}$$

(всюду в дальнейшем используется евклидова метрика). Стандартный способ вычисления коэффициентов E_m для оператора (2) — это сведение его к минимальному дифференциальному оператору (выбирая фейнмановскую калибровку $\alpha = 1$), в котором (2) совпадает с оператором Ходжа — де Рама $\delta d + d\delta$ на 1-формах. В этой калибровке можно воспользоваться методом Де Витта и вычислить нужные коэффициенты E_m [23]. Для произвольных калибровок вычисления использовали специфическую зависимость оператора (2) от калибровочного параметра [21, 22]. Методы [21, 22] не применимы, однако, для более общих неминимальных дифференциальных операторов второго порядка, которые будем рассматривать в этой работе:

$$H^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu}\Box + a\nabla^\mu\nabla^\nu + X^{\mu\nu}, \tag{3}$$

где ковариантная производная ∇_μ включает в себя как связность Леви-Чивиты, так и связность внутреннего пространства (или слоя); $X^{\mu\nu}$ является также матрицей по индексам внутреннего пространства, не указанным явным образом.

Определим оператор $\exp(-tH)$ через резольвенту $(H-\lambda)^{-1}$ с помощью формулы Коши

$$e^{-tH} = \int\limits_C \frac{id\lambda}{2\pi}\, e^{-t\lambda}\,(H-\lambda)^{-1}, \tag{4}$$

где контур C обходит против часовой стрелки спектр оператора H, а для матричных элементов резольвенты воспользуемся представлением в форме

$$G_{\mu\nu}(x, x'; \lambda) \equiv \langle x, \mu\,|\,\frac{1}{H-\lambda}\,|\,x', \nu\rangle = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n \sqrt{g(x')}}\, e^{il(x,x',k)}\sigma_{\mu\nu}(x,x',k;\lambda). \tag{5}$$

В (5) $l(x, x', k)$ — фазовая функция, $\sigma_{\mu\nu}(x, x', k, \lambda)$ — амплитуда. Фаза $l(x, x', k)$ должна быть обобщением на искривленные многообразия фазы плоского пространства $k_\mu(x-x')^\mu$, поэтому потребуем, чтобы она была бискаляром по отношению к общекоординатным преобразованиям и линейной однородной функцией по k. Обобщением условия линейности по x будет требование

$$\{\nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\cdots\nabla_{\mu_m}\}\, l\,|_{x=x'} \equiv [\{\nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\cdots\nabla_{\mu_m}\}\, l] = \begin{cases} k_{\mu_1}, & m = 1, \\ 0, & m \neq 1, \end{cases} \tag{6}$$

фигурные скобки означают симметризацию по всем индексам, а квадратные скобки — взятие предела совпадения: $[f(x, x')] \equiv f(x, x')|_{x=x'}$. Можно показать [19], что локальные свойства функции l (6) достаточны для получения диагонального разложения ядра теплопроводности.

Так как резольвента оператора H удовлетворяет

$$(H-\lambda)\,G=1, \tag{7}$$

то для выполнения (7) достаточно потребовать, чтобы амплитуда $\sigma_{\mu\nu}(x, x', k; \lambda)$ удовлетворяла уравнению

$$\{g^{\mu\nu}(\nabla^\rho l\nabla_\rho l - i\Box l - 2i\nabla^\rho l\nabla_\rho - \Box - \lambda) + a\,(i\nabla^\mu\nabla^\lambda l - \nabla^\mu l\nabla^\lambda l + \\ + i\nabla^\mu l\nabla^\lambda + i\nabla^\lambda l\nabla^\mu + \nabla^\mu\nabla^\lambda) + X^{\mu\lambda}\}\,\sigma_{\lambda\nu}(x, x', k; \lambda) = I^\mu_\nu(x, x'). \tag{8}$$

Заметим, что хотя амплитуда имеет два лоренцевских индекса, ковариантные производные действуют только на первый. Функцию $I^\mu_\nu(x, x')$ с лоренцевскими индексами и индексами внутреннего пространства определим с помощью условий

$$[I^\mu_\nu] = \delta^\mu_\nu\cdot\mathbf{1}, \quad [\{\nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\cdots\nabla_{\mu_m}\}\,I^\mu_\nu] = 0, \quad m\geqslant 1, \tag{9}$$

единица $\mathbf{1}$ в (9) является единичной матрицей во внутреннем пространстве. Функции $l(x, x', k)$ и $I^\mu{}_\nu(x, x')$, введенные условиями (6) и (9), играют важную роль в так называемом внутреннем символическом исчислении, развитом в [19]. Введение в рассмотрение этих функций позволяет обобщить ковариантным образом технику псевдодифференциальных операторов на искривленные многообразия. Роль этих функций аналогична роли, которую играют геодезический интервал $\sigma(x, x')$ и функция параллельного переноса в методе Де Витта [9]. Подчеркнем, однако, что введенные функции определены также и для многообразий без метрики, в то время как геодезический интервал $\sigma(x, x')$ определен только для многообразий, снабженных метрикой $g_{\mu\nu}$. Чтобы получить асимптотическое разложение (1), введем в уравнение (8) вспомогательный параметр ε (который в дальнейшем положим равным единице) по правилу $l\to l/\varepsilon$, $\lambda\to\lambda/\varepsilon^2$ и разложим амплитуду в формальный ряд $\sigma_{\mu\nu} = \sum\limits_{m\geqslant 0}\varepsilon^{2+m}\sigma_{m\mu\nu}$. Приравнивая члены с одинаковыми степенями ε, получаем рекуррентные соотношения для $\sigma_{m\mu\nu}$:

$$D^{\mu\nu}\sigma_{0\lambda\nu} = I^\mu_\nu,$$

$$D^{\mu\lambda}\sigma_{1\lambda\nu} + i\,\{-g^{\mu\lambda}(\Box l + 2\nabla^\rho l\nabla_\rho) + a\,(\nabla^\mu\nabla^\lambda l + \nabla^\mu l\nabla^\lambda + \nabla^\lambda l\nabla^\mu)\}\,\sigma_{0\lambda\nu} = 0, \tag{10}$$

$$D^{\mu\lambda}\sigma_{m\lambda\nu} + i\,\{-g^{\mu\lambda}(\Box l + 2\nabla^\rho l\nabla_\rho) + a\,(\nabla^\mu\nabla^\lambda l + \nabla^\mu l\nabla^\lambda + \nabla^\lambda l\nabla^\mu)\}\,\sigma_{m-1\,\lambda\nu} + \\ + \{-g^{\mu\lambda}\Box + a\nabla^\mu\nabla^\lambda + X^{\mu\lambda}\}\,\sigma_{m-2\lambda\nu} = 0, \quad m\geqslant 2,$$

где

$$D^{\mu\lambda} = g^{\mu\lambda}(\nabla^\rho l\nabla_\rho l - \lambda) - a\nabla^\mu l\nabla^\lambda l. \tag{11}$$

Основное отличие от случая минимальных операторов [17, 18] состоит в том, что для получения $\sigma_{m\mu\nu}$ необходимо обратить матрицу $D^{\mu\nu}$ с последующим ее дифференцированием. На языке теории псевдодифференциальных операторов минимальные и неминимальные операторы различаются тем, что для первых главный символ — скалярная величина, а для вторых — это матричная величина. Для диагональных матричных элементов $\langle x, \mu\,|\,e^{-tH}\,|\,x, \nu\rangle$ из (4), (5) имеем

$$\langle x, \mu\,|\,e^{-tH}\,|\,x, \nu\rangle = \sum_{m\geqslant 0}\int\frac{d^n k}{(2\pi)^n\sqrt{g}}\int\limits_C\frac{i\,d\lambda}{2\pi}\,e^{-t\lambda}\,[\sigma_{m\mu\nu}](x, k, \lambda), \tag{12}$$

поэтому, чтобы получить разложение (1), необходимо решить рекуррентные соотношения (10) и взять предел совпадения. После довольно громоздких алгебраических выкладок находим (подробнее см. в [20])

$$[\sigma_{0\mu\nu}] = M_{\mu\nu}\cdot\mathbf{1}, \quad M_{\mu\nu}\equiv[D^{-1}_{\mu\nu}] = \frac{1}{k^2-\lambda}\left[g_{\mu\nu} + \frac{ak_\mu k_\nu}{(1-a)\,k^2-\lambda}\right],$$

$$[\sigma_{1\mu\nu}] = 0,$$

$$[\sigma_{2\mu\nu}] = \{-2\delta^\alpha_\beta (M^3)_{\mu\nu}\cdot g^{\sigma\lambda} + a[2\delta^\alpha_\beta (M^2)^\sigma_\mu M^\lambda_\nu + (M^2)^\alpha_\nu M_{\mu\beta} g^{\sigma\lambda} + M^\alpha_\mu (M^2)_{\beta\nu} g^{\sigma\lambda}] +$$
$$+ a^2 [M_{\mu\beta} M^{\alpha\sigma} M^\lambda_\nu + M^\alpha_\mu M^\sigma_\beta M^\lambda_\nu]\} k^\beta k^\gamma l_{\alpha\sigma\beta\gamma} + \{[-4\delta^\alpha_\beta \delta^\gamma_\sigma (M^2)^\lambda_\mu + 2a(\delta^\alpha_\sigma (M^2)_{\mu\beta} g^{\lambda\gamma} +$$
$$+ \delta^\alpha_\beta \delta^\lambda_\sigma (M^2)^\gamma_\mu + \delta^\gamma_\sigma (M_{\mu\beta} M^{\alpha\lambda} + M^\alpha_\mu M^\lambda_\beta)) + a^2 (g^{\lambda\gamma} (M_{\mu\beta} M^\alpha_\sigma + M^\alpha_\mu M_{\beta\sigma}) +$$
$$+ \delta^\lambda_\sigma (M_{\mu\beta} M^{\alpha\gamma} + M^\alpha_\mu M^\gamma_\beta))] k^\beta k^\sigma - (g^{\alpha\gamma} M^\lambda_\mu - a M^\alpha_\mu g^{\lambda\gamma})\} [\nabla_\alpha \nabla_\gamma \sigma_{0\lambda\nu}] - (MXM)_{\mu\nu}, \tag{13}$$

где

$$[\nabla_\mu \nabla_\nu \sigma_{0\lambda\rho}] = - M^\gamma_\lambda (2g_{\gamma\sigma} k^\alpha - a k_\gamma \delta^\alpha_\sigma - a k_\sigma \delta^\alpha_\gamma) M^\sigma_\rho k^\beta l_{\mu\nu\alpha\beta} + M_{\lambda\gamma} [\nabla_\mu \nabla_\nu I^\gamma_\rho],$$

и введено обозначение $[\nabla_\mu \nabla_\nu \cdots \nabla_\lambda l] \equiv k^\alpha l_{\mu\nu\ldots\lambda\alpha}$. Выражения для $[\sigma_{m\mu\nu}]$ являются полиномами по k и матрице $M_{\mu\nu}$, причем $[\sigma_{2m\mu\nu}]$ содержат четные степени k, а $[\sigma_{2m+1\mu\nu}]$ — нечетные степени k. Очевидно, нечетные коэффициенты $[\sigma_{2m+1\,\mu\nu}]$ не дадут вклада после интегрирования по k. Кроме того, как нетрудно видеть, $[\sigma_{m\mu\nu}]$ являются однородными функциями k и λ:

$$[\sigma_{m\mu\nu}](x, lk, l^2\lambda) = l^{-(m+2)} [\sigma_{m\mu\nu}](x, k, \lambda).$$

Этот факт после замены переменных $k \to k/t^{1/2}$, $\lambda \to \lambda/t$ в (12) приводит к разложению (1), где коэффициенты $E_{m\mu\nu}(x\,|\,H)$ определяются интегралами от $[\sigma_{m\mu\nu}]$ вида

$$E_{m\mu\nu}(x\,|\,H) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n \sqrt{g}} \int_C \frac{i d\lambda}{2\pi} e^{-\lambda} [\sigma_{m\mu\nu}](x, k, \lambda) \equiv \mathcal{J}([\sigma_{m\mu\nu}]). \tag{14}$$

При вычислении $[\sigma_{m\mu\nu}]$ встречаемся с необходимостью вычисления пределов совпадения несимметризованных ковариантных производных от l и I вида $[\nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\cdots\nabla_{\mu_m} l]$, $[\nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2}\cdots\nabla_{\mu_m} I]$. Выражения для них следуют из (6) и (9), приводя все члены к единому упорядочению индексов с использованием тождества Риччи для коммутатора ковариантных производных на объектах с индексами базового многообразия и слоя:

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\,\varphi_{\mu_1\ldots\mu_k} = -\sum_{i=1}^{k} R^\lambda_{\mu_i\mu\nu} \varphi_{\mu_1\ldots\mu_{i-1}\lambda\mu_{i+1}\ldots\mu_k} + W_{\mu\nu}\varphi_{\mu_1\ldots\mu_k}, \tag{15}$$

где

$$R^\lambda_{\rho\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\lambda_{\rho\nu} - \partial_\nu \Gamma^\lambda_{\rho\mu} + \Gamma^\lambda_{\sigma\mu}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} - \Gamma^\lambda_{\sigma\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\mu},$$
$$W_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu + [\omega_\mu, \omega_\nu]$$

являются кривизной риманового многообразия и расслоенного пространства соответственно ($\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ — аффинная связность, а ω_μ — связность расслоенного пространства). Например, учитывая скалярный характер функции l, для нижайших пределов совпадения получаем

$$[\nabla_\mu l] = k_\mu,\ \ [\nabla_\mu \nabla_\nu l] = 0,\ \ [\nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\lambda l] = -\frac{2}{3} k_\alpha R^\alpha_{(\lambda\mu\nu)}, \tag{16}$$

где скобки $(\lambda \ldots \nu)$ означают симметризацию по крайним индексам с коэффициентом 1/2 (заметим, что при выводе выражения (13) использовались первые два соотношения (16)).

Аналогичным образом получаем пределы совпадений для несимметризованных ковариантных производных функции $I^\mu_\nu(x, x')$:

$$[\nabla_\mu I^\lambda_\nu] = 0, \quad [\nabla_\mu \nabla_\nu I^\rho_\lambda] = -\frac{1}{2} R^\rho_{\lambda\mu\nu} + \frac{1}{2} W_{\mu\nu}\delta^\rho_\lambda,$$
$$[\nabla_\mu \nabla_\nu \nabla_\lambda I^\sigma_\rho] = -\frac{2}{3} \nabla_{(\mu} R^\sigma_{\rho\nu)\lambda} + \frac{2}{3} \nabla_{(\mu} W_{\nu)\lambda} \delta^\sigma_\rho \tag{17}$$

(для вычислений пределов совпадения 4-х и 5-ти ковариантных производных функций l и I см. [17, 18]).

Как следует из (13), наиболее общий интеграл, который приходится рассматривать при вычислении (14), имеет вид

$$\mathcal{I}\left[\frac{(k^2)^p k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_{2s}}}{(k^2-\lambda)^l\,[(1-a)\,k^2-\lambda]^m}\right] \equiv \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n \sqrt{g}}\,(k^2)^p k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_{2s}} \times$$

$$\times \int\limits_C \frac{id\lambda}{2\pi}\,\frac{e^{-\lambda}}{(k^2-\lambda)^l\,[(1-a)\,k^2-\lambda]^m}\,. \qquad (18)$$

Контурный интеграл может быть приведен к виду

$$\int\limits_C \frac{id\lambda}{2\pi}\,\frac{e^{-\lambda}}{(k^2-\lambda)^l\,[(1-a)\,k^2-\lambda]^m} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda}{2\pi}\,\frac{e^{-i\lambda}}{(k^2-i\lambda)^l\,[(1-a)\,k^2-i\lambda]^m}\,,$$

откуда после использования формулы из [24]

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\beta-ix)^{-\mu}\,(\gamma-ix)^{-\nu} e^{ipx}dx = 2\pi\,\frac{(-p)^{\mu+\nu-1}}{\Gamma(\mu+\nu)}\,e^{\beta p}\,{}_1F_1(\nu,\mu+\nu;(\gamma-\beta)\,p) \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} p>0 \\ p<0 \end{Bmatrix}, \quad \operatorname{Re}\beta, \operatorname{Re}\gamma, \operatorname{Re}(\mu+\nu-1)>0,$$

получаем

$$\int\limits_C \frac{id\lambda}{2\pi}\,\frac{e^{-\lambda}}{(k^2-\lambda)^l\,[(1-a)\,k^2-\lambda]^m} = \frac{e^{-k^2}}{\Gamma(l+m)}\,{}_1F_1(m,l+m;ak^2), \qquad a<1,$$

где ${}_1F_1(a, c; z)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Чтобы осуществить интегрирование по k, заметим, что для любой функции $f(k^2)$, для которой соответствующий интеграл сходится, можно записать

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n \sqrt{g}}\,k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_{2s}} f(k^2) = A(n,s)\,g_{\{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2s}\}} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n \sqrt{g}}\,(k^2)^s f(k^2), \quad (19)$$

где $g_{\{\mu_1\dots\mu_{2s}\}}$ — симметричный по всем индексам тензор, содержащий $(2s-1)$ слагаемых, каждое из которых есть произведение s метрических тензоров, например,

$$g_{\{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4\}} = g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} + g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_3}.$$

Следующее очевидное свойство тензора $g_{\{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2s}\}}$ относительно свертки по любой паре индексов:

$$g^{\mu_1\mu_2} g_{\{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2s}\}} = (n+2s-2)\,g_{\{\mu_3\mu_4\dots\mu_{2s}\}}$$

позволяет вычислить коэффициент $A(n,s)$ после умножения (19) на $g^{\mu_1\mu_2} g^{\mu_3\mu_4} \dots g^{\mu_{2s-1}\mu_{2s}}$:

$$A(n,s) = \frac{\Gamma(n/2)}{2^s\,\Gamma(n/2+s)}\,.$$

Интегрируя по угловым переменным в правой части (19), находим

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n \sqrt{g}} k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_{2s}} f(k^2) = g_{\{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2s}\}} \frac{1}{(4\pi)^{n/2} 2^s \Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right)} \times$$

$$\times \int_0^\infty dk^2 (k^2)^{\frac{n-2}{2}+s} f(k^2), \quad k^2 = g^{\mu\nu} k_\mu k_\nu. \tag{20}$$

Воспользовавшись теперь формулой [24]

$$\int_0^\infty e^{-st} t^{b-1} {}_1F_1(a, c; kt)\, dt = \Gamma(b)\, s^{-b} F(a, b, c; ks^{-1}), \quad |s| > |k|,$$

получаем

$$\mathcal{I}\left[\frac{(k^2)^p k_{\mu_1} k_{\mu_2} \dots k_{\mu_{2s}}}{(k^2-\lambda)^l [(1-a)k^2-\lambda]^m}\right] = g_{\{\mu_1\mu_2\dots\mu_{2s}\}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+s+p\right)}{(4\pi)^{n/2} 2^s \Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right)\Gamma(l+m)} \times$$

$$\times F\left(m, \frac{n}{2}+s+p, l+m; a\right), \quad a < 1, \tag{21}$$

$F(a, b, c; z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Заметим, что ограничение $a < 1$ не является дефектом рассматриваемого метода. Матрица $M^{-1}_{\mu\nu}(\lambda = 0) = k^2 g_{\mu\nu} - a k_\mu k_\nu$ является главным символом дифференциального оператора (3) и имеет два различных собственных значения $\lambda_1 = k^2$, $\lambda_2 = (1-a)k^2$. Условие $a < 1$ необходимо, таким образом, для положительной определенности главного символа и соответственно эллиптичности оператора (3).

Для целых m и l гипергеометрическая функция в (21) может быть выражена через элементарные функции, если воспользоваться [25] соотношением

$$F(1, b, m; z) = (m-1)!\, \frac{(-z)^{1-m}}{(1-b)_{m-1}} \left[(1-z)^{m-b-1} - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{(b-m+1)_k}{k!} z^k\right], \tag{22}$$

$(a)_k = a(a+1)\cdot \dots \cdot (a+k-1)$ — символ Похгаммера, $m - b \neq 1, 2, \dots$, и формулами дифференцирования гипергеометрических функций. После некоторой алгебры из (13), (14), (21) и (22) получаем окончательное выражение для нижайших ДВСГ коэффициентов

$$E_{0\mu\nu}(x\,|\,H) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} g_{\mu\nu} \left\{1 + \frac{1}{n}\left[(1-a)^{-n/2} - 1\right]\right\}, \tag{23}$$

$$E_{2\mu\nu}(x\,|\,H) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \left\{ g_{\mu\nu} R \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{4\left(\frac{n}{2}-1\right)_3}\left(\left(\frac{n}{2}-1\right)(1-a)^{-n/2} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{3}\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)(1-a)^{1-n/2} - 2\,\frac{(1-a)^{1-n/2}-1}{a} - \frac{n^2-4n+12}{12}\right)\right] +$$

$$+ R_{\mu\nu} \frac{1}{2\left(\frac{n}{2}-1\right)_3}\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)(1-a)^{-n/2} - \frac{1}{3}\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)(1-a)^{1-n/2} + \right.$$

$$\left. + n\,\frac{(1-a)^{1-n/2}-1}{a} - \frac{5n^2-8n-12}{12}\right] + W_{\mu\nu} \frac{1}{\left(\frac{n}{2}-1\right)_2} \times$$

$$\times\left[\frac{n}{4}(1-a)^{1-n/2}-2\,\frac{(1-a)^{1-n/2}-1}{a}+\frac{3n-8}{4}\right]-$$

$$-X_{(\mu\nu)}\left[1+\frac{1}{2\left(\frac{n}{2}-1\right)_3}\left(\left(\frac{n}{2}-1\right)(1-a)^{-n/2}+n\,\frac{(1-a)^{1-n/2}-1}{a}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{n^2-n-2}{2}\right]-X_{[\mu\nu]}\left[1+\frac{1}{\left(\frac{n}{2}-1\right)_2}\left(\frac{(1-a)^{1-n/2}-1}{a}-\frac{n-2}{2}\right)\right]-$$

$$-g_{\mu\nu}X^{\lambda}_{\lambda}\frac{1}{4\left(\frac{n}{2}-1\right)_3}\left[\left(\frac{n}{2}-1\right)(1-a)^{-n/2}-2\,\frac{(1-a)^{1-n/2}-1}{a}+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{n-2}{2}\right]\right\}, \qquad (24)$$

$$X_{(\mu\nu)}=\frac{1}{2}(X_{\mu\nu}+X_{\nu\mu}),\quad X_{[\mu\nu]}=\frac{1}{2}(X_{\mu\nu}-X_{\nu\mu}).$$

Отметим, что по сравнению с аналогичными коэффициентами для минимальных операторов второго порядка коэффициенты $E_m(x\,|\,H)$ для неминимальных операторов зависят нетривиальным образом от размерности пространства n. Этот факт был ранее известен только для операторов четвертого порядка [17, 18, 26].

Нетрудно проверить, что для оператора (2) ($X_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}$, $W_{\mu\nu}=0$, $a=1-1/\alpha$) коэффициенты (23), (24) совпадают при $n=4$ с соответствующими коэффициентами, полученными в [22]. Однако, метод, использованный в [22], связан с конкретной формой оператора (2) и не применим для операторов более общего вида, подобных (3). В конформной геометрии важную роль играют конформно-ковариантные операторы, в частности, полученные результаты могут быть применены к конформно-ковариантным операторам на векторах [27, 28], которые следуют из (3), если положить

$$a=\frac{4}{n},\quad X_{\mu\nu}=\frac{n(n-4)}{4(n-1)(n-2)}Rg_{\mu\nu}+\frac{2}{n-2}R_{\mu\nu},\quad W_{\mu\nu}=0.$$

Гилки, Брансон и Фуллинг [29] ввели в рассмотрение так называемые естественные дифференциальные операторы на k-формах вида

$$D=\tilde{a}^2d\delta+\tilde{b}^2\delta d-E, \qquad (25)$$

где $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ — константы, E — оператор нулевого порядка (эндоморфизм), действующий в расслоении внешних k-форм с базовым многообразием M. При $k=1$ оператор (25) может быть отождествлен с (3), если положить $\tilde{a}^2=1-a$, $\tilde{b}^2=1$, $E_{\mu\nu}=R_{\mu\nu}-X_{\mu\nu}$, $W_{\mu\nu}=0$. Используя (23), (24), можно вычислить глобальные инварианты $E_m(D)=\int\limits_M \operatorname{tr}E_m(x\,|\,D)$, например,

$$E_0(D)=[n+(1-a)^{-n/2}-1]\operatorname{vol}(M), \qquad (26)$$

$$E_1(D)=\int\limits_M\left\{\left[\frac{n}{6}-1+\frac{1}{6}((1-a)^{1-n/2}-1)R\right]+\right.$$

$$\left.+\left[1+\frac{1}{n}((1-a)^{-n/2}-1)\right]\operatorname{tr}E\right\},$$

которые согласуются с аналогичными результатами, полученными в [29] комбинаторными методами.

В заключение обсудим более подробно вопрос о причине неприменимости анзаца Де Витта к дифференциальным операторам порядка $2r>2$, о чем кратко упоминалось в начале статьи. Для операторов второго порядка соответствующий анзац имеет вид

$$\langle x \,|\, e^{-tH} \,|\, x' \rangle = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-\frac{\sigma(x,x')}{2t}} \Delta^{1/2}(x,x') \sum_{m\geqslant 0} a_m(x,x')\, t^{\frac{m-n}{2}}, \quad (27)$$

где $\Delta(x,x') = g^{-1/2} \det(-\nabla_\mu \nabla_{\nu'} \sigma)(g')^{-1/2}$, $g = g(x) = \det g_{\mu\nu}(x)$, $g' \equiv g(x')$ и $\det(-\nabla_\mu\nabla_{\nu'}\sigma)$ — детерминант Ван — Флека — Моретт [9]. Подстановка выражения (27) в уравнение теплопроводности приводит к рекуррентным соотношениям

$$\begin{gathered}\nabla^\mu \sigma \nabla_\mu a_0(x,x') = 0, \quad [a_0] = 1, \\ \nabla^\mu\sigma\nabla_\mu a_{m+1} + (m+1)\, a_{m+1} = \Delta^{-1/2}[\Box(\Delta^{1/2} a_m)] - X\cdot a_m, \quad m = 0, 1, \ldots .\end{gathered} \quad (28)$$

Покажем, что в случае дифференциальных операторов более высокого порядка асимптотическое разложение теплового ядра при $t \to 0_+$ имеет вид, отличный от (27), что не позволяет получить для коэффициентов E_m простых рекуррентных соотношений типа (28). Как следует из [17, 18], а также из очевидного обобщения формулы (12) на случай недиагональных матричных элементов $(x \neq x')$ разложение ядра теплопроводности в этом случае имеет вид

$$\langle x \,|\, e^{-tH} \,|\, x' \rangle = \sum_{m\geqslant 0} \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n \sqrt{g'}} e^{il(x,x',k)} \int\limits_C \frac{id\lambda}{2\pi} e^{-t\lambda} \sigma_m(x,x',k;\lambda). \quad (29)$$

Для доказательства последнего утверждения достаточно рассмотреть только первый член $(m = 0)$ в (29). Для минимальных операторов порядка $2r$

$$\sigma_0(x,x',k;\lambda) = \frac{1}{(\nabla^\mu l \nabla_\mu l) - \lambda} I(x,x'),$$

и после интегрирования по λ получаем

$$\int \frac{d^n k}{(2\pi)^n \sqrt{g'}} e^{-t(\nabla^\mu l \nabla_\mu l)^r + il(x,x',k)} I(x,x') = \mathcal{I}(\sigma_0). \quad (30)$$

Для пространств, снабженных метрикой, можно воспользоваться разложением в ковариантный ряд Тейлора

$$f(x) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n!} [\{\nabla_{\mu_1}\nabla_{\mu_2} \cdots \nabla_{\mu_n}\} l]\, \nabla^{\mu_1'}\sigma(x,x')\, \nabla^{\mu_2'}\sigma(x,x') \ldots \nabla^{\mu_n'}\sigma(x,x'),$$

справедливым для произвольной скалярной функции $f(x)$ [21]. С учетом соотношений (6) находим

$$l(x,x',k) = -k_{\mu'}\nabla^{\mu'}\sigma(x,x'),$$

и интеграл (30) принимает вид

$$\mathcal{I}(\sigma_0) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n \sqrt{g'}} e^{-t[k_{\mu'}\nabla^\mu\nabla^{\mu'}\sigma\nabla_\mu\nabla^{\nu'}\sigma]^r - ik_{\mu'}\nabla^{\mu'}\sigma} I(x,x'). \quad (31)$$

Рассмотрим вначале несколько более общий интеграл по k

$$I = \int d^n k f(k_\mu A^{\mu\nu} k_\nu)\, e^{ib^\mu k_\mu}, \quad (32)$$

где функция $f(x)$ такова, что интеграл (32) сходится, матрица A положительно определенная. Осуществляя ортогональное преобразование $k = O\cdot k'$ и переходя затем к полярным координатам, приведем (32) к виду

$$I = \int d^n k' f(a_1 k_1'^2 + a_2 k_2'^2 + \ldots + a_n k_n'^2)\, e^{ib'\cdot k'} = \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n}} \int d^n k f(k^2) \times$$

$$\times e^{il^\mu k_\mu} = (\det A)^{-1/2} \int_0^\infty dk k^{n-1} f(k^2) \int d\Omega_n e^{il^\mu k_\mu} = (\det A)^{-1/2} \times$$

$$\times \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\infty dk k^{n-1} f(k^2) \int_0^\pi d\theta \sin^{n-2}\theta e^{i|l|\cdot k \cdot \cos\theta}, \tag{33}$$

где

$$O^T A O = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \cdot & \\ & \cdot & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}, \quad b' = b \cdot O, \quad l^\mu = \left(\frac{b_1'}{\sqrt{a_1}}, \frac{b_2'}{\sqrt{a_2}}, \ldots, \frac{b_n'}{\sqrt{a_n}}\right),$$

$$|l| = \left(\frac{b_1'^2}{a_1} + \frac{b_2'^2}{a_2} + \ldots + \frac{b_n'^2}{a_n}\right)^{1/2} = (b \cdot A^{-1} \cdot b)^{1/2}.$$

Интеграл по θ вычисляется с помощью формулы [24]

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{\beta-1} \cos bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\frac{2}{b}\right)^{\beta-1/2} \Gamma(\beta) \mathcal{J}_{\beta-1/2}(b),$$

$$\operatorname{Re}\beta > 0, \quad |\arg b| < \pi.$$

В итоге

$$I = (\det A)^{-1/2} \left(\frac{2}{|l|}\right)^{\frac{n-2}{2}} 2\pi^{n/2} \int_0^\infty dk k^{n/2} f(k^2) \mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(|l| k). \tag{34}$$

Для функции $f(x) = e^{-x^r}$ вычислим интеграл (34); используя для функции Бесселя разложение в ряд, имеем

$$I = \frac{\pi^{n/2}}{(\det A)^{1/2}} \Phi\left(\frac{bA^{-1}b}{4r}\right), \tag{35}$$

где $\Phi(z)$ определяется рядом

$$\Phi(z) = \frac{1}{r} \sum_{m=0}^\infty \frac{(-z)^m \Gamma\left(\frac{m}{r} + \frac{n}{2r}\right)}{m! \, \Gamma\left(m + \frac{n}{2}\right)}. \tag{36}$$

В рассматриваемом случае $A^{\mu'\nu'} = t^{1/r} \nabla^\mu \nabla^{\mu'} \sigma \nabla_\mu \nabla^{\nu'} \sigma$, $b^{\mu'} = -\nabla^{\mu'}\sigma$. Для производных от геодезического интервала справедливы соотношения [9]

$$\nabla_\mu \nabla^{\nu'} \sigma \nabla_{\nu'} \sigma = \nabla_\mu \sigma, \quad \nabla^\mu \sigma \nabla_\mu \sigma = 2\sigma. \tag{37}$$

Тогда

$$bA^{-1}b = \frac{2\sigma}{t^{1/r}}, \quad \det A = t^{n/r} g^{-1} \det{}^2(-\nabla_\mu \nabla_{\nu'} \sigma)(g')^{-2},$$

и окончательно для $\mathcal{J}(\sigma_0)$ из (31), (35) находим

$$I(\sigma_0) = \frac{1}{(4\pi t^{1/r})^{n/2}} \Delta^{-1}(x, x') \Phi\left(\frac{\sigma}{2rt^{1/r}}\right) I(x, x'). \tag{38}$$

Очевидно из (36), что для $r = 1$ $\Phi(z) = e^{-z}$, и мы приходим к анзацу Де Витта, где соотношение

$$\Delta^{3/2}(x, x') a_0(x, x') = I(x, x') \tag{39}$$

устанавливает связь между функцией параллельного транспорта $a_0(x, x')$ и введенной нами с помощью условий (9) функцией $I(x, x')$. Заметим, что

(39) не зависит от порядка оператора и представляет собой соотношение между чисто геометрическими величинами, характеризующими данное расслоенное многообразие.

Для $r \neq 1$ функция $\Phi(z)$ не сводится к элементарной функции или к какой-либо известной спецфункции. Если мы попытаемся модифицировать анзац Де Витта, заменив $e^{-\sigma/2t}$ на $\Phi(\sigma/2rt^{1/r})$, то это приводит к рекуррентным соотношениям для E_m, неограниченным как сверху, так и снизу (т. е. $m \in Z$), что не позволяет получить решение соответствующей системы. На эту трудность было обращено внимание в работе [16], где соответствующий анализ проводился в плоском пространстве. Развиваемый нами метод, использующий технику псевдодифференциальных операторов, позволяет обойти эту проблему, так как здесь нигде не используется какой-либо частный анзац для матричных элементов ядра теплопроводности.

1. *Бирелл П., Дэвис П.* Квантованные поля в искривленном пространстве времени.— Мир, 1984.— 356 с.
2. *Dowker J. S.* Another Discussion of the Axial Vector Anomaly and the Index Theorem // J. Phys. A.— 1978.— **11**, N 2.— P. 347—360.
3. *Brown L. S.* Stress-Tensor Trace Anomaly in a Gravitational Metric : Scalar Fields // Phys. Rev.— 1977.— D**15**, N 6.— P. 1469—1483.
4. *Dowker J. S. Critchley R.* Stress-Tensor Conformal Anomaly for Scalar, Spinor and Vector Field // Ibid.— N **12**.— P. 3390—3394.
5. *Atiyah M. F., Bott R., Patodi V. K.* On the Heat Equation and the Index Theorem // Invent Math.— 1973.— **19**.— P. 279—330.
6. *Gilkey P. B.* Index Theorem and the Heat Equation.— Publish or Perish Boston 1974.— 125 p.
7. *Бухбиндер И. Л., Гусынин В. П., Фомин П. И.* Функциональные детерминанты и эффективное действие для конформных скалярных и спинорных полей во внешнем гравитационном поле // Ядер. физика.— 1986.— **44**, № 3.— С. 828—838.
8. *Blau S., Visser M., Wipf A.* Determinants of Conformal Wave Operators in Four Dimensions // Phys. Lett.— 1988.— **209**B, N 23.— P. 209—213.
9. *De Witt B.* Dynamical Theory of Groups and Fields.— Gordon and Breach, 1965.— 248 p.
10. *Seeley R. T.* Complex Powers of an Elliptic Operator // Proc. Symp. Pure Math., Amer. Math. Soc.— 1967.— **10**.— P. 288—307.
11. *Gilkey P. B.* The Spectral Geometry of a Riemannian Manifold // J. Diff. Geom.— 1975.— **10**, N 4.— P. 601—618.
12. *Sakai T.* On the Eigenvalues of the Laplacian and Curvature of Riemannian Manifold // Tohuku. Math. J. — 1971.— **23**.— P. 585—603.
13. *Авраміди И. Г.* Вычисления во внешних полях в квантовой теории поля // Теорет. и мат. физика.— 1989.— **79**, № 12.— С. 219—231.
14. *McAvity D. M., Osborn H.* A De Witt Expansion of the Heat Kernel for Manifolds with a Boundary // Class. and Quan. Gravity.— 1991.— **8**.— P. 603—614.
15. *Lee H. W., Pac P. Y.* Higher-Derivative Operators and DeWitt's WKB Ansatz // Phys. Rev.— 1986.— D**33**, N 4.— P. 1012—1017.
16. *Carinhas P. A., Fulling S. A.* Computational Asymptotics of Fourth-Order Operators.— Preprint of Texas Univ., 1989.
17. *Gusynin V. P.* New Algorithm for Computing the Coefficients in the Heat Kernel Expansion // Phys. Lett. B.— 1989.— **225**, N 3.— P. 233—239.
18. *Gusynin V. P.* Seeley-Gilkey Coefficients for the Fourth-Order Operators on a Riemannian Manifold // Nucl. Phys. B. — 1990.— **333**, N 2.— P. 296—316.
19. *Widom H.* A Complete Symbolic Calculus for Pseudodifferential Operators // Bull. sci. math. —1980.— **104**, N 1.— P. 19—63.
20. *Gusynin V. P., Gorbar E. V., Romankov V. V.* Heat Kernel Expansion for Nonminimal Differential Operators and Manifolds with Torsion // Nucl. Phys. B.— 1991.— **362**, N 3.— P. 449—471.
21. *Barvinsky A. O., Vilkovisky G. A.* The Generalized Schwinger — De Witt Technique in Gauge Theories and Quantum Gravity // Phys. Repts.— 1985.— **119**, N 1.— P. 1—74.
22. *Endo R.* Gauge Dependence of the Gravitational Conformal Anomaly for the Electromagnetic Field // Progr. Theor. Phys.— 1984.— **71**, N 6.— P. 1366—1384.
23. *Brown L. S., Cassidy J. P.* Stress-Tensor Trace Anomaly in Gravitational Metric : General Theory, Maxwell Field // Phys. Rev.— 1977.— D**15**, N 10.— P. 2810—2829.
24. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М. : Наука, 1971.— 1108 с.
25. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев С. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы.— М. : Наука, 1986.— 800 с.
26. *Gilkey P. B.* The Spectral Geometry of the Higher Order Laplacian // Duke Math. J.— 1980.— **47**, N 3.— P. 511—528.
27. *Branson T. P.* Conformally Covariant Equations on Differential Forms // Comm. in P. D. E.— 1982.— **7**, N 2.— P. 393—431.

28. *Гусынин В. П., Романьков В. В.* Конформно-ковариантные операторы и эффективное действие во внешнем гравитационном поле // Ядер. физика.— 1987.— **46**, вып. 6.— С. 1832—1837.
29. *Gilkey P. B., Branson T. P., Fulling S. A.* Heat Equation Asymptotics of «Nonminimal» Operators on Differential Forms.— (to appear).

Получено 28,06.91