УДК 517.3

КАН ВАН ТУАТ, канд. физ.-мат. наук (Ханой. пед. ин-т)

Об экспоненциальной дихотомии и устойчивости дифференциальной системы с запаздывающими аргументами

Рассматриваются вопросы экспоненциальной дихотомии систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Розглядається питання експоненціальної дихотомії систем диференціальних рівнянь з аргументом, що запізнюється.

1. Вопросы экспоненциальной дихотомии решений дифференциальных систем с запаздывающими аргументами изучены в ряде работ. G. Pecceli [1, 2] получил результаты, обобщающие результаты Коффмана и Шеффера

для обыкновенных дифференциальных систем на случай дифференциальных систем с запаздывающими аргументами. З. П. Ордынская [3] установила поведение решений нелинейной дифференциальной системы с запаздывающими аргументами в окрестности инвариантного тора при $t \to \pm \infty$.

В настоящей работе изучается экспоненциальная дихотомия решений нелинейной дифференциальной системы с запаздывающими аргументами, имеющей возмущение порядка $q > 1$

Рассмотрим систему

$$dx/dt = A(t)\,x(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)\,x(t-\tau_j) + f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m)), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t)$, $B_j(t)$, $j = \overline{1, m}$ — $(n \times n)$-непрерывные и ограниченные на $\mathbb{R}$ матрицы, f — непрерывная по всем аргументам функция, удовлетворяющая условию Лифшица с некоторой постоянной и

$$\| f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_m)) \| \leqslant K_1 \Big(\sum_{j=0}^{m} \| x(t-\tau_j) \| \Big)^q, \tag{2}$$

$$K_1 > 0, \quad q > 1, \quad \tau_0 = 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_m, \quad \tau_j - \text{const}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Пусть

$$|||\, x(t) \,||| = \sup_{t-\tau_m \leqslant \xi \leqslant t} \| x(\xi) \|.$$

О п р е д е л е н и е 1. *Будем говорить, что для решений системы* (1) *имеет место экспоненциальная дихотомия* (на $\mathbb{R}$), *если при* $t_0 \in \mathbb{R}$ *существуют многообразия* $M^+(t_0)$ и $M^-(t_0)$ ($\mathbb{R}^n = M^+(t_0) \oplus M^-(t_0)$), *и числа* $\nu_1 > 0$, $\nu_2 > 0$ *такие, что для решения* $x(t)$ *системы* (1) *справедливы неравенства*

$$\| x(t) \| \leqslant C_1 e^{-\nu_1 (t-t_0)} |||\, x(t_0) \,|||, \quad t \geqslant t_0, \tag{3}$$

если $x(t_0) \in M^+(t_0)$ *и* $C_1 > 0$ *зависит только от* $\nu_1 > 0$,

$$\| x(t) \| \leqslant C_2 e^{\nu_2 (t-t_0)} |||\, x(t_0) \,|||, \quad t \leqslant t_0, \tag{4}$$

если $x(t_0) \in M^-(t_0)$ *и* $C_2 > 0$ зависит только от $\nu_2 > 0$.

При этом [4]

$$S_n(M^+, M^-) = \inf_{\substack{|||\, x_1 \,||| = 1 \\ |||\, x_2 \,||| = 1}} |||\, x_1 + x_2 \,||| \geqslant \gamma > 0. \quad (x_1 \in M^+,\ x_2 \in M^-) \tag{5}$$

Наряду с системой (1) рассмотрим соответствующую линейную систему

$$dy/dt = A(t)\,y. \tag{6}$$

Пусть $X(t, t_0)$ — фундаментальная матрица системы (6).

О п р е д е л е н и е 2. *Будем говорить, что матрица решений* $X(t, t_0)$ *системы* (6) *распадается в блоки*

$$X(t, t_0) = [X_p(t, t_0), X_{n-p}(t, t_0)], \quad 1 < p < n,$$

если существует множество пар вещественных чисел $\{\rho\}$ *такое, что для каждой пары чисел* $(R, r) \in \{\rho\}$ *выполняются условия*

$$\| X_p(t, s) \| \leqslant N_{\rho q} e^{R(t-s) + (q-1)(s-t_0) r}, \quad s \leqslant t, \tag{7}$$

$$\| X_{n-p}(t, s) \| \leqslant M_{\rho q} e^{-R(t-s) - (q-1)(s-t_0) r}, \quad t \leqslant s. \tag{8}$$

Положим

$$\Omega_q = \inf \{R + r\}, \quad (R, r) \in \{\rho\}. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть*

1) *для системы* (6) *существует матрица Коши* $X(t, t_0)$, *удовлетворяющая условиям определения* 2 *с достаточно малыми числами* $N_{\rho q}$ *и* $M_{\rho q}$;

2) *множество* $\{\rho\}$ *ограничено и*

$$\alpha = \inf\{R\} < 0, \quad \beta = \inf\{r\} < 0, \tag{10}$$
$$(R, r) \in \{\rho\};$$

3) *выполняется равенство*

$$\inf \frac{G(X)}{G(X_p)\, G(X_{n-p})} = \mu > 0, \quad 1 < p < n. \tag{11}$$

Тогда имеет место экспоненциальная дихотомия решений системы (1).

Доказательство. На основании теоремы 20.3.1 [5, с. 267] для системы (6) существует преобразование Ляпунова

$$x = L(t)\,\xi \tag{12}$$

($L(t)$ — $(n \times n)$-матрица Ляпунова), переводящее систему (6) в систему

$$d\xi/dt = P(t)\,\xi, \tag{13}$$

имеющую блочно-треугольный вид; ее фундаментальная матрица тоже имеет блочно-треугольный вид.

Не уменьшая общности предположим, что система (6) имеет блочно-треугольный вид при некотором p:

$$A(t) = \operatorname{diag}[A_p(t), A_{n-p}(t)].$$

Более того, предположим, что ее матрица Коши $X(t, t_0)$ имеет тоже блочно-треугольный вид

$$X(t, t_0) = \operatorname{diag}[X_p(t, t_0), X_{n-p}(t, t_0)].$$

Пусть $\varphi(t) = \operatorname{colon}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_p(t), 0, \ldots, 0)$, $t \in [t_0 - \tau_m, t_0]$, — начальная функция решения $x(t)$ системы (1).

Введем преобразование

$$x = e^{-\lambda t}\mathfrak{z} \tag{14}$$

($\lambda > 0$ будет выбрана ниже, см. (30)). Тогда система (1) будет иметь вид

$$d\mathfrak{z}/dt = P(t)\,\mathfrak{z} + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\,\mathfrak{z}(t-\tau_j) + F(t, \mathfrak{z}(t), \mathfrak{z}(t-\tau_1), \ldots, \mathfrak{z}(t-\tau_m)), \tag{15}$$

где

$$P(t) = A(t) + \lambda E, \quad Q_j(t) = B_j(t)\, e^{\lambda E \tau_j}, \quad j = \overline{1, m},$$
$$F(t, \mathfrak{z}(t), \ldots) = e^{\lambda t} f(t, e^{-\lambda t}\mathfrak{z}(t), e^{-\lambda(t-\tau_1)}\mathfrak{z}(t-\tau_1), \ldots),$$
$$\| F(t, \mathfrak{z}(t), \ldots) \| \leqslant K_1 e^{\lambda q \tau_m} e^{-\lambda(q-1)t} \Big(\sum_{j=0}^{m} \| \mathfrak{z}(t-\tau_j) \| \Big)^q.$$

Пусть достаточно большое $t_0 > 0$ такое, что

$$\gamma_g = K_1 e^{\lambda q \tau_m} e^{-\lambda(q-1)t_0}$$

— достаточно малое. Тогда имеем

$$\| F(t, \mathfrak{z}(t), \ldots) \| \leqslant \gamma_q \Big(\sum_{j=0}^{m} \| \mathfrak{z}(t-\tau_j) \| \Big)^q, \quad t \geqslant t_0. \tag{16}$$

Видно, что матрица

$$Z(t, t_0) = e^{\lambda E(t-t_0)} X(t, t_0)$$

является матрицей Коши системы

$$d\mathfrak{z}/dt = P(t)\,\mathfrak{z}. \tag{17}$$

Более того,

$$Z(t, t_0) = [Z_p(t, t_0), \quad Z_{n-p}(t, t_0)]$$

и

$$\begin{aligned} \| Z_p(t, s) \| &\leqslant N_{\rho q} e^{(R+\lambda)(t-s)+(q-1)r(s-t_0)}, \quad s \leqslant t, \\ \| Z_{n-p}(t, s) \| &\leqslant M_{\rho q} e^{-(R-\lambda)(t-s)-(q-1)r(s-t_0)}, \quad t \leqslant s. \end{aligned} \tag{18}$$

Положим

$$\mathfrak{z} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} P_p(t) & 0 \\ 0 & P_{n-p}(t) \end{bmatrix}, \quad Q_j = \begin{bmatrix} Q_j^{(11)} & Q_j^{(12)} \\ Q_j^{(21)} & Q_j^{(22)} \end{bmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} F_p \\ F_{n-p} \end{pmatrix}.$$

Система (15) запишется в виде двух систем:

$$\begin{aligned} du/dt &= P_p(t)\,u(t) + \sum_{j=1}^{m} [Q_j^{(11)}(t)\,u(t-\tau_j) + Q_j^{(12)}(t)\,v(t-\tau_j)] + F_p(t, \mathfrak{z}(t), \ldots), \\ dv/dt &= P_{n-p}(t)\,v(t) + \sum_{j=1}^{m} [Q_j^{(21)}(t)\,u(t-\tau_j) + Q_j^{(22)}(t)\,v(t-\tau_j)] + \\ &\quad + F_{n-p}(t, \mathfrak{z}(t), \ldots). \end{aligned} \tag{19}$$

Тогда $\overline{\varphi}(t) = \operatorname{colon}(e^{-\lambda t}\varphi_1(t), \ldots, e^{-\lambda t}\varphi_p(t), 0, \ldots, 0)$, $t \in [t_0 - \tau_m, t_0]$, — начальная функция решения $\mathfrak{z}(t)$ системы (15) такая, что

$$\mathfrak{z}(t_0) = \begin{pmatrix} u(t_0) \\ v(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{\varphi}(t_0) \\ 0 \end{pmatrix} \in M^+(t_0) \tag{20}$$

и $|||\overline{\varphi}(t_0)||| = \sup \|\overline{\varphi}(t)\|$, $t_0 - \tau_m \leqslant t \leqslant t_0$, $|||\overline{\varphi}(t_0)||| < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$.

Система (19) при начальном условии (20) эквивалентна следующей интегральной системе:

$$\begin{aligned} u(t) &= Z_p(t, t_0)\,u(t_0) + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} Z_p(t, s)\,[Q_j^{(11)}(s) u(s-\tau_j) + Q_j^{(12)}(s)\,v(s-\tau_j)]\,ds + \\ &\quad + \int_{t_0}^{t} Z_p(t, s)\,F_p(s, \mathfrak{z}(s), \mathfrak{z}(s-\tau_1), \ldots, \mathfrak{z}(s-\tau_m))\,ds, \\ v(t) &= -\sum_{j=1}^{m} \int_{t}^{+\infty} Z_{n-p}(t, s)\,[Q_j^{(21)}(s)\,u(s-\tau_j) + Q_j^{(22)}(s)\,v(s-\tau_j)]\,ds + \\ &\quad + \int_{t}^{+\infty} Z_{n-p}(t, s)\,F_{n-p}(s, \mathfrak{z}(s), \mathfrak{z}(s-\tau_1), \ldots, \mathfrak{z}(s-\tau_m))\,ds. \end{aligned} \tag{21}$$

Будем искать решения предыдущей системы методом последовательных приближений. Пусть

$$\mathfrak{z}_k(t) = \begin{pmatrix} u_k(t) \\ v_k(t) \end{pmatrix}, \quad k \geqslant 1.$$

Положим

$$u_k(t) = \overline{\varphi}(t), \quad v_k(t) = 0, \quad k \geqslant 1, \tag{22}$$

при $t_0 - \tau_m \leqslant t \leqslant t_0$.

Предположим, что

$$\| u_k(t) \| \leqslant C_{\rho q} e^{(R+\lambda)(t-t_0)}\, |||u(t_0)|||, \tag{23}$$

где $C_{\rho q} = \max\{N_{\rho q}, M_{\rho q}\} < 1$.

Полагая

$$u_1(t)=Z_p(t,t_0)\,u(t_0),\quad v_1(t)=0, \tag{24}$$

при $t\geqslant t_0$ имеем

$$\|\mathfrak{z}_1(t)\|=\|u_1(t)\|\leqslant C_{\rho q}e^{(R+\lambda)(t-t_0)}\,|||u(t_0)|||. \tag{25}$$

В случае $k\geqslant 2$ положим

$$u_k(t)=Z_p(t,t_0)\,u(t_0)+\sum_{j=1}^{m}\int_{t}^{t}Z_p(t,s)\,[Q_j^{(11)}(s)\,u_{k-1}(s-\tau_j)+$$
$$+Q_j^{(12)}(s)\,v_{k-1}(s-\tau_j)]\,ds+\int_{t_0}^{t}Z_p(t,s)\,F_p(s,\mathfrak{z}_{k-1}(s),\mathfrak{z}_{k-1}(s-\tau_1),\ldots$$
$$\ldots,\mathfrak{z}_{k-1}(s-\tau_m))\,ds, \tag{26}$$

$$v_k(t)=-\sum_{j=1}^{m}\int_{t}^{+\infty}Z_{n-p}(t,s)\,[Q_j^{(21)}(s)\,u_{k-1}(s-\tau_i)+Q_j^{(22)}(s)\,v_{k-1}(s-\tau_j)]\,ds+$$
$$+\int_{t}^{+\infty}Z_{n-p}(t,s)\,F_{n-p}(s,\mathfrak{z}_{k-1}(s),\mathfrak{z}_{k-1}(s-\tau_1),\ldots,\mathfrak{z}_{k-1}(s-\tau_m))\,ds.$$

Докажем, что при $t\geqslant t_0$

$$\|u_k(t)\|\leqslant C_1C_k\,|||u(t_0)|||\,e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)},$$
$$\|v_k(t)\|\leqslant C_1C_k\,\|u(t_0)\,|||\,e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)}, \tag{27}$$

где

$$C_1=C_{\rho q}\left[1+\frac{mMC_{\rho q}e^{b\tau_m}+\gamma_q(m+1)^q(C_{\rho q}\varepsilon_0)^{q-1}}{a}\,e^{b\tau_m}\right],$$
$$C_k=1+C_{\rho q}C_{k-1}\frac{2mM+\gamma_q(m+1)^q(\varepsilon_0C_1C_{k-1})^{q-1}}{a}\,e^{b\tau m}, \tag{28}$$
$$M=\max_j\{\sup_t\|Q_j(t)\|\},\quad D=\sup_t\|P(t)\|,$$

$$a=\min\{[(1-q)\,r+\varepsilon];\,[(1-q)(R+\lambda+\varepsilon)-\varepsilon];\,[(1-q)\,r-2R-\varepsilon]\}, \tag{29}$$
$$b=\max\{D;\,[(1-q)(R+r+\lambda)];\,-[R+\lambda+\varepsilon];\,[(1-q)\,r-2R]\}.$$

Заметим, что в доказательстве числа R и r удовлетворяют условиям $R<0$, $r<0$, а $\lambda>0$ и $\varepsilon>0$ такие, что

$$R+\lambda+\varepsilon\leqslant\alpha+\lambda+2\varepsilon<0,\quad(1-q)\,r-\varepsilon>0, \tag{30}$$

где $\alpha=\inf\{R\}$.

Докажем (27) методом индукции.

Предположив, что эти оценки справедливы при $k-1$, докажем, что они справедливы и для k. В силу (24), (23) и (18) имеем

$$\|u_k(t)\|\leqslant\|Z_p(t,t_0)\|\,|||u(t_0)|||+\sum_{j=1}^{m}\int_{t_0-\tau_j}^{t}\|Z_p(t,s+\tau_j)\|\times$$
$$\times[\|Q_j^{(11)}(s+\tau_j)\|\,\|u_{k-1}^{(j)}(s)\|+\|Q_j^{(12)}(s+\tau_j)\|\,\|v_{k-1}^{(j)}(s)\|]\,ds+$$
$$+\gamma_q\int_{t_0-\tau_j}^{t}\|Z_p(t,s+\tau_j)\|\Big(\sum_{j=0}^{m}\|\mathfrak{z}_{k-1}^{(j)}(s)\|\Big)^q dt,$$
$$\mathfrak{z}_{k-1}^{(j)}(s)=\mathfrak{z}_{k-1}(s_j),\quad\tau_0=0.$$

На основании неравенства Минковского [6] получаем

$$\| u_k(t) \| \leqslant C_{\rho q} ||| u(t_0) ||| e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)} + \sum_{j=1}^{m} C_{\rho q} M e^{b\tau_j} \times$$

$$\times \left[\frac{C_{\rho q} e^{(1-q)\tau_j}}{(1-q) r + \varepsilon} + \frac{2C_1 C_{k-1}}{(1-q) r + \varepsilon} \right] ||| u(t_0) ||| e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)} +$$

$$+ \gamma_q \left\{ \sum_{j=0}^{m} \left[\int_{t_0-\tau_j}^{t} \| Z_p(t, s+\tau_j) \| \, \| \mathfrak{z}_{k-1}^{(j)}(s) \|^q ds \right]^{\frac{1}{q}} \right\}^q$$

или из (20) и (29) имеем

$$\| u_k(t) \| \leqslant ||| u(t_0) ||| e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)} C_{\rho q} \left[1 + mMe^{b\tau_m} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{C_{\rho q} e^{b\tau_m} + 2C_1 C_{k-1}}{a} + \gamma_q (1+m)^q e^{b\tau_m} \varepsilon_0^{q-1} \frac{C_{\rho q}^q e^{q\tau_m} + (C_1 C_{k-1})^q}{a} \right].$$

Наконец, в силу (28) получаем

$$\| u_k(t) \| \leqslant C_1 C_k ||| u(t_0) ||| e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0.$$

Рассматривая теперь $\| v_k(t) \|$, имеем

$$\| v_k(t) \| \leqslant \sum_{j=1}^{m} M \int_{t-\tau_j}^{+\infty} \| Z_{n-p}(t, s+\tau_j) \| (\| u_{k-1}^{(j)}(s) \| + \| v_{k-1}^{(j)}(s) \|) ds +$$

$$+ \gamma_q \left\{ \sum_{j=0}^{m} \left[\int_{t-\tau_j}^{+\infty} \| Z_{n-p}(t, s+\tau_j) \| \, \| \mathfrak{z}_{k-1}^{(j)}(s) \|^q ds \right]^{\frac{1}{q}} \right\}^q.$$

Полагая

$$J_1 = \int_{t-\tau_j}^{+\infty} \| Z_{n-p}(t, s+\tau_j) \| (\| u_{k-1}^{(j)}(s) \| + \| v_{k-1}^{(j)}(s) \|) ds,$$

$$J_2 = \left\{ \sum_{j=0}^{m} \left[\int_{t-\tau_j}^{+\infty} \| Z_{n-p}(t, s+\tau_j) \| \, \| \mathfrak{z}_{k-1}^{(j)}(s) \|^q ds \right]^{\frac{1}{q}} \right\}^q,$$

при $t - \tau_j \geqslant t_0$ имеем

$$J_1 \leqslant \int_{t-\tau_j}^{+\infty} 2C_{\rho q} C_1 C_{k-1} ||| u(t_0) ||| e^{-(R-\lambda)(t-s-\tau_j)-(q-1)r(s+\tau_j-t_0)} e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)} ds \leqslant$$

$$\leqslant 2C_{\rho q} C_1 C_{k-1} ||| u(t_0) ||| e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)} \frac{e^{-(R+\lambda+\varepsilon)\tau_j}}{(1-q) r - 2R - \varepsilon}.$$

Аналогично

$$J_2 \leqslant \left\{ \sum_{j=0}^{m} \left[C_{\rho q} (C_1 C_{k-1})^q ||| u(t_0) |||^q \int_{t-\tau_j}^{+\infty} e^{-(R-\lambda)(t-s-\tau_j)-(q-1)r(\Delta+\tau_j-t_0)} \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times e^{q(R+\lambda+\varepsilon)(s-t_0)} ds \right]^{\frac{1}{q}} \right\}^q \leqslant$$

$$\leqslant C_{\rho q} (m+1)^q (C_1 C_{k-1})^q ||| u(t_0) |||^q e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)} \frac{e^{-(R+\lambda+\varepsilon)\tau_m}}{(1-q)(R+r+\lambda+\varepsilon) - 2R - \varepsilon}.$$

При $t_0-\tau_m \leqslant t-\tau_j \leqslant t_0$ в силу (23) имеем

$$J_1 \leqslant C_{\rho q} ||| u(t_0) |||\, e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)} \times$$

$$\times \left[\frac{C_{\rho q} e^{(1-q)(R+\lambda)\tau_m}}{(1-q)(R+r+\lambda)-2R} + \frac{(C_1 C_{k-1})^q e^{[(1-q)r-\lambda-R]\tau_m}}{(1-q)(R+r+\lambda)-2R-\varepsilon} \right].$$

Аналогично

$$J_2 \leqslant C_{\rho q} ||| u(t_0) ||| e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)} \times$$

$$\times \left[\frac{C_{\rho q} e^{D\tau_j} e^{[(1-q)r-2R]\tau_j}}{(1-q)r-2R} + \frac{(C_1 C_{k-1})^q e^{[(1-q)r-\lambda-R]\tau_m}}{(1-q)(R+\lambda+r)-2R-\varepsilon} \right].$$

Таким образом, во всех случаях имеем

$$J_1 \leqslant C_{\rho q} ||| u(t_0) ||| e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)} e^{b\tau_m} \frac{C_{\rho q} e^{b\tau_m} + 2C_1 C_{k-1}}{a},$$

$$I_2 \leqslant C_{\rho q} (m+1)^q ||| u(t_0) ||| e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)} \varepsilon_0^{q-1} e^{b\tau_m} \frac{C_{\rho q}^q + (C_1 C_{k-1})^q}{a}.$$

Возвращаясь к $\| v_k(t) \|$, в силу (28) получаем

$$\| v_k(t) \| \leqslant C_1 C_k ||| u(t_0) ||| e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0.$$

Теперь докажем, что функциональные последовательности $u_k(t)$, $v_k(t)$ (т. е. $\mathfrak{z}_k(t)$) равномерно сходятся к решениям системы (21) при $t \geqslant t_0$.

Поскольку

$$\| u_2(t) - u_1(t) \| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} \| Z_p(t,s) \| \| Q_j(s) \| \| u_1(s-\tau_j) \| ds +$$

$$+ \gamma_q \int_{t_0}^{t} \| Z_p(t,s) \| \left(\sum_{j=0}^{m} \| \mathfrak{z}_1(s-\tau_j) \| \right)^q ds,$$

в силу оценки (27) имеем

$$\| u_2(t) - u_1(t) \| \leqslant m C_{\rho q}^2 e^{b\tau_m} ||| u(t_0) ||| e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)} \frac{M e^{b\tau_m}}{a} +$$

$$+ \gamma_q (m+1)^q ||| u(t_0) ||| C_{\rho q}^{q+1} \varepsilon_0^{q-1} e^{b\tau_m} e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)} \frac{1+e^{b\tau_m}}{a},$$

или

$$\| u_2(t) - u_1(t) \| \leqslant C_{\rho q} \delta_1 ||| u(t_0) ||| e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \geqslant t_0, \tag{31}$$

где

$$\delta_1 = C_{\rho q} \frac{e^{b\tau_m}}{a} [m M e^{b\tau_m} + \gamma_q (m+1)^q (C_{\rho q} \varepsilon_0)^{q-1} (1 + e^{b\tau_m})].$$

Очевидно, можно выбрать $C_{\rho q}$ и γ_q достаточно малыми такими, что $0 < \delta_1 < 1$.

Аналогично имеем

$$\| u_{k+1}(t) - u_k(t) \| \leqslant C_{\rho q} \delta_1^k ||| u(t_0) ||| e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)},$$

$$\| v_{k+1}(t) - v_k(t) \| \leqslant C_{\rho q} \delta_1^k ||| u(t_0) ||| e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)}, \tag{32}$$

$$t \geqslant t_0, \quad k \geqslant 1.$$

Отсюда следует равномерная сходимость приведенных последовательностей и видно, что функции $u(t) = \lim u\ (t)$, $v(t) = \lim v\ (t)$ являются решениями системы (21). В силу оценок (27) получаем

$$\| u(t) \| \leqslant C_0 \| | u(t_0) \| | e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)},$$
$$\| v(t) \| \leqslant C_0 \| | u(t_0) \| | e^{(R+\lambda+\varepsilon)(t-t_0)}, \tag{33}$$
$$t \geqslant t_0.$$

где $C_0 = C_1 \lim C_k$.

Следовательно, из (33) находим

$$\| u(t) \| \leqslant D_0 e^{-\nu_1(t-t_0)} \| | u(t_0) \| |,$$
$$\| v(t) \| \leqslant D_0 e^{-\nu_1(t-t_0)} \| | u(t_0) \| |, \quad t \geqslant t_0, \tag{34}$$

где D_0 не зависит от t_0 и t, $-\nu_1 = \alpha + \lambda + 2\varepsilon < 0$.

Для доказательства второго неравенства

$$\| u(t) \| \leqslant D_1 e^{\nu_2(t-t_0)} \| | v(t_0) \| |,$$
$$\| v(t) \| \leqslant D_1 e^{\nu_2(t-t_0)} \| | v(t_0) \| |, \quad t \leqslant t_0,$$

где D_1 не зависит от t_0 и t, $\nu_2 > 0$ и

$$\mathfrak{z}(t_0) = \begin{pmatrix} u(t_0) \\ v(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi(t_0) \end{pmatrix},$$

$$\psi(t) = \operatorname{colon}(\psi_1(t), \ldots, \psi_{n-p}(t)), \mathfrak{z}(t_0) \in M^{n-p}(t_0),$$

используем преобразование $x = e^{\lambda t}\mathfrak{z}$, $\lambda > 0$, и положим

$$u_k(t) = \sum_{j=1}^{m} \int_{-\infty}^{t} Z_p(t, s) [Q_j^{(11)}(s) u_{k-1}(s-\tau_j) + Q_j^{(12)}(s) v_{k-1}(s-\tau_j)] ds +$$
$$+ \int_{-\infty}^{t} Z_p(t, s) F_p(s, \mathfrak{z}_{k-1}(s), \mathfrak{z}_{k-1}(s-\tau_1), \ldots) ds,$$

$$v_k(t) = Z_{n-p}(t, t_0) v(t_0) + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0}^{t} Z_{n-p}(t, s) [Q_j^{(21)}(s) u_{k-1}(s-\tau_j) +$$
$$+ Q_j^{(22)}(s) v_{k-1}(s-\tau_j)] ds + \int_{t_0}^{t} Z_{n-p}(t, s) F_{n-p}(s, \mathfrak{z}_{k-1}(s), \mathfrak{z}_{k-1}(s-\tau_1), \ldots) ds.$$

Наконец докажем (5). Рассмотрим два решения $\mathfrak{z}^+(t)$, $\mathfrak{z}^-(t)$ такие, что

$$\| | \mathfrak{z}^+(\bar{t}) \| | = 1, \quad \| | \mathfrak{z}^-(\bar{t}) \| | = 1, \quad \mathfrak{z}^+ \in M^p, \quad \mathfrak{z}^- \in M^{n-p}.$$

В силу условий для системы (15) и неравенства (33) имеем

$$\| Z(\bar{t}+k, \bar{t}) \| \leqslant e^{kD}, \| | \mathfrak{z}^+(\bar{t}+k) \| | \leqslant D_2 e^{-\beta k}, \| | \mathfrak{z}^-(\bar{t}+k) \| | \geqslant D_2^{-1} e^{\beta k}$$

($\beta > 0, D_2 > 0$, k — некоторое натуральное число).

Рассмотрим

$$\| | \mathfrak{z}^+(\bar{t}) + \mathfrak{z}^-(\bar{t}) \| | \geqslant e^{-kD} \{D_2^{-1} e^{\beta k} - D_2 e^{-\beta k} + mkM (D_2^{-1} e^{\beta k} - D_2 e^{-\beta k}) +$$
$$+ \gamma_q (m+1) k (D_2^{-q} e^{q\beta k} - D_2^q e^{-q\beta k})\} = \gamma_k > 0,$$

если k достаточно большое. Следовательно, имеем

$$S_n(M^p, M^{n-p}) \geqslant \gamma_k > 0.$$

Обращаясь к переменной x, получаем последнее заключение.

Следствие. *Пусть*

1) *для соответствующей линейной системы* (6) *имеется матрица Коши* $X(t, s)$, *удовлетворяющая условиям определения* 2 *с достаточно малыми* $N_{\rho q}$ *и* $M_{q\rho}$;

2) *множество* $\{\rho\}$ *ограничено и удовлетворяет условию* $\Omega_q < 0$, $\beta = \inf\{r\} < 0$;

3) $\inf\limits_{t} \dfrac{G(X)}{G(X_p)\, G(X_{n-p})} = \mu > 0, \quad 1 < p < n.$

Тогда для решений системы (1) *имеет место экспоненциальная дихотомия.*

Доказательство. Не уменьшая общности предположим, что система (6) имеет блочно-треугольный вид. Поэтому матрица Коши $X(t, s)$ имеет тоже блочно-треугольный вид. Из условия 1, используя замену $s = t$, имеем

$$1 = \| X_p(t, t) \| \leqslant N_{\rho q} e^{(q-1) r (t - t_0)},$$

или $-r(t - t_0) \leqslant -H$, $H > 0$.

Так как $R(t - t_0) \leqslant (R + r)(t - t_0) - H$, $t \geqslant t_0$, и $\Omega_q < 0 \Leftrightarrow \inf\{R + r\} < 0$, то получаем $\alpha = \inf\{R\} < 0$.

На основании теоремы 1 получаем справедливость следствия.

2. Изучим устойчивость дифференциальной системы с запаздывающим параметром, имеющей возмущение порядка $q > 1$.

Пусть дана система (1), (2). Изучим устойчивость решения $x \equiv 0$ этой системы. Вместе с системой (1), (2) рассмотрим систему

$$dy/dx = A(t)\, y(t) + \sum_{j=1}^{m} B_j(t)\, y(t - \tau_j). \tag{35}$$

Пусть $X(t, s)$ — $(n \times n)$-матрица, каждый столбец которой является решением системы (35) и

$$X(t, s) = \begin{cases} E & \text{при } t = s, \\ 0 & \text{при } t < s. \end{cases} \tag{36}$$

Пусть $F(t) = \{R(t), \rho(t)\}$, где $R(t)$ и $\rho(t)$ — непрерывные и ограниченные при $t \geqslant t_0$ функции и такие, что

$$\| X(t, s) \| \leqslant C \exp\left[\int_s^t R(\tau)\, d\tau + (q - 1) \int_{t_0}^{s} \rho(\tau)\, d\tau\right], \quad t_0 \leqslant s \leqslant t, \tag{37}$$

где C — положительная постоянная, которая не зависит от t, s и t_0, а зависит только от выбора пары функций $(R(t), \rho(t))$.

Положим

$$\Omega^q_{R\rho} = \overline{\lim}\, \frac{1}{t} \int_{t_0}^{t} [R(\tau) + \rho(\tau)]\, d\tau \tag{38}$$

и

$$\Omega_q = \inf_{F(t)} \Omega^q_{R\rho}. \tag{39}$$

Определение 3. *Число* Ω_q *называется центральным показателем порядка* q *системы* (35).

Замечание. Полагая $s = t$ в (37), имеем

$$1 = \| X(t, t) \| \leqslant C \exp (q - 1) \int_{t_0}^{t} \rho(\tau)\, d\tau$$

или

$$\int_{t_0}^{t} \rho(\tau)\, d\tau \geqslant -\overline{C}_0, \quad \overline{C}_0 \geqslant 0.$$

Следовательно,

$$\int_{t_0}^{t} R(\tau)\,d\tau \leqslant \bar{C}_0 + \int_{t_0}^{t} [R(\tau) + \rho(\tau)]\,d\tau. \qquad (40)$$

При $q = 1$ получаем определение Хоанг Хыу Дыонга [7], так как $[R(t), 0] \in F(t)$.

Теорема 2. *Пусть в множестве $F(t)$ существует пара функций $[R, \rho]$, удовлетворяющая условиям*

$$\int_{t_0}^{t} [R(\tau) + \nu]\,d\tau < H < +\infty, \qquad (41)$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} \left(\exp (q-1) \int_{t_0}^{s} [R(\tau) + \rho(\tau) + \nu]\,d\tau\right) ds = H_1 < +\infty, \qquad (42)$$

где ν — положительное достаточно малое число.

Тогда тривиальное решение $x \equiv 0$ системы (1), (2) *устойчиво при $t \to + \infty$.*

Доказательство. Для системы (1), (2) положим

$$x = e^{-\lambda t}\mathfrak{z}, \qquad (43)$$

где $0 < \lambda < \nu$. Тогда система (1), (2) примет вид

$$d\mathfrak{z}/dt = P(t)\,\mathfrak{z}(t) + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\,\mathfrak{z}(t-\tau_j) + F(t, \mathfrak{z}(t), \mathfrak{z}(t-\tau_1), \ldots). \qquad (44)$$

$P(t)$, $Q_j(t)$ и $F(t, \mathfrak{z}(t), \ldots)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.

Очевидно $Z(t, s) = e^{\lambda E(t-s)} X(t, s)$ — $(n \times n)$-матрица такая, что каждый ее столбец является решением системы

$$d\mathfrak{z}/dt = P(t)\,\mathfrak{z}(t) + \sum_{j=1}^{m} Q_j(t)\,\mathfrak{z}(t-\tau_j) \qquad (45)$$

и

$$Z(t, s) = \begin{cases} E & \text{при } t = s, \\ 0 & \text{при } t < s. \end{cases}$$

Более того,

$$\| Z(t, s) \| \leqslant C\exp\left[\int_{s}^{t} (R(\tau) + \lambda)\,d\tau + (q-1)\int_{t_0}^{s} \rho(\tau)\,d\tau\right].$$

Полагая $\tilde{R}(t) = R(t) + \lambda$, $\tilde{\rho}(t) = \rho(t)$, получаем $\tilde{\Omega}_q = \Omega_q + \lambda$.

Предположим, что $\varphi(t)$ является начальной функцией решения системы (1), (2). Тогда решение $\mathfrak{z}(t)$ системы (43) принимает вид [8, с. 346]

$$\mathfrak{z}(t) = Z(t, t_0)\,\tilde{\mathfrak{z}}(t_0) + \sum_{j=1}^{m} \int_{t_0-\tau_j}^{t_0} Z(t, s+\tau_j)\,B_j(s+\tau_j)\,e^{\lambda\tau_j}\mathfrak{z}(s)\,ds +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} Z(t, s)\,F(s, \mathfrak{z}(s), \mathfrak{z}(s-\tau_1), \ldots, \mathfrak{z}(s-\tau_m))\,ds,$$

где $\tilde{\mathfrak{z}} = e^{\lambda t}\varphi(t)$ — начальная функция, $\tilde{\mathfrak{z}}(t_0) = e^{\lambda t_0}\varphi(t_0)$.

Решение системы (43) будем искать методом последовательных приближений. Положим

$$\sup_t \| P(t) \| = \tilde{A}, \quad \sup_t \| Q_j(t) \| = \tilde{B}_j, \quad j = \overline{1, m},$$

$$\sup_t | R(t) + \lambda | = M, \quad \sup_t | \rho(t) | = N,$$

$$\mathfrak{z}_0(t) = Z(t, t_0)\,\widetilde{\mathfrak{z}}(t_0) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_0-\tau_j}^{t_0} Z(t, s+\tau_j)\, B_j(s+\tau_j)\, e^{\lambda\tau_j}\mathfrak{z}(s)\, ds.$$

Тогда $\mathfrak{z}_0(t)$ — решение системы (45). Имеем

$$\|\mathfrak{z}_0(t)\| \leqslant D\, |||\widetilde{\mathfrak{z}}(t_0)|||\, \exp \int\limits_{t_0}^{t} [R(\tau) + \lambda]\, d\tau, \quad t \geqslant t_0,$$

где

$$D = \max\left\{e^{(L+M)\tau_m};\ C\left[1 + \sum_{j=1}^{m} \widetilde{B}_j \frac{e^{[M+(q-1)N]\tau_j}}{M + (q-1)N}\right]\right\}, \quad L = \max\{\widetilde{A}, \widetilde{B}_j\}.$$

Далее при $k \geqslant 1$ t_0 положим

$$\mathfrak{z}_k(t) = Z(t, t_0)\,\widetilde{\mathfrak{z}}(t_0) + \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{t_0-\tau_j}^{t_0} Z(t, s+\tau_j)\, B_j(s+\tau_j)\, e^{\lambda\tau_j}\mathfrak{z}_{k-1}(s)\, ds +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} Z(t, s)\, F(s, \mathfrak{z}_{k-1}(s), \mathfrak{z}_{k-1}(s-\tau_1), \ldots, \mathfrak{z}_{k-1}(s-\tau_m))\, ds.$$

Тогда получаем (с помощью условия (42))

$$\|\mathfrak{z}_k(t)\| \leqslant 2D\, |||\widetilde{\mathfrak{z}}(t_0)|||\, \exp \int\limits_{t_0}^{t} [R(\tau) + \lambda + \sigma]\, d\tau,$$

где $\sigma > 0$, $0 < \lambda + \sigma < \nu$.

Аналогично доказательству теоремы 1 получаем (используя условия (41))

$$\|\mathfrak{z}_k(t) - \mathfrak{z}_{k-1}(t)\| \leqslant D\theta^k\, |||\widetilde{\mathfrak{z}}(t_0)|||\, \exp \int\limits_{t_0}^{t} [R(\tau) + \lambda + \sigma]\, d\tau, \quad 0 < \theta < 1, \ t \geqslant t_0. \tag{46}$$

Из неравенств (46) при $0 < \theta < 1$ следует, что функциональные последовательности $\mathfrak{z}_k(t)$ равномерно сходятся к функции $\mathfrak{z}(t)$ при $t \geqslant t_0$. Легко видеть, что эта предельная функция является решением системы (44). Это решение удовлетворяет оценке

$$\|\mathfrak{z}(t)\| \leqslant D\, |||\widetilde{\mathfrak{z}}(t_0)|||\, \exp \int\limits_{t_0}^{t} [R(\tau) + \lambda + \sigma]\, d\tau, \quad t \geqslant t_0,$$

где D зависит только от выбора $[R(t), \rho(t)]$.

В силу (41) имеем

$$\exp \int\limits_{t_0}^{t} [R(\tau) + \lambda + \sigma]\, d\tau < T < +\infty.$$

Следовательно, если выбрать

$$|||\widetilde{\mathfrak{z}}(t_0)||| < \frac{\varepsilon}{DT} < \delta$$

при $\varepsilon > 0$ достаточно малом, то $\|\mathfrak{z}(t)\| < \varepsilon$ при $t \geqslant t_0$. Это значит, что решение $\mathfrak{z} \equiv 0$ системы (44) устойчиво при $t \to +\infty$. Из преобразования (43) следует, что решение $x \equiv 0$ системы (1), (2) устойчиво при $t \to +\infty$.

Следствие 1. *Если в теореме 2 условие* (41) *заменить условием*

$$\int\limits_{t_0}^{t} [R(\tau) + \nu]\, d\tau \to -\infty, \quad t \to +\infty,$$

то решение $x \equiv 0$ системы (1), (2) *асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$.*

Следствие 2. *Если $\Omega_q < 0$, то решение $x \equiv 0$ системы* (1), (2) *асимптотически устойчиво при $t \to +\infty$.*

С л е д с т в и е 3. *Если*

$$\| X(t,s) \| \leqslant D_1 \exp[\alpha(t-s)+\beta s], \quad t \geqslant s,$$

где α *и* β *— постоянные такие, что* $(q-1)\alpha+\beta<0$ (D_1 *— положительная постоянная), то решение* $x \equiv 0$ *системы* (1), (2) *асимптотически устойчиво при* $t \to +\infty$.

З а м е ч а н и е. Из полученных результатов в п. 1 следует, что если вместо множества $\{\rho\}$ рассматривать множество $F(t)=\{R(t), \rho(t)\}$ пар функций, ограниченных и непрерывных при $t \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющих условиям

$$1) \ \| X_p(t,s) \| \leqslant N_{\rho q} \exp\left[\int_s^t R(\tau)\,d\tau + (q-1)\int_{t_0}^s \rho(\tau)\,d\tau\right], \quad t \geqslant s;$$

$$2) \ \| X_{n-p}(t,s) \| \leqslant M_{\rho q} \exp\left[-\int_s^t R(\tau)\,d\tau - (q-1)\int_{t_0}^s \rho(\tau)\,d\tau\right], \quad s \geqslant t$$

и $\Omega_y = \inf\limits_{F(t)} \{\overline{R+\rho}\}$, то теорема 1 остается справедливой.

1. *Pecceli G.* Dichotomie for functional differential eguations // J. Different. Equat.— 1971.— 9, N 3.
2. *Pecceli G.* Functional differential equations dichotomies perturbations and admissibility // Ibid.— 1974.— 14, N 2.
3. *Ордынская З. П.* Дихотомия в нелинейных системах дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— Киев : Наук. думка, 1977.— 320 с.
4. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1970.— 534 с.
5. *Теория* показателей Ляпунова / Б. В. Былов, Р. Э. Виноград, А. Н. Гробман, В. В. Немыцкий.— М. : Наука, 1966.— 356 с.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М. : Наука, 1972.— 486 с.
7. *Hoang Huu Duong.* Phuong phap so mu trung tam boi voi he vi sai phan // Thong dao khoa hoc Dai hoc Tong hop HA-NOI.— 1963.— 3.
8. *Halanay A.* Teoria calitativă a ecuatiilor diferentiale.— 1963.
9. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М. : Наука, 1971.— 296 с.
10. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М. : Физматгиз, 1959.— 211 с.
11. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.

Получено 24.09.87