УДК 517.5

В. К. Дзядик, чл.-кор. (Ін-т математики НАН України, Київ),
В. В. Ковтунець, канд. фіз.-мат. маук (Рівнен. пед. ін-т)

ЗБІЖНІСТЬ АЛГОРИТМУ ПОБУДОВИ ВУЖІВ

The algorithm for constructing snakes (extremal polynomials, introduced by S. Karlin) proposed by Dzyadyk is investigated. It is proved that, in general case, this algorithm is linearly convergent and it is quadratically convergent when the basic functions of the Chebyshev system belong to the class C^2.

Проведено дослідження алгоритму побудови вужів, запропонованого В. К. Дзядиком. Доведено, що подібно до алгоритму Ремеза запропонований алгоритм збігається в загальному випадку з лінійною швидкістю, а при належності базисних функцій чебишовської системи до класу C^2 — з квадратичною швидкістю.

1⁰. Вступ. У дисертації Л. Б. Шевчук [1] для побудови вужів (див. стосовно означень [2] або [3]) використано метод, запропонований В. К. Дзядиком. Метод виявився достатньо ефективним, однак не був теоретично досліджений і обґрунтований. Застосування вужів у багатьох задачах обчислювальної математики спонукало до подальшої роботи.

Нехай на відрізку $[a, b]$ задано дві неперервні функції f_0 та f_1 такі, що $f_0(x) < f_1(x)$ $\forall\ x \in [a, b]$, і чебишовську систему функцій $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ на цьому відрізку. Причому гарантується існування хоча б одного узагальненого полінома

$$P(x) = \sum_0^n a_k \varphi_k(x),$$

який задовольняє умови $f_0(x) < P(x) < f_1(x)$ $\forall\ x \in [a, b]$. Тоді теорема існування вужів стверджує, що знайдуться два многочлени $\underline{P}(x)$ і $\overline{P}(x)$ такі, що $f_0(x) \le \underline{P}(x)$, $\overline{P}(x) \le f_1(x)$ $\forall\, x$, і в точках $(a \le)\ x_0 < x_1 < \ldots < x_n\ (\le b)$ виконуються рівності

$$\underline{P}(x_j) = \begin{cases} f_0(x_j), & j = 0, \quad 2, \ldots n, \\ f_1(x_j), & j = 1, \quad 3, \ldots n; \end{cases} \tag{1}$$

$$\overline{P}(x_j) = \begin{cases} f_1(x_j), & j = 0, \quad 1, \ldots n, \\ f_0(x_j), & j = 1, \quad 3, \ldots n. \end{cases} \tag{1'}$$

Ці многочлени називають відповідно нижнім та верхнім вужами для функцій f_0 та f_1 за системою $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

Без обмежень загальності можна вважати, що $f_0(x) < 0$, $f_1(x) > 0$ $\forall\ x \in [a, b]$. Будуватимемо верхній вуж $\overline{P}$.

Алгоритм, про який іде мова, діє таким чином. На стартовому кроці вибирають на відрізку $[a, b]$ довільні точки $x_0^{(0)} < x_1^{(0)} < \ldots < x_n^{(0)}$ і будують поліном $Q^{(0)}$ такий, що $Q^{(0)}(x_j^{(0)}) = f_k(x_j^{(0)})$, де

$$k = k(j) = \frac{1 + (-1)^j}{2}. \tag{2}$$

Нехай на попередній, $(\nu - 1)$-й ітерації, $\nu = 1, 2, \ldots$, одержано многочлен $Q^{(\nu-1)}(x)$, який на відрізку $[a, b]$ має n коренів $c_1^{(\nu-1)}, c_2^{(\nu-1)}, \ldots, c_n^{(\nu-1)}$. Позначимо $c_0^{(\nu-1)} = a$, $c_{n+1}^{(\nu-1)} = b$. Усереднюємо цей многочлен множенням:

$$\tilde{Q}^{(\nu-1)}(x) = \kappa \dot{Q}^{(\nu-1)}(x),$$

де

$$\kappa = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \frac{f_k(t_j)}{Q^{(\nu-1)}(t_j)},$$

k задається рівністю (2), t_j — точка з відрізка $\left[c_j^{(\nu-1)}, c_{j+1}^{(\nu-1)}\right]$, в якій величина $(-1)^j \left[Q^{(\nu-1)} - f_k\right]$ набуває найбільшого значення. Далі шукаємо точки

$$x_j^{(\nu)} \in \left[c_j^{(\nu-1)}, c_{j+1}^{(\nu-1)}\right], \quad j = 0, 1, \ldots, n,$$

в яких величина $(-1)^j (\tilde{Q}^{(\nu-1)} - f_k)(x)$, де k задано (2), досягає максимуму. Нарешті будуємо многочлен $Q^{(\nu)}$ такий, що

$$Q^{(\nu)}(x_j^{(\nu)}) = f_k(x_j^{(\nu)}), \tag{3}$$

де k визначається за формулою (2).

Таким чином, маємо послідовність многочленів $Q^{(0)}, Q^{(1)}, \ldots, Q^{(\nu)}, \ldots$. У даній роботі буде доведено збіжність побудованої послідовності до верхнього вужа $\overline{P}$ і встановлено швидкість збіжності цього процесу.

2. Лінійна збіжність. Розглянемо спочатку той випадок, коли в лінійному $(n+1)$-вимірному просторі Π_{n+1} з базисом $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ існує чебишовський підпростір Π_n розмірності n. Не обмежуючи загальності, можемо покласти, що саме функції

$$\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1} \tag{4}$$

утворюють на $[a, b]$ чебишовську систему. Використовуючи методи роботи [3, с. 482], розглядаємо на відрізку $[a, b]$ несиметричну норму

$$\| \psi | = \max_{a \le x \le b} \begin{cases} \psi(x) / f_0(x), & \psi(x) < 0, \\ \psi(x) / f_1(x), & \psi(x) \ge 0. \end{cases} \tag{5}$$

Зауважимо, що всі основні факти стосовно найкращих рівномірних наближень у симетричній нормі (теореми Чебишова, Валле Пуссена, сильна єдиність, диференційовність оператора найкращого наближення і т. п.) переносяться на простори з несиметричною нормою.

Верхній вуж $\overline{P}(x)$ запишемо у вигляді

$$\overline{P}(x) = K\left[\varphi_n(x) - P_{n-1}(\varphi_n, x)\right], \tag{6}$$

де $P_{n-1}(\varphi_n, x)$ — поліном за системою (3), який найкращим чином у нормі $\| \, |$ наближає функцію φ_n. Поліном $Q^{(\nu)}(x)$, побудований на ν-й ітерації, запишемо у подібній формі:

$$Q^{(\nu)}(x) = K_\nu\left[\varphi_n(x) - P_{n-1}^{(\nu)}(x)\right], \tag{6'}$$

де $P_{n-1}^{(\nu)}(x)$ — поліном за скороченою системою функцій (4). Вкажемо на той суттєвий факт, що при заданих значеннях точок $x_i^{(\nu)}$ побудова полінома $Q^{(\nu)}$ відповідно до (3) еквівалентна побудові многочлена найкращого наближення функції φ_n многочленами вигляду $\sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_k$ на множині $A_\nu = \{ x_0^{(\nu)}, x_1^{(\nu)}, \ldots$ $\ldots, x_n^{(\nu)} \}$, в нормі, породженій на цій множині введеною несиметричною нормою $\| \, \|$. А це, в свою чергу, — лінійна задача, аналогічна задачі чебишовської інтерполяції [4, 5].

Будемо розглядати описаний процес побудови многочленів $P_{n-1}^{(\nu)}$ на довільному компакті $M \subset [a, b]$. Під точками $x_i^{(\nu)}$ розуміємо точки локальних екстремумів різниці $\varphi_n(x) - P_{n-1}^{(\nu)}(x)$, хоча б одна з яких є точкою глобального на $[a, b]$ екстремуму і в яких виконується умова Є. Я. Ремеза

$$\sum_{j=0}^{n} \delta_j \left[\varphi_n\left(x_j^{(\nu)}\right) - P_{n-1}^{(\nu)}\left(x_j^{(\nu)}\right) \right] \varphi_k\left(x_j^{(\nu)} \right) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1, \; \delta_j \ge 0, \quad \sum_{j=0}^{n} \delta_j = 1.$$

Теорема 1. *Нехай M — довільна компактна підмножина відрізка* $[a, b]$. *Тоді послідовність* $P_{n-1}^{(\nu)}$, $\nu = \nu = 0, 1, \ldots$, *збігається до многочлена* $P_{n-1}(\varphi_n, x)$, *який найкращим чином у нормі* $\| \, \|$ *на множині* M *наближає функцію* φ_n. *Швидкість збіжності лінійна, тобто виконується нерівність*

$$\left\| \varphi_n(x) - P_{n-1}^{(\nu)}(x) \right\| \le C q^\nu, \quad 0 < q < 1, \quad q = \text{const}, \quad \nu = 0, 1, \ldots .$$

Доведення. Користуючись тим, що для оператора найкращого рівномірного наближення в нормі $\| \, \|$ виконуються властивості: а) локальна умова Ліпшіца; б) диференційовність за напрямком; (див., наприклад, [6], наведене там доведення цілком переноситься на несиметричну норму); в) сильна єдиність [7, с. 117], многочлен $P_{n-1}^{(\nu-1)}$ розглядатимемо як многочлен найкращого наближення в нормі $\| \, \|$ на множині A_ν функції $\varphi_n + g$. Функцію $g = g_\nu$ задаємо таким чином:

1) $$g\left(x_j^{(\nu)}\right) = \operatorname{sign}\left(\varphi_n - P_{n-1}^{(\nu-1)}\right)\left(x_j^{(\nu)}\right) \times$$
$$\times \left[-\max_j \left| \left(\varphi_n - P_{n-1}^{(\nu-1)} \right)\left(x_j^{(\nu)}\right) \right| - \min_j \left| \left(\varphi_n - P_{n-1}^{(\nu-1)} \right)\left(x_j^{(\nu)}\right) \right| \right]; \tag{7}$$

2) $$\| g \| = \left\| \max_j \left| g\left(x_j^{(\nu)}\right) \right| \right\|,$$

де при заданій функції u та точці x $|u(x)|$ означає величину

$$|u(x)| = \begin{cases} u(x) / f_0(x), & u(x) < 0, \\ u(x) / f_1(x), & u(x) \ge 0. \end{cases}$$

Введемо такі позначення:

$$\bar{e}_\nu = \max_j \left| \left(\varphi_n - P_{n-1}^{(\nu-1)} \right)\left(x_j^{(\nu)}\right) \right|;$$

$$\underline{e}_\nu = \min_j \left| \left(\varphi_n - P_{n-1}^{(\nu-1)} \right)\left(x_j^{(\nu)}\right) \right|;$$

$$E_\nu = \left\| \varphi_n - Q_{n-1}^{(\nu-1)} \right\|;$$

$\| \, \|_\nu$ — несиметрична рівномірна норма на множині A_ν, індукована нормою $\| \, \|$;

$e_\nu(u)$ — величина найкращого наближення функції u на множині A_ν в нормі $\| \, \|_\nu$;

$E(u)$ — величина найкращого наближення функції u на множині M в нормі $\|\ \|$.

Враховуючи, що $\|g_\nu\| = \bar{e}_\nu - \underline{e}_\nu \ge E(\varphi_n) - \underline{e}_\nu$, і припускаючи, що вже доведено нерівність

$$e_\nu(g_\nu) \le q\|g_\nu\|, \quad 0<q<1, \quad q = \text{const}, \tag{8}$$

будемо мати

$$E(\varphi_n) \ge \underline{e}_{\nu+1} \ge e_\nu(\varphi_n) = e_\nu(\varphi_n + g_\nu) - e_\nu(g_\nu) =$$

$$\bar{e}_\nu - \underline{e}_\nu + \underline{e}_\nu - e_\nu(g_\nu) = \|g_\nu\|_\nu + \underline{e}_\nu - e_\nu(g_\nu) \ge \underline{e}_\nu + \|g_\nu\|(1-q).$$

Звідси випливає

$$E(\varphi_n) - \underline{e}_{\nu+1} \le E(\varphi_n) - e_\nu - \|g_\nu\|(1-q) = E(\varphi_n) - \underline{e}_\nu - (1-q)(\bar{e}_\nu - \underline{e}_\nu) \le$$

$$\le E(\varphi_n) - \underline{e}_\nu - (1-q)(E(\varphi_n) - e_\nu) \le q(E(\varphi_n) - \underline{e}_\nu). \tag{9}$$

Звідси, а також із теореми сильної єдиності [7, с. 117] випливає, що послідовність поліномів $P_{n-1}^{(\nu)}$, $\nu = 0, 1, \ldots$, збігається до полінома $P_{n-1}(\varphi_n)$ з лінійною швидкістю.

Таким чином, для закінчення доведення досить довести нерівність (8). Нехай $R = R_\nu$ — многочлен найкращого наближення функції $g_\nu = g$ на множині A_ν в нормі $\|\ \|_\nu$. Відповідно до критерію Ремеза [2] маємо

$$\sum_{j=0}^{n} \delta_j \left[g\left(x_j^{(\nu)}\right) - R\left(x_j^{(\nu)}\right)\right] \varphi_k\left(x_j^{(\nu)}\right) = 0, \ k = 0, 1, \ldots, n-1, \ \delta_j \ge 0, \ \sum_{j=0}^{n} \delta_j = 1. \tag{10}$$

Покладаючи

$$k(j) = \begin{cases} 0, & (g-R)(x_j) < 0, \\ 1, & (g-R)(x_j) > 0, \end{cases}$$

умову (9) записуємо у вигляді

$$\sum_{j=0}^{n} \delta_j \left|f_{k(j)}\left(x_j^{(\nu)}\right)\right| \operatorname{sign}\left[g\left(x_j^{(\nu)}\right) - R\left(x_j^{(\nu)}\right)\right] \varphi_l\left(x_j^{(\nu)}\right) = 0, \ l = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{10$'$}$$

Пронормуємо додатні коефіцієнти δ_j таким чином, що виконується умова

$$\sum_{j=0}^{n} \delta_j \left|f_{k(j)}\left(x_j^{(\nu)}\right)\right|^2 = 1. \tag{11}$$

Оскільки модулі величин $(g-R)\left(x_j^{(\nu)}\right) / \left|f_{k(j)}\left(x_j^{(\nu)}\right)\right|$ однакові, то

$$e_\nu(g) = \sum_{j=0}^{n} \delta_j \left|f_{k(j)}\left(x_j^{(\nu)}\right)\right|^2 \frac{(g-R)\left(x_j^{(\nu)}\right)}{\left|f_{k(j)}\left(x_j^{(\nu)}\right)\right|} \operatorname{sign}(g-R)\left(x_j^{(\nu)}\right).$$

З урахуванням (10$'$) та (11) і того факту, що в одній із точок $x_j^{(\nu)}$ функція g має нульове значення, маємо

$$e_\nu(g) \le \sum_{j=0}^{n} \delta_j \left|f_{k(j)}\left(x_j^{(\nu)}\right)\right|^2 \frac{\left|g\left(x_j^{(\nu)}\right)\right|}{\left|f_{k(j)}\left(x_j^{(\nu)}\right)\right|} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \delta_j \left| f_{k(j)}\left(x_j^{(\nu)}\right) \right|^2 \left| g\left(x_j^{(\nu)}\right) \right| \le \| g \| \left(1 - \delta_s \left| f_{k(s)}\left(x_j^{(\nu)}\right) \right|^2 \right), \tag{12}$$

де індекс s вибрано таким чином, що $g\left(x_s^{(\nu)}\right) = 0$.

Оскільки точки $x_j^{(\nu)}$ задовольняють умову $\left| x_j^{(\nu)} - x_i^{(\nu)} \right| > \kappa = \mathrm{const} > 0$, $i \ne j$, то величина $\delta_s \left| f_{k(s)}\left(x_j^{(\nu)}\right) \right|$ відокремлена від нуля рівномірно за всіма ν. Отже, з (11) випливає нерівність (8).

Аналогічно до нерівності (9) доводиться і така нерівність:

$$E(\varphi_n) - e_{\nu+1}(\varphi_n) \le q(E(\varphi_n) - e_\nu(\varphi_n)). \tag{9'}$$

З нерівності (9) або (9′) завдяки сильній єдиності найкращого наближення відомим способом (див., наприклад, [5]) виводиться нерівність

$$\left| P_{n-1}^{(\nu)} - P_{n-1}(\varphi_n) \right| \le Cq^\nu, \quad C = \mathrm{const},$$

що й вимагалось довести.

Теорема 2. *Послідовність поліномів $Q^{(\nu)}$, побудована відповідно до описаного в п. 1 алгоритму, збігається з лінійною швидкістю до верхнього вужа $\overline{Q}$ для функцій f_0 та f_1.*

Доведення. Розглянемо випадок, коли система функцій $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ також є чебишовською. Записуючи поліноми P та $Q^{(\nu)}$ у формі (6) та (6′), за теоремою 1 маємо збіжність з лінійною швидкістю послідовності $P_{n-1}^{(\nu)}$ до полінома $P_{n-1}(\varphi_n)$. Оскільки

$$K_\nu = \pm \frac{1}{e_\nu(\varphi_n)}, \quad K = \pm \frac{1}{E(\varphi_n)},$$

то з нерівності (9′) випливає збіжність $K_\nu \to K$ з лінійною швидкістю. Звідси й випливає необхідне твердження.

Розглянемо тепер загальний випадок. Зафіксуємо точку $c \in [a, b]$, яка не співпадає з жодною з екстремальних точок верхнього вужа $\overline{P}$. При кожному досить малому $\alpha > 0$ розглянемо множину $M_\alpha = [a, b] \setminus U(c, \alpha)$, де $U(c, \alpha)$ — α-окіл точки c. Тепер базис φ_j вважатимемо таким, що $\varphi_0(c) = \varphi_1(c) = \dots = \varphi_{n-1}(c) = 0$, тобто система функцій $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$ буде чебишовською на M_α. За ітераційним процесом побудови поліномів $Q^{(\nu)}$ на $[a, b]$ розглянемо відповідний ітераційний процес побудови многочлена $P_{n-1}(\varphi_n, \alpha)$ найкращого несиметричного наближення функції φ_n на множині M_α, позначивши ν-й ітераційний поліном через $P^{(\nu)}(\alpha)$. Для цього лінійним стиском відрізка $[\alpha, c)$ в $[\alpha, c - \alpha)$ і відрізка $[c, b]$ в $[c + \alpha, b]$ стартовий набір точок $x_j^{(0)}$ переведемо в набір точок $x_j^{(0)}(\alpha)$, який будемо вважати стартовим для побудови полінома $P_{n-1}(\varphi_n, \alpha)$ на множині M_α. За теоремою 1 маємо збіжність $P^{(\nu)}(\alpha) \to \to P_{n-1}(\varphi_n, \alpha)$, $\nu \to \infty$. Ця збіжність лінійна, і знаменник q, $0 < q < 1$, в оцінці лінійної швидкості

$$\left\| P_{n-1}^{(\nu)}(\alpha) - P_{n-1}(\varphi_n, \alpha) \right\| \le Cq^\nu \tag{13}$$

(див. (12)) можна вибрати незалежним від значення α, оскільки внаслідок вибору точки c найкращі наближення функції φ_n на множинах $[a, b]$ та M_α співпадають, і тому, починаючи з деякого номера ν, в деякому колі U точки c не буде жодної з точок $x_j^{(\nu)}$. Згідно з вибором точки c поліном $P_{n-1}(\varphi_n)$ найкращого наближення функції φ_n на відрізку $[a, b]$ в заданій несиметричній нормі співпадає з поліномом $P_{n-1}(\varphi_n, \alpha)$ для всіх достатньо малих значень α.

З іншого боку, відомо [3, с. 492], що

$$\overline{P}(\alpha) \to \overline{P}(0) = \overline{P} \quad \text{при} \quad \alpha \to +0. \tag{14}$$

З побудови поліномів $P_{n-1}^{(\nu)}(\alpha)$ випливає, що при кожному фіксованому значенні ν має місце збіжність

$$P_{n-1}^{(\nu)}(\alpha) \to P_{n-1}^{(\nu)} = P_{n-1}^{(\nu)}(0), \quad \alpha \to +0. \tag{15}$$

На підставі (14) та (15), переходячи в (13) до границі при $\alpha \to +0$, одержуємо потрібну лінійну збіжність послідовності $P_{n-1}^{(\nu)}$ до полінома $P_{n-1}(\varphi_n)$. Повторюючи міркування, проведені в першій частині доведення цієї теореми, маємо потрібне твердження. Теорему доведено.

3. Квадратична збіжність.

Теорема 3. *Нехай функції $f_0, f_1, \varphi_0, \ldots, \varphi_n$ двічі неперервно диференційовні на відрізку $[a, b]$. Припустимо, що:* 1) *для верхнього вужа $\overline{P}$ для функцій f_0, f_1 за системою $\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ в кожній екстремальній точці x_j, внутрішній для відрізка $[a, b]$, виконується умова*

$$f''_{k(j)}(x_j) \neq \overline{P}''(x_j), \tag{16}$$

де $k(j)$ визначається згідно з (2); 2) *верхній вуж $\overline{P}$ має рівно $n+1$ точок альтернансу. Тоді побудована послідовність поліномів $Q^{(\nu)}$ збігається до вужа $\overline{P}$ з квадратичною швидкістю, тобто*

$$\| Q^{(\nu)} - \overline{P} \| \leq C q^{2^\nu}, \quad C = \text{const} > 0,$$

$0 < q < 1$, $q = \text{const}$, *починаючи з деякого номера* ν_0.

Доведення. Доведення проведемо за тією ж схемою, що й для теореми 2. Подамо поліноми $\overline{P}$ та $Q^{(\nu)}$ у формі (6) та (6′) відповідно. Як і в теоремі 2, можемо вважати, що система функцій (4) є чебишовською на M_α. Твердження, аналогічне теоремі 1, доводитимемо для множини вигляду $M_\alpha = [a, b] \setminus U(c, \alpha)$, де $\alpha \geq 0$.

Для цього спочатку покажемо, що при виконанні умов теореми оператор найкращого наближення в несиметричній нормі $\|\,\|$ поліномами за чебишовською системою $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ є двічі диференційовним за кожним напрямком g таким, що функція g двічі неперервно диференційовна на M_α. Доведення існування першої похідної за напрямком можна провести, повторивши викладки з роботи [4] з невеликою модифікацією у зв'язку з несиметричністю норми. Далі будемо розглядати однапараметричну множину функцій $\varphi_n + (1-t)g$ для $t \in [0, 1]$. При кожному t поліном найкращого наближення функції $\varphi_n + (1 - t)g$ позначимо через $P_{n-1}(t)$, а першу похідну оператора найкращого наближення в точці $\varphi_n + (1-t)g$ за напрямком g позначимо через $D(t)$. Оскільки різниця $\varphi_n - P_{n-1}(1)$ має рівно $n+1$ точок альтернансу, цей факт внаслідок неперервності залишається істинним і для різниці $\varphi_n + (1-t)g - P_{n-1}(t)$ при всіх $t \in [0, 1]$ за умови, що функція g має досить малу норму, а це в свою чергу гарантується теоремою 2 для всіх досить великих значень ν. Тому перша похідна $D(t)$ існує при всіх вказаних значеннях t. Коефіцієнти полінома $D(t)$ визначаються з системи лінійних рівнянь

$$D(t, x_j(t)) = -g(x_j(t)) + (-1)^j \rho(t) f_{k(j)}(x_j(t)), \quad j = 0, \ldots n, \tag{17}$$

де $x_j(t)$ — екстремальні точки різниці $\varphi_n + (1-t)g - P_{n-1}(t)$, $\rho(t)$ — невідома величина, яка підлягає визначенню з системи (16), така, що $|\rho(t)|$ дорівнює величині найкращого наближення функції g на множині $\{x_0(t), x_0(t), \ldots, x_n(t)\}$ в нормі, індукованій нормою $\| \|$, і нарешті, $k(j)$ визначається згідно з (2). З умови (16) згідно з теоремою про неявну функцію випливає, що система (17) задає в додатному околі нуля неперервно диференційовні функції $x_j(t)$. А це означає, що розв'язок системи (17), тобто коефіцієнти полінома D і функція $\rho(t)$, є неперервно диференційовними по t на $[0, 1]$ при кожному досить великому значенні ν, що й вимагалось довести.

Наступним кроком буде доведення того факту, що послідовність поліномів $P_{n-1}^{(\nu)}$ збігається до полінома $P_{n-1}(\varphi_n)$ з квадратичною швидкістю. Функцію $g = g_\nu$ в точках $x_j^{(\nu-1)}$ задамо відповідно до (7) і продовжимо на множину M_α так, щоб забезпечити належність її до класу $C^2(M_\alpha)$ і виконання умов:

а) $\| \varphi_n + g - P_{n-1}^{(\nu-1)} \| = \| \varphi_n - P_{n-1}^{(\nu-1)} \|$;

б) $\| g'_x \| \leq L \| g \|$, $L = \text{const} > 0$.

Надалі для спрощення записів опустимо індекс ν і під $P_{n-1}(t)$ розумітимемо поліном за системою (4), який найкращим чином наближає функцію $\varphi_n + (1-t)g_\nu$ в несиметричній нормі на M_α; $x_j(t)$ означатиме при цьому j-ту точку альтернансу різниці $\varphi_n + (1-t)g_\nu - P_{n-1}(t)$.

З того факту, що система функцій (4) чебишовська на множині M_α і точки альтернансу $x_j(t)$ строго відокремлені одна від одної при всіх $t \in [0, 1]$ ($|x_j(t) - x_{j-1}(t)| \geq \gamma > 0$), випливає, що визначник матриці системи (17) строго відокремлений від нуля і, таким чином, розв'язок цієї системи обмежений зверху за порядком нормою функції g:

$$\| y(t) \| \leq C_1 \| g \|, \tag{18}$$

де $y(t)$ означає будь-який з коефіцієнтів полінома $D(t)$ або функцію $\rho(t)$.

З рівності

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = \frac{D'_x(t, x_j(t)) - g'_x(x_j(t))}{(\varphi''_n + g'' - P''_{n-1}(t) - f''_{k(j)})(x_j(t))}$$

та вибору функції g випливає

$$\left\| \frac{dx_j(t)}{dt} \right\| \leq C_2 \| g \|. \tag{19}$$

Продиференціювавши (17) по t і врахувавши нерівності (18) та (19), одержимо

$$\| D_t'(t) \| \le C_3 \| g \|^2, \quad t \in [0, t_0). \tag{20}$$

Оскільки $P_{n-1}^{(\nu)} = P_{n-1}^{(\nu-1)} + D(0)$, за нерівністю скінченних приростів маємо

$$\| P_{n-1}^{(\nu)} - P_{n-1}(\varphi_n) \| \le C_3 \| g_\nu \|^2 / 2. \tag{21}$$

Завдяки диференційовності оператора P_{n-1} можемо записати

$$P_{n-1}(\varphi_n + g) = P_{n-1}(\varphi_n) + D(\varphi_n, g) + o(\| g \|), \tag{22}$$

де $D(\varphi_n, g)$ є поліномом найкращого рівномірного наближення функції g на множині точок альтернансу різниці $\varphi_n - D(\varphi_n, g)$. Аналогічно до нерівності (8) маємо

$$\| g - D(\varphi_n, g) \| \le q \| g \|, \tag{8'}$$

де $q = \text{const}$, $0 < q < 1$. Отже,

$$(1 - q) \| g \| \le \| D(\varphi_n, g) \|. \tag{23}$$

Оскільки поліном-похідна $D(\varphi_n, g)$ відмінний від тотожного нуля, з (22) випливає порядкова рівність

$$\| P_{n-1}^{(\nu-1)} - P_{n-1}(\varphi_n) \| = \| P_{n-1}(\varphi_n + g_\nu) - P_{n-1}(\varphi_n) \| \asymp \| g_\nu \|.$$

Таким чином, нерівність (21) завдяки (23) продовжується до нерівності

$$\| P_{n-1}^{(\nu)} - P_{n-1}(\varphi_n) \| = C_4 \| P_{n-1}^{(\nu-1)} - P_{n-1}(\varphi_n) \|^2. \tag{24}$$

Оскільки за теоремою 2 процес збіжний, із (24) випливає твердження теореми 3.

1. *Шевчук Л. Б.* Построение ужей и некоторые их применения: Дис. … канд. физ.-мат. наук. – Киев, Ин-т математики АН УССР, 1989. – 139 с.
2. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 507 с.
3. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1976. – 551 с.
4. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. – М.: Наука. 1972. – 368 с.
5. *Ремез Е. Я.* Основы численных методов чебышевского приближения. – Киев: Наук. думка, 1969. – 624 с.
6. *Ковтунец В. В.* Обобщение параметрического метода С. Н. Бернштейна // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 6. – С. 689 – 695.
7. *Коллатц Л., Крабс В. К.* Теория приближений. Чебышевские приближения. – М.: Наука, 1978. – 271 с.

Получено 21.10.93