УДК 512.64

Б. З. Шаваровський, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ВИДІЛЕННЯ З МАТРИЧНИХ МНОГОЧЛЕНІВ РЕГУЛЯРНИХ ПРЯМИХ ДОДАНКІВ

We study reducibility of matrix polynomials to a quazidiagonal form with regular diagonal blocks by similarity transformation. Obtained results are applied to solving matrix algebraic equations of Riccati type.

Досліджується звідність матричних многочленів перетворенням подібності до квазідіагональної форми з регулярними діагональними блоками. Одержані при цьому результати застосовуються до розв'язування матричних алгебраїчних рівнянь типу Ріккаті.

Задачі зведення одночасним перетворенням подібності скінченного набору матриць до простіших форм (квазітрикутної, трикутної, діагональної, квазідіагональної та ін.) присвячена значна кількість робіт. Але в одних випадках накладаються дуже сильні обмеження [1], в інших випадках методи дослідження приводять до розв'язування систем нелінійних алгебраїчних рівнянь [2]. Легко бачити, що ця задача рівносильна задачі зведення до згаданих вище форм матричного многочлена з коефіцієнтами з цього набору. В роботах [1, 3, 4] вказуються умови зведення унітальних (з одиничним старшим коефіцієнтом) матричних многочленів до квазітрикутної і квазідіагональної форм. Однак при цьому обмежуються, як правило, випадком, коли основним полем є поле комплексних чисел, і припускають відомими характеристичні корені матричного многочлена. В даній роботі встановлено критерій звідності нерегулярних (зокрема, особливих) матричних многочленів до квазідіагональної форми з регулярними діагональними блоками в термінах елементарних дільників і рангів спеціально сконструйованих матриць. Одержані при цьому результати застосовуються до розв'язування алгебраїчних матричних рівнянь типу Ріккаті.

Нехай F — поле, $M_n(F)$ — множина матриць над F порядку n. Розглянемо матричний многочлен (м. м.)

$$A(x) = A_0x^s + A_0x^{s-1} + \ldots + A_s \tag{1}$$

над $M_n(F)$ і набір матриць-коефіцієнтів

$$(A_0, A_1, \ldots, A_s). \tag{2}$$

Надалі через $[A, B]$ позначимо дужки Якобі, тобто $[A, B] = AB - BA$, T — операція блочного транспонування.

Теорема 1. *Матричний многочлен (м. м.) (1) одночасним перетворенням подібності зводиться до квазідіагонального вигляду* $SA(x)S^{-1} = B_1(x) \oplus \oplus B_2(x)$, *якщо деякий його коефіцієнт* A_p *рангу* $n_p < n$ *задовольняє наступні умови*: 1) *всі елементарні дільники, що відповідають нульовому характеристичному кореню, лінійні*; 2) $\operatorname{rang} \|A_p [A_p, A_0] \ldots [A_p, A_s]\| = \operatorname{rang} \|A_p [A_p, A_0] \ldots [A_p, A_s]\|^T = n_p$. *При цьому порядок блоку* $B_1(x)$ *рівний* n_p.

Доведення. При виконанні умови 1 існує матриця $S \in \mathrm{GL}(n, F)$ така, що

$$SA_pS^{-1} = \begin{Vmatrix} A_{1p} & 0 \\ 0 & 0_{n-n_p} \end{Vmatrix}, \tag{3}$$

де $\det A_{1p} \neq 0$, індекс нульового блока вказує на його порядок. Покажемо, що при виконанні умови 2 всі матриці $[A_p, A_i]$, $i = 0, 1, \ldots, s$, одночасним перетворенням подібності з матрицею S зводяться до однакового квазідіагонального вигляду, аналогічного до вигляду (3) матриці SA_pS^{-1} з одним нульовим діагональним блоком порядку $n - n_p$. Відкинемо тривіальний випадок, коли кожна з дужок $[A_p, A_i]$ рівна нулеві. Записавши матриці S і S^{-1} у блочному вигляді

$$S = \begin{Vmatrix} S_1 & S_2 \\ S_3 & S_4 \end{Vmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{Vmatrix} \tilde{S}_1 & \tilde{S}_2 \\ \tilde{S}_3 & \tilde{S}_4 \end{Vmatrix},$$

узгодженому з виглядом матриці SA_pS^{-1}, з останньої рівності одержимо

$$SA_p = \begin{Vmatrix} A_{1p}S_1 & A_{1p}S_2 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A_pS^{-1} = \begin{Vmatrix} \tilde{S}_1A_{1p} & 0 \\ \tilde{S}_3A_{1p} & 0 \end{Vmatrix}. \tag{4}$$

Множенням матриць $\|A_p\,[A_p, A_0]\,\ldots\,[A_p, A_s]\|$ і $\|A_p\,[A_p, A_0]\,\ldots\,[A_p, A_s]\|^T$ відповідно зліва на S і справа на S^{-1}, враховуючи умову 2, вигляд (4) матриць SA_p і A_pS^{-1} і те, що $\operatorname{rang}\|A_{1p}S_1 \;\; A_{1p}S_2\| = \operatorname{rang}\|\tilde{S}_1A_{1p} \;\; \tilde{S}_3A_{1p}\|^T = n_p$, маємо

$$S\,[A_p, A_i] = \begin{Vmatrix} C_{1i} & C_{2i} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}\begin{matrix} \}\, n_p \\ \end{matrix}, \quad i = 0, 1, \ldots, s, \tag{5}$$

$$[A_p, A_i]S^{-1} = \begin{Vmatrix} \underbrace{\begin{matrix} \tilde{C}_{1i} \\ \tilde{C}_{2i} \end{matrix}}_{n_p} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \end{Vmatrix}, \quad i = 0, 1, \ldots, s. \tag{6}$$

З рівностей (5) і (6) випливає

$$S \begin{Vmatrix} \tilde{C}_{1i} & 0 \\ \tilde{C}_{2i} & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} C_{1i} & C_{2i} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} S^{-1},$$

звідки

$$\begin{Vmatrix} C_{1i} & C_{2i} \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} S^{-1} = \begin{Vmatrix} D_i & 0 \\ 0 & 0_{n-n_p} \end{Vmatrix}, \quad i = 0, 1, \ldots, s.$$

Повертаючись тепер до (5), одержуємо

$$S\,[A_p, A_i]S^{-1} = \begin{Vmatrix} D_i & 0 \\ 0 & 0_{n-n_p} \end{Vmatrix}, \quad i = 0, 1, \ldots, s.$$

Запишемо останні рівності в такому вигляді:

$$SA_pS^{-1}SA_iS^{-1} - SA_iS^{-1}SA_pS^{-1} = \begin{Vmatrix} D_i & 0 \\ 0 & 0_{n-n_p} \end{Vmatrix},$$

звідки, враховуючи (3), маємо

$$SA_iS^{-1} = \begin{Vmatrix} A_{1i} & 0 \\ 0 & A_{2i} \end{Vmatrix}, \quad i = 0, 1, \ldots, s,$$

де всі блоки A_{1i} мають порядок n_p. Теорема доведена.

***Зауваження* 1.** Як видно з доведення теореми 1, для знаходження квазідіагонального вигляду м. м. (1) досить застосувати до нього перетворення подібності з довільною матрицею S, яка задовольняє рівність (3).

Нагадаємо, що м. м. (1) називається регулярним, якщо $\det A_0 \neq 0$.

***Означення* 1.** *Неособливий м. м.* $(\det A(x) \not\equiv 0)$ *називається блочно регулярним, якщо перетворенням подібності він зводиться до квазідіагонального вигляду з усіма регулярними діагональними блоками (можливо, різних степенів).*

***Означення* 2.** *Будемо говорити, що з м. м.* (1) *виділяється k прямих регулярних доданків максимальних степенів* $(1 \leq k \leq n)$, *якщо перетворенням подібності він зводиться до квазідіагонального вигляду*

$$P A(x) P^{-1} = B_1(x) \oplus B_2(x) \oplus \ldots \oplus B_k(x) \oplus B_{k+1}(x), \tag{7}$$

де $B_1(x), \ldots, B_k(x)$ — *регулярні м. м., причому* $\deg B_j(x) > \deg B_{j+1}(x)$, $j = 1, \ldots, k$ $(\deg B_1(x) = s)$.

Теорема 2. *З м. м.* (1) *виділяється регулярний прямий доданок максимального степеня тоді і тільки тоді, коли його старший коефіцієнт A_0 задовольняє умови теореми* 1, *тобто*: 1) *всі елементарні дільники матриці A_0, що відповідають нульовому характеристичному кореню, лінійні*; 2)

$$\operatorname{rang} A_0 = \operatorname{rang} \| A_0 [A_0, A_1] \ldots [A_0, A_s] \| = \operatorname{rang} \| A_0 [A_0, A_1] \ldots [A_0, A_s] \|^T.$$

При цьому порядок регулярного блока, що виділяється, рівний $r_0 = \operatorname{rang} A_0$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $S A(x) S^{-1} = B_1(x) \oplus B_2(x)$, де $\deg B_1(x) = s$, $\deg B_2(x) < s$. Це означає, що набір (2) коефіцієнтів м. м. (1) одночасним перетворенням подібності зводиться до однакового квазідіагонального вигляду

$$S(A_0, A_1, \ldots, A_s) S^{-1} = \left(\left\| \begin{matrix} A_{10} & 0 \\ 0 & A_{20} \end{matrix} \right\|, \left\| \begin{matrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{21} \end{matrix} \right\|, \ldots, \left\| \begin{matrix} A_{1s} & 0 \\ 0 & A_{2s} \end{matrix} \right\| \right),$$

де блок A_{1i} має порядок r_0, $i = 0, 1, \ldots, s$, $A_{20} = 0_{n-r_0}$. Умови 1 та 2 випливають з квазідіагонального вигляду матриць $S A_i S^{-1}$, $S [A_0, A_i] S^{-1}$, $i = 0, 1, \ldots, s$, і того, що $\det A_{10} \neq 0$.

Достатність повністю випливає з теореми 1.

***Означення* 3.** *Будемо називати піднабір із k елементів* $(A_0, A_{m_1}, \ldots, A_{m_{k-1}})$, $0 < m_1 < \ldots < m_{k-1} \leq s$, *набору* (2) *$k$-набором коефіцієнтів максимального рангу, якщо* $\operatorname{rang} \| A_0 A_{m_1} \ldots A_{m_j} \| = \operatorname{rang} \| A_0 A_{m_1} \ldots A_{m_j} \|^T = r_j$, $j = 0, 1, \ldots, k-1$, $r_0 < r_1 < \ldots < r_{k-1}$, *причому*

$$\operatorname{rang} \| A_0 A_{m_1} \ldots A_{m_{l-1}} A_i \| = \operatorname{rang} \| A_0 A_{m_1} \ldots A_{m_{l-1}} A_i \|^T = r_{l-1}$$

при $m_{l-1} < i < m_l$, $l = 0, 1, \ldots, k-1$, $m_0 = 0$.

Для подібності довільних матриць G і H $(G = S H S^{-1})$ надалі будемо використовувати позначення: $G \simeq H$. Такий запис будемо застосовувати і для одночасної подібності наборів матриць.

Теорема 3. *Для того щоб з м. м.* (1) *виділялось k прямих регулярних доданків максимальних степенів, необхідно і достатньо, щоб для k-набору кое-*

фіцієнтів максимального рангу $\left(A_0, A_{m_1}, \dots, A_{m_{k-1}} \right)$ *виконувались наступні умови:*

1) *всі елементарні дільники, що відповідають нульовому власному значенню, кожної з матриць*

$$C_j = \left\| \begin{matrix} A_{m_j} & \dots & A_{m_1} & A_0 \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ A_{m_1} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ A_0 & & & 0 \end{matrix} \right\|, \quad j = 0, 1, \dots, k-1, \; C_0 = A_0,$$

лінійні;

2) $$\operatorname{rang} \left\| A_0 A_{m_1} \dots A_{m_j} \left[A_{m_j}, A_{m_j+1} \right] \dots \left[A_{m_j}, A_s \right] \right\| = \operatorname{rang} \left\| A_0 A_{m_1} \dots \right.$$
$$\left. \dots A_{m_j} \left[A_{m_j}, A_{m_j+1} \right] \dots \left[A_{m_j}, A_s \right] \right\|^T = r_j,$$

де

$$r_j = \operatorname{rang} \left\| A_0 A_{m_1} \dots A_{m_j} \right\| = \operatorname{rang} \left\| A_0 A_{m_1} \dots A_{m_j} \right\|^T,$$
$$j = 0, 1, \dots, k-1, \; m_0 = 0.$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай виконується рівність (7). Це означає, що

$$(A_0, A_1, \dots, A_s) \simeq \left(\tilde{A}_0, \tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_s \right) =$$
$$= \left(\operatorname{diag} \left\{ A_{10}, A_{20}, \dots, A_{k0}, A_{k+1\,0} \right\}, \operatorname{diag} \left\{ A_{11}, A_{21}, \dots, A_{k1}, A_{k+1\,1} \right\}, \dots \right.$$
$$\left. \dots, \operatorname{diag} \left\{ A_{1s}, A_{2s}, \dots, A_{ks}, A_{k+1\,s} \right\} \right), \tag{8}$$

де блоки $A_{i0}, A_{i1}, \dots, A_{is}$ мають однакові порядки $(i = 1, 2, \dots, k, k+1)$. Нехай s_j — степінь регулярного прямого доданка $B_{j+1}(x)$ і A_{m_j} — коефіцієнт при степені x^{s_j} м. м. (7) $(j = 0, 1, \dots, k-1;\; s_0 = s;\; m_0 = 0)$. В матриці $\tilde{A}_{m_j}$ $(j+1)$-й діагональний блок $A_{j+1 m_j}$ є неособливою матрицею, а всі наступні діагональні блоки рівні нулеві $(j = 0, 1, \dots, k-1)$. Це значить, що

$$\operatorname{rang} \left\| \tilde{A}_0 \; \tilde{A}_{m_1} \dots \tilde{A}_{m_j} \right\| = \operatorname{rang} \left\| \tilde{A}_0 \; \tilde{A}_{m_1} \dots \tilde{A}_{m_j} \right\|^T = \operatorname{rang} \left\| A_0 A_{m_1} \dots A_{m_j} \right\| =$$
$$= \operatorname{rang} \left\| A_0 A_{m_1} \dots A_{m_j} \right\|^T = r_j, \quad j = 0, 1, \dots, k-1,$$

причому

$$\operatorname{rang} \left\| \tilde{A}_0 \; \tilde{A}_{m_1} \dots \tilde{A}_{m_{l-1}} \; \tilde{A}_i \right\| = \operatorname{rang} \left\| \tilde{A}_0 \; \tilde{A}_{m_1} \dots \tilde{A}_{m_{l-1}} \; \tilde{A}_i \right\|^T =$$
$$\operatorname{rang} \left\| A_0 A_{m_1} \dots A_{m_{l-1}} A_i \right\| = \operatorname{rang} \left\| A_0 A_{m_1} \dots A_{m_{l-1}} A_i \right\|^T = r_{l-1}$$

для всіх i таких, що $m_{l-1} < i < m_l$, $l = 1, \dots, k-1$, $m_0 = 0$. Отже, піднабір $\left(A_0, A_{m_1}, \dots, A_{m_{k-1}} \right)$ набору (2) є k-набором коефіцієнтів максимального рангу. Оскільки матриця $\left[\tilde{A}_{m_j}, \tilde{A}_{m_j+1} \right]$ має квазідіагональний вигляд, аналогічний вигляду матриць набору (8) (причому останні $k-j$ діагональних блоків цієї матриці так само, як і у матриці $\tilde{A}_{m_j}$, нульові $(j = 0, 1, \dots, k-1;\; i = 1, \dots, s-m_j)$), то

$$\operatorname{rang} \left\| A_0 A_{m_1} \dots A_{m_j} \left[A_{m_j}, A_{m_j+1} \right] \dots \left[A_{m_j}, A_s \right] \right\| =$$

$$= \operatorname{rang} \left\| \tilde{A}_0 \ \tilde{A}_{m_1} \dots \tilde{A}_{m_j} \left[\tilde{A}_{m_j}, \tilde{A}_{m_j+1} \right] \dots \left[\tilde{A}_{m_j}, \tilde{A}_s \right] \right\| =$$

$$= \operatorname{rang} \left\| \tilde{A}_0 \ \tilde{A}_{m_1} \dots \tilde{A}_{m_j} \left[\tilde{A}_{m_j}, \tilde{A}_{m_j+1} \right] \dots \left[\tilde{A}_{m_j}, \tilde{A}_s \right] \right\|^T =$$

$$= \operatorname{rang} \left\| A_0 A_{m_1} \dots A_{m_j} \left[A_{m_j}, A_{m_j+1} \right] \dots \left[A_{m_j}, A_s \right] \right\|^T =$$

$$= \operatorname{rang} \left\| \tilde{A}_0 \ \tilde{A}_{m_1} \dots \tilde{A}_{m_j} \right\| = \operatorname{rang} \left\| \tilde{A}_0 \ \tilde{A}_{m_1} \dots \tilde{A}_{m_j} \right\|^T =$$

$$= \operatorname{rang} \left\| A_0 A_{m_1} \dots A_{m_j} \right\| = \operatorname{rang} \left\| A_0 A_{m_1} \dots A_{m_j} \right\|^T = r_j.$$

Умова 2 теореми доведена.

Розглянемо тепер матриці

$$C_j = \begin{Vmatrix} A_{m_j} & \dots & A_{m_1} & A_0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ A_{m_1} & \iddots & & \\ A_0 & & & 0 \end{Vmatrix}, \quad j = 0, 1, \dots, k-1 \quad (C_0 = A_0).$$

Очевидно,

$$C_j \simeq \tilde{C}_j = \begin{Vmatrix} \tilde{A}_{m_j} & \dots & \tilde{A}_{m_1} & \tilde{A}_0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ \tilde{A}_{m_1} & \iddots & & \\ \tilde{A}_0 & & & 0 \end{Vmatrix} \simeq$$

$$\simeq \operatorname{diag} \left\{ \begin{Vmatrix} A_{1m_j} & \dots & A_{1m_1} & A_{10} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \\ A_{1m_1} & \iddots & & \\ A_{10} & & & 0 \end{Vmatrix}, \begin{Vmatrix} A_{2m_j} & \dots & A_{2m_1} \\ \vdots & \iddots & \vdots \\ A_{2m_1} & \dots & 0 \end{Vmatrix}, \dots, A_{j+1m_j}, 0_{d_j} \right\},$$

де блоки $A_{10}, A_{2m_1}, \dots, A_{j+1m_j}$ — неособливі матриці і, значить, нульовий блок має порядок $d_j = \operatorname{def} C_j$. Отже, в матриці C_j, $j = 0, 1, \dots, k-1$, всі елементарні дільники, що відповідають нульовому власному значенню, лінійні. Необхідність доведена.

Достатність. Нехай виконуються умови 1 і 2 теореми. Їх виконання для $j = 0$ означає виконання умов 1 і 2 теореми 2, згідно з якою з м. м. $A(x)$ виділяється регулярний прямий доданок максимального ($= s$) степеня, тобто

$$P_0 A(x) P_0^{-1} = B_1(x) \oplus B^{(1)}(x), \tag{9}$$

де $\deg B^{(1)}(x) < \deg B_1(x) = s$ і порядок блока $B_1(x)$ рівний $r_0 = \operatorname{rang} A_0$. Для набору матриць-коефіцієнтів відповідно маємо

$$(A_0, A_1, \dots, A_s) \simeq \left(\operatorname{diag} \{ A_{10}, B_0^{(1)} \}, \operatorname{diag} \{ A_{11}, B_1^{(1)} \}, \dots, \operatorname{diag} \{ A_{1s}, B_s^{(1)} \} \right),$$

де $\det A_{10} \neq 0$, $B_0^{(1)} = 0$.

Розглянемо матрицю $\operatorname{diag} \left\{ A_{1m_1}, B_{m_1}^{(1)} \right\} \simeq A_{m_1}$. Очевидно, матриця $B_{m_1}^{(1)}$ є старшим коефіцієнтом м. м. $B^{(1)}(x)$. З того, що у матриці

$$C_1 = \left\| \begin{matrix} A_{m_1} & A_0 \\ A_0 & 0 \end{matrix} \right\| \simeq \left\| \begin{matrix} A_{1m_1} & 0 & A_{10} & 0 \\ 0 & B_{m_1}^{(1)} & 0 & 0 \\ A_{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\| \simeq$$

$$\simeq \operatorname{diag} \left\{ \left\| \begin{matrix} A_{1m_1} & A_{10} \\ A_{10} & 0 \end{matrix} \right\|, B_{m_1}^{(1)}, 0 \right\}$$

всі елементарні дільники з нульовими власним значенням лінійні, випливає, що і у матриці $B_{m_1}^{(1)}$ всі елементарні дільники з нульовим власним значенням лінійні. З умови 2 при $j = 1$ маємо

$$\operatorname{rang} \left\| \{A_{10} \oplus 0_{n-r_0}\} \{A_{1m_1} \oplus B_{m_1}^{(1)}\} \left[\{A_{1m_1} \oplus B_{m_1}^{(1)}\}, \{A_{1m_1+1} \oplus \right.\right.$$

$$\left.\left. \oplus B_{m_1}^{(1)}\} \right] \ldots \left[\{A_{1m_1} \oplus B_{m_1}^{(1)}\}, \{A_{1s} \oplus B_s^{(1)}\} \right] \right\| =$$

$$= \operatorname{rang} \left\| \{A_{10} \oplus 0_{n-r_0}\} \{A_{1m_1} \oplus B_{m_1}^{(1)}\} \left[\{A_{1m_1} \oplus B_{m_1}^{(1)}\}, \{A_{1m_1+1} \oplus \right.\right.$$

$$\left.\left. \oplus B_{m_1+1}^{(1)}\} \right] \ldots \left[\{A_{1m_1} \oplus B_{m_1}^{(1)}\}, \{A_{1s} \oplus B_s^{(1)}\} \right] \right\|^T = \operatorname{rang} A_{10} + \operatorname{rang} B_{m_1}^{(1)}.$$

Оскільки $\det A_{10} \neq 0$, то

$$\operatorname{rang} \left\| B_{m_1}^{(1)} \left[B_{m_1}^{(1)}, B_{m_1+1}^{(1)} \right] \ldots \left[B_{m_1}^{(1)}, B_s^{(1)} \right] \right\| =$$

$$= \operatorname{rang} \left\| B_{m_1}^{(1)} \left[B_{m_1}^{(1)}, B_{m_1+1}^{(1)} \right] \ldots \left[B_{m_1}^{(1)}, B_s^{(1)} \right] \right\|^T = \operatorname{rang} B_{m_1}^{(1)}.$$

Таким чином, для прямого доданка $B^{(1)}(x)$ в (9) виконуються умови 1 та 2 теореми 2, згідно з якою одержуємо $P_1 A(x) P_1^{-1} = B_1(x) \oplus B_2(x) \oplus B^{(2)}(x)$, де $B_1(x)$, $B_2(x)$ — регулярні м. м. відповідно порядків r_0, $r_1 - r_0$. Для їх степенів виконується співвідношення

$$\deg B_1(x) > \deg B_2(x) > \deg B^{(2)}(x),$$

або більш точно: степінь $B_l(x)$ рівний степеню одночлена м. м. (1) з коефіцієнтом $A_{m_{l-1}}$, $l = 1, 2$; $m_0 = 0$. Далі з умов 1 та 2 теореми 3 при $j = 2$ подібно до того, як це було зроблено раніше для $j = 1$, показуємо виконання умов 1 та 2 теореми 2 для прямого доданка $B^{(2)}(x)$. Згідно з цією ж теоремою м. м. $B^{(2)}(x)$ допускає виділення регулярного прямого доданка порядку $r_2 - r_1$ максимального степеня, рівного степеню одночлена м. м. (1) з коефіцієнтом A_{m_2}. Продовжуючи так і далі, ми в решті решт одержуємо розклад (7). Теорема доведена.

***Наслідок* 1.** *Неособливий м. м.* (1) *блочно регулярний тоді і тільки тоді, коли виконуються умови* 1 *та* 2 *теореми* 3, *де* $r_{k-1} = n$.

***Наслідок* 2.** *Для того щоб м. м.* $A(x)$ *зводився до прямої суми блочно регулярного м. м. і нульового, необхідно і достатньо виконання умов* 1 *та* 2 *теореми* 3, *де* $r_{k-1} = \operatorname{rang} A(x)$.

***Зауваження.* 2.** З доведення теореми 3 випливає, що порядки $n_1, n_2, \ldots, n_k$ прямих регулярних доданків $B_1(x), B_2(x), \ldots, B_k(x)$ однозначно визначаються наступним чином: $n_1 = r_0$, $n_2 = r_1 - r_0, \ldots, n_k = r_{k-2} - r_{k-1}$, де числа r_0, $r_1, \ldots, r_{k-1}$ вказані в теоремі 3.

3. Степені s_l прямих доданків $B_l(x)$ однозначно визначаються степенями одночленів м. м. (1) з коефіцієнтами $A_{m_{l-1}}$, $l = 1, \ldots, k$; $m_0 = 0$.

Точніше про однозначність зображення м. м. у вигляді прямої суми (7) твердить наступна теорема.

Теорема 4. *Прямі регулярні доданки $B_1(x), B_2(x), \ldots, B_k(x)$ максимальних степенів, так само, як і прямий (можливо, нерегулярний) доданок $B_{k+1}(x)$ в зображенні* (7), *визначаються матрицею $A(x)$ однозначно з точністю до подібності.*

Доведення достатньо провести для $k = 1$. Нехай $P\{B_1(x) \oplus B_2(x)\} = \{\tilde{B}_1(x) \oplus \tilde{B}_2(x)\}P$, де $P \in GL(n, F)$. Зображаючи матрицю P в потрібному блочному вигляді, з останньої рівності маємо

$$\begin{Vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} B_1(x) & 0 \\ 0 & B_2(x) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \tilde{B}_1(x) & 0 \\ 0 & \tilde{B}_2(x) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{Vmatrix}.$$

Звідси, порівнюючи коефіцієнти при старших степенях x, одержуємо

$$\begin{Vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} B_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \tilde{B}_{01} & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} P_1 & P_2 \\ P_3 & P_4 \end{Vmatrix}.$$

Оскільки $\det B_{01} \neq 0$ і $\det \tilde{B}_{01} \neq 0$, з останнього випливає, що $P_2 = P_3 = 0$. Отже, $B_1(x) \simeq \tilde{B}_1(x)$ і $B_2(x) \simeq \tilde{B}_2(x)$. Теорема доведена.

Теорема 3 дає критерій виділення з м. м. (1) регулярних прямих доданків максимальних степенів. Вкажемо тепер практичний спосіб для фактичного знаходження розкладу (7) і перетворювальної матриці P. На першому кроці знаходимо неособливу матрицю P_0, що зводить старший коефіцієнт м. м. (1) матриці A_0 до однієї з нормальних форм, в якій неособливі діагональні блоки займають перші позиції на головній діагоналі (в залежності від поля F нормальною формою може бути, наприклад, нормальна форма Фробеніуса, форма Жордана або інша). Методи побудови матриць викладені в розд. VI [5]. Отже, маємо $P_0 A_0 P_0^{-1} = \operatorname{diag}\{A_{10}, 0_{n-r_0}\}$, де $\det A_{10} \neq 0$. З доведення теореми 1 випливає $P_0 A(x) P_0^{-1} = B_1(x) \oplus B^{(1)}(x)$, де $B_1(x)$ — регулярний прямий доданок максимального степеня, $\deg B^{(1)}(x) < \deg B_1(x) = s$. На другому кроці знаходимо матрицю P_{01}, що зводить старший коефіцієнт $A_{m_1}^{(1)}$ матриці $B^{(1)}(x)$ до нормальної форми, в якій неособливі діагональні блоки займають перші позиції на головній діагоналі

$$P_{01} A_{m_1}^{(1)} P_{01}^{-1} = \operatorname{diag}\{A_{1m_1}^{(1)}, 0_{n-r_1}\}, \quad \det A_{1m_1}^{(1)} \neq 0.$$

Як і на попередньому кроці, маємо $P_{01} B^{(1)}(x) P_{01}^{-1} = B_2(x) \oplus B^{(2)}(x)$, де $B_2(x)$ — регулярний прямий доданок максимального степеня. Продовжуючи так і далі, через k таких кроків за вказаними в [5] методами побудуємо неособливі матриці $P_0, P_{01}, \ldots, P_{0k-1}$ відповідно до порядків $n, n - r_0, \ldots, n - r_{k-2}$ і з м. м. (1) виділимо k прямих регулярних доданків максимальних степенів, тобто остаточно матимемо розклад (7), де $P = P_{k-1} \ldots P_1 P_0$, $P_i = E_{r_{i-1}} \oplus P_{0i}$, $i = 1, \ldots, k-1$ (індекс одиничного блоку E вказує на його порядок).

Розглянемо тепер застосування одержаних результатів до розв'язування матричних алгебраїчних рівнянь типу Ріккаті

$$XAX + XB + CX + D = 0, \tag{10}$$

де $A, B, C, D \in M_n(F)$, X — невідома $n \times n$-матриця. Якщо $\det A \neq 0$, то, як відомо, дане рівняння підстановкою $AX + B = Y$ зводиться до матричного многочленного одностороннього квадратичного рівняння типу $Y^2 + KY + L = 0$. Розглянемо рівняння (10) у випадку, коли $\det A = 0$. Для цього за його коефіцієнтами побудуємо м. м. вигляду $G(x) = Ax^2 + Bx + C$. Припустимо, що м. м. $G(x)$ допускає виділення прямого регулярного доданка максимального $(=2)$ степеня, тобто $RG(x)R^{-1} = G_1(x) \oplus G_2(x)$, де $\deg G_2(x) < \deg G_1(x) = 2$. За викладеним у даній роботі методом побудуємо матрицю перетворення R і з її допомогою трансформуємо рівняння (10). Зробивши заміну змінної $\tilde{X} = RXR$ і позначивши $RAR^{-1} = \tilde{A}$, $RBR^{-1} = \tilde{B}$, $RCR^{-1} = \tilde{C}$, $RDR^{-1} = \tilde{D}$, одержимо рівняння попереднього вигляду $\tilde{X}\tilde{A}\tilde{X} + \tilde{X}\tilde{B} + \tilde{C}\tilde{X} + \tilde{D} = 0$. Тут коефіцієнти $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$ мають однаковий квазідіагальний вигляд, а саме:

$$\tilde{A} = \begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{Vmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{Vmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{Vmatrix}.$$

Зобразимо матрицю $\tilde{D}$ і невідому матрицю $\tilde{X}$ в аналогічній блочній формі

$$\tilde{D} = \begin{Vmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{Vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{Vmatrix}.$$

Тепер маємо рівняння у вигляді

$$\begin{Vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{Vmatrix} +$$

$$+ \begin{Vmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{Vmatrix} = 0.$$

Останнє рівносильне системі таких рівнянь:

$$X_1 A_1 X_1 + X_1 B_1 + C_1 X_1 + D_1 = 0, \ (X_1 A_1 + C_1) X_2 + X_2 B_2 + D_2 = 0,$$

$$C_2 X_3 + X_3 (A_1 X_1 + B_1) + D_3 = 0, \ C_2 X_4 + X_4 B_2 + (D_2 + X_3 A_1 X_2) = 0.$$

Перше з цих рівнянь є рівнянням типу Ріккаті з неособливим старшим коефіцієнтом нижчого порядку, ніж вихідне, а три останні — неперервні рівняння типу Сільвестра.

1. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – К.: Наук. думка, 1981. – 224 с.
2. *Базилевич Ю. Н.* Приведение системы линейных дифференциальных уравнений к максимально возможному количеству независимых подсистем // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 2. – С. 360–361.
3. *Казимирский П. С., Грынив Л. М.* Приведение регулярного матричного многочлена к квазидиагональному виду // Укр. мат. журн. – 1974. – **26**, № 3. – С. 318–327.
4. *Грынив Л. М.* О приведении матричного многочлена к блочно-треугольному виду // Вестн. Львов. политехн. ин-та. – 1983. – № 172. – С. 27–29.
5. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1970. – 576 с.

Получено 30.06.92