УДК 513.83 + 517.919

І. О Парасюк, канд. фіз.-мат. наук (Київ. ун-т)

РЕДУКЦІЯ ТА КОІЗОТРОПНІ ІНВАРІАНТНІ ТОРИ ГАМІЛЬТОНОВИХ СИСТЕМ З НЕПАУССОНОВИМИ КОМУТАТИВНИМИ СИМЕТРІЯМИ. II

Hamiltonian systems of mechanical type are considered on a twisted cotangent bundle of a manifold admitting smooth free torus action. In the case where these systems possess non-Poissonian symmetries generated by the torus action, the Lee–Cartan reduction scheme is described and the structure of reduced phase space and reduced Hamiltonians are clarified.

Розглядаються гамільтонові системи механічного типу на скрученому кодотичному розшаруванні многовиду, який допускає гладку вільну дію тора. У випадку, коли симетрії цих систем, породжені дією тора, непуассонові, описано схему редукції Лі – Картана і з'ясовано структуру редукованого фазового простору та редукованих гамільтоніанів.

У даній роботі, продовжуючи дослідження, розпочаті в [1], ми вивчаємо гамільтонові системи механічного типу, які допускають непуассонові комутативні симетрії.

Нехай $\mathfrak{M}$ — зв'язний гладкий n-вимірний многовид, $\mathrm{pr}: T^*\mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$ — кодотичне розшарування, Λ — 1-форма дії (форма Ліувілля $p\,dq$) на $T^*\mathfrak{M}$; 2-форма $d\Lambda$ визначає на $T^*\mathfrak{M}$ стандартну симплектичну структуру. Скрученим кодотичним розшаруванням називається симплектичний многовид $(M \overset{\mathrm{def}}{=} T^*\mathfrak{M}, \omega^2)$ з симплектичною структурою

$$\omega^2 = d\Lambda + \mathrm{pr}^*\Gamma, \tag{1}$$

де Γ — замкнена 2-форма на $\mathfrak{M}$ [2, 3]. У [2] симплектична структура скрученого кодотичного розшарування інтерпретується як збурення стандартної симплектичної структури „зовнішнім магнітним полем". Многовид (M, ω^2) можна розглядати як фазовий простір системи Гамільтона, яка відповідає лагранжевій системі з гіроскопічними силами. З цієї причини Γ називається формою гіроскопічних сил. Зауважимо, що лагранжеві системи з гіроскопічними силами виникають при зниженні порядку лагранжевих систем з симетріями [4 – 6].

Припустимо, що многовид $\mathfrak{M}$ допускає гладку вільну дію тора T^k, тобто маємо головне T^k-розшарування $\rho: \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$ над гладким $(n-k)$-вимірним многовидом $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}/T^k$. Якщо форма Γ T^k-інваріантна, тоді дія тора T^k на $\mathfrak{M}$ природно породжує симплектичну дію тора T^k на (M, ω^2). На відміну від [6, 7] у даній роботі ми вивчаємо випадок, коли ця дія не є пуассоновою, тобто реалізується випадок, що є предметом розгляду [1].

У п. 2 ми з'ясовуємо структуру редукованого пуассонового многовиду $N = M/T^k$. У п. 3 описуємо клас T^k-інваріантних гамільтонових систем механічного типу на (M, ω^2), які редукуються до систем механічного типу на скрученому кодотичному розшаруванні многовиду $T^*\mathfrak{N}$. У п. 4 аналізуємо умову нерезонансності симплектичної структури ω^2 у випадку, коли редукована система цілком інтегровна.

1. T^k-інваріантні замкнені 2-форми на $\mathfrak{M}$. Нехай $\mathfrak{t}^k$ — алгебра Лі тора T^k. Через Y_a позначимо векторне поле на $\mathfrak{M}$, яке породжує дію відповідної вектору $a \in \mathfrak{t}^k$ однопараметричної підгрупи тора. Природна дія цієї підгрупи на $M = T^*\mathfrak{M}$ визначає векторне поле, яке, як і в [1], позначатимемо через X_a. Добре відомо [8], що X_a — глобально гамільтонове відносно симплектичної структури $\mathrm{d}\Lambda$ і його гамільтоніан має вигляд $(\mathfrak{m}, a)$, де $\mathfrak{m}: M \to (\mathfrak{t}^k)^*$ — відображення моментів природної симплектичної дії тора T^k на $(M, \mathrm{d}\Lambda)$. Очевидно, $\mathrm{pr}_* X_a = Y_a$.

Нехай Γ — замкнена T^k-інваріантна 2-форма на $\mathfrak{M}$. Тоді дія тора на (M, ω^2) симплектична. Пов'язана з нею білінійна форма (2-коцикл) на $\mathfrak{t}^k$ [1] має вигляд $\mathfrak{C}(a, b) = \omega^2(X_a, X_b) = \Gamma(Y_a, Y_b)$. (Ми врахували, що $\mathrm{d}\Lambda(X_a, X_b) = (\mathfrak{m}, [b, a]) = 0$.)

Нас у першу чергу цікавитиме випадок, коли $\mathfrak{C} \neq 0$. Для цього необхідно вимагати, щоб $\mathrm{H}^2(\mathfrak{M}; \mathbb{R}) \neq 0$ і Γ належала нетривіальному класу когомологій: $[\Gamma] \neq 0$. Далі, оскільки $\mathrm{d}(Y_a \lrcorner \Gamma) = \mathfrak{L}_{X_a}\Gamma = 0$, то 1-форма $Y_a \lrcorner \Gamma$ замкнена. Неважко показати, що для $a \notin \operatorname{Ker}\mathfrak{C}$ ця форма не є точною. Отже, $\mathrm{H}^1(\mathfrak{M}; \mathbb{R}) \neq 0$ теж є необхідною умовою нетривіальності $\mathfrak{C}$.

Зафіксуємо розклад $\mathfrak{t}^k$ у пряму суму підпросторів $\operatorname{Ker}\mathfrak{C} \oplus L$ і через $\mathcal{P}_K$ та $\mathcal{P}_L$ позначимо проектори відповідно на перший та другий підпростори.

Твердження 1. *Існує така форма зв'язності* ω *головного* T^k*-розшарування* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{p})$, *що*

$$Y_a \lrcorner \Gamma = \mathfrak{C}(a, \omega) \quad \forall\, a \in L. \tag{2}$$

Форма кривини $\Omega = \mathrm{d}\omega$ *кожної форми зв'язності, що задовольняє* (2), *набуває значень у* $\operatorname{Ker}\mathfrak{C}$.

Доведення. Оскільки $\mathfrak{C}|_L$ невироджена, то співвідношення

$$Y_a \lrcorner \Gamma = \mathfrak{C}(a; \omega_L), \quad a \in L, \tag{2'}$$

коректно визначає на $\mathfrak{M}$ L-значну замкнену T^k-інваріантну 1-форму ω_L. Оскільки

$$\mathfrak{C}(a, \omega_L(Y_b)) = \mathfrak{C}(a, b) = \mathfrak{C}(a, \mathcal{P}_L b), \quad a \in L, \quad a \in \mathfrak{t}^k,$$

то $\omega_L(Y_b) = \mathcal{P}_L b$. Якщо $\hat{\boldsymbol{\omega}}$ — довільна форма зв'язності, то $\omega = \mathcal{P}_K \hat{\boldsymbol{\omega}} + \omega_L$ — форма зв'язності, яка задовольняє (2). Друга частина твердження випливає з замкнутості форми $Y_a \lrcorner \Gamma$.

Твердження 2. *Нехай форма зв'язності* ω *задовольняє умову* (2). *Тоді*

$$\Gamma = \alpha + \beta \wedge \mathcal{P}_K \omega + \mathfrak{C}(\omega, \omega), \tag{3}$$

де α — *горизонтальна відносно* ω *частина форми* Γ, β — *замкнена* $(\operatorname{Ker}\mathfrak{C})^*$*-значна 1-форма, а 2-форма* $\mathfrak{C}(\omega, \omega)$ *на парі дотичних векторів* ξ, η *обчислюється за правилом* $\eta \lrcorner \xi \lrcorner \mathfrak{C}(\omega, \omega) = \mathfrak{C}(\omega(\xi), \omega(\eta))$. *Форми* α *і* β *можна опустити на базу розшарування*: $\alpha = \mathfrak{p}^* \tilde{\alpha}$, $\beta = \mathfrak{p}^* \tilde{\boldsymbol{\beta}}$, *де* $\tilde{\alpha}$ — *2-форма,* $\tilde{\boldsymbol{\beta}}$ — $(\operatorname{Ker}\mathfrak{C})^*$*-значна 1-форма на* $\mathfrak{N}$.

Доведення. Форму β визначимо співвідношенням

$$(\beta(\cdot), a) = -(Y_a \lrcorner \Gamma)(\cdot), \quad a \in \operatorname{Ker}\mathfrak{C}. \tag{4}$$

Форма β замкнена і T^k-інваріантна. Крім того,

$$\beta(Y_b) = 0 \quad \forall\, b \in \mathfrak{t}^k. \tag{5}$$

Отже, β можна опустити на базу. Тепер розглянемо форму $\alpha \overset{\mathrm{def}}{=} \Gamma - \beta \wedge$

$\wedge\, \mathcal{P}_K\omega - \mathfrak{C}(\omega, \omega)$. Вона T^k-інваріантна і, крім того, обертається в нуль на кожному Y_a. Дійсно, якщо $a \in \operatorname{Ker}\mathfrak{C}$, то в силу (4), (5) маємо $Y_a \lrcorner\, \alpha = Y_a \lrcorner\, \Gamma + (\beta, a) = 0$. Якщо ж $a \in L$, то на основі (2′), (5) одержимо $Y_a \lrcorner\, \alpha = Y_a \lrcorner\, \Gamma - \mathfrak{C}(a, \omega_L) = 0$. Таким чином, форма α є горизонтальною частиною Γ і її теж можна опустити на $\mathfrak{N}$.

Нетривіальність $\mathfrak{C}$, крім умов на когомології многовиду $\mathfrak{M}$, накладає певні обмеження і на характер розшарування $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{p})$.

Ототожнимо $\mathfrak{t}^k$ з координатним простором $\mathbb{R}^k$ так, щоб $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$. Опустимо форму кривини $\Omega = \mathrm{d}\omega$ форми зв'язності ω з твердження 1 на $\mathfrak{N}$: $\Omega = \mathfrak{p}\times\tilde{\Omega}$. Як відомо [9], компоненти форми $\tilde{\Omega}$ цілочислові. Нехай $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_{n_2}^2$ — цілочисловий базис у $H^2(\mathfrak{N}, \mathbb{R})$. Тоді існують такі цілочислові вектори $j_1, \ldots, j_{n_2} \in \operatorname{Ker}\mathfrak{C}$, для яких

$$\tilde{\Omega} = j_1\sigma_1^2 + \ldots + j_{n_2}\sigma_{n_2}^2 + \mathrm{d}\nu, \tag{6}$$

де ν — $\operatorname{Ker}\mathfrak{C}$-значна 1-форма на $\mathfrak{N}$. Нехай $k_1 = \operatorname{rank}[j_1, \ldots, j_{n_2}]$. Існує такий розклад $T^k = T^{k_1}\times T^{k_2}$, що підалгебра Лі $\mathfrak{t}^{k_1} \subset \mathfrak{t}^{k_2}$ тора T^{k_1} (як підгрупи тора T^k) є лінійним підпростором у $\mathfrak{t}^k$, натягненим на вектори $j_1, \ldots, j_{n_2}$. Позначимо через $\mathcal{P}_2\colon \mathfrak{t}^{k_1} \to \mathfrak{t}^{k_2}$ проектор на підалгабру Лі тора T^{k_2} вздовж $\mathfrak{t}^{k_1}$.

Твердження 3. *Існує форма зв'язності* ω_0 *головного розшарування* $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{p})$, *яка задовольняє умову* (2) *при* $\omega = \omega_0$ *і для якої* $\mathrm{d}\,\mathcal{P}_2\omega_0 = 0$. ***Форма*** $\mathcal{P}_2\omega_0$ *природно визначає плоску зв'язність на головному* T^{k_2}*-розшаруванні* $(\mathfrak{M}' \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{M}/T^{k_2}, \mathfrak{N}, \mathfrak{p}')$, *індукованому дією тора* T^{k_2} *на* $\mathfrak{M}'$.

Доведення. Покладемо $\omega_0 = \omega - \mathfrak{p}^*\nu$, де ν визначена (6). Ця форма, як і ω, задовольняє (2) і, крім того, $\mathrm{d}\omega_0 = \mathfrak{p}^*(j_1\sigma_1^2 + \ldots + j_{n_2}\sigma_{n_2}^2)$. Зрозуміло, що $\mathrm{d}\mathcal{P}_2\omega_0 = 0$. Форма $\mathcal{P}_2\omega_0$ індукує замкнену форму зв'язності на $(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}, \mathfrak{p}')$.

2. Редукція Лі – Картана. Нехай Γ — T^k-інваріантна замкнена 2-форма на $\mathfrak{M}$ з нетривіальним коциклом $\mathfrak{C}$. Дія тора T^k на M симплектична відносно обох структур $\mathrm{d}\Delta$ та ω^2, однак відносно другої вона не є пуассоновою. Нехай $\{\cdot,\cdot\}$ та $I\,\mathrm{d}f$ відповідно дужка Пуассона та гамільтонове векторне поле гладкої функції $f\colon M \to \mathbb{R}$, породжені структурою ω^2. Проведемо редукцію пуассонової структури $\{\cdot,\cdot\}$ так, як це було зроблено в [1], і дослідимо будову редукованого пуассонового многовиду $(N = M/T^k, \{\cdot,\cdot\}_N)$.

Твердження 4. *Многовид* M *можна ототожнити з многовидом* $M_0 \times (\mathfrak{t}^k)^*$, *де* $M_0 = \boldsymbol{m}^{-1}(0)$ *— поверхня нульового рівня відображення* $\boldsymbol{m}$.

Доведення. За означенням відображення $\boldsymbol{m}$ маємо співвідношення

$$(\boldsymbol{m}(p), a) = \Lambda(X_a(p)) = (p, Y_a(\operatorname{pr}(p))), \quad p \in M, \quad a \in \mathfrak{t}^k. \tag{7}$$

Запровадимо відображення $P_0\colon M \to M$, яке кожному $p \in M$ співставляє точку

$$P_0(p) = p - (\boldsymbol{m}(p), \omega|_{T_q\mathfrak{M}}), \quad q = \operatorname{pr}(p). \tag{8}$$

В силу (7), (8) маємо $(P_0(p), Y_a(q)) = (p, Y_a(q)) - (\boldsymbol{m}(p), a) = 0$, а це означає, що P_0 відображає M на M_0, причому $P_0|_{M_0}$ — тотожне відображення многовиду M_0. Співставляючи кожному $p \in M$ пару $(P_0(p), \boldsymbol{m}(p)) \in M_0 \times (\mathfrak{t}^k)^*$, одержуємо гладку біекцію многовидів M і $M_0 \times (\mathfrak{t}^k)^*$.

Оскільки $d\boldsymbol{m}(X_a) = 0$, то кожна поверхня рівня відображення $\boldsymbol{m}$, зокрема M_0, T^k-інваріантна. Як відомо [5, 8], простір орбіт M_0/T^k можна ототожнити з многовидом $T^*\mathfrak{N}$. Виникає головне T^k-розшарування $\pi_0 : M \to T^*\mathfrak{N}$ і комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccccc}
\left(T^*\mathfrak{M} = M \approx M_0 \times (\mathfrak{t}^k)^*\right) & & \xrightarrow{P_0} & & M_0 \\
\Big\downarrow \mathrm{pr} & & \swarrow \mathrm{pr}\circ\iota & & \Big\downarrow \pi_0 \\
\mathfrak{M} & \xrightarrow{\mathfrak{p}} & \mathfrak{N} & \xleftarrow{\mathfrak{pr}} & T^*\mathfrak{N}
\end{array}, \qquad (9)$$

де $\iota : M_0 \to M$ — вкладення, $\mathfrak{pr}$ — природна проекція кодотичного розшарування.

Твердження 5. *Фактор-многовид M/T^k можна ототожнити з многовидом $N \overset{\text{def}}{=} T\mathfrak{N} \times (\mathfrak{t}^k)^*$. Відображення $\hat{\pi} \overset{\text{def}}{=} \pi_0 \circ P_0 \times \boldsymbol{m} : M \to N$ є проекцією головного T^k-розшарування $(M, N, \hat{\pi})$.*

Доведення. З T^k-інваріантності відображення $\boldsymbol{m}$ та 1-форми ω випливає T^k-еквіваріантність відображення $P_0(p)$. Тому

$$M/T^k \approx (M_0 \times (\mathfrak{t}^k)^*)/T^k = (M_0/T^k) \times (\mathfrak{t}^k)^* \approx T^*\mathfrak{N} \times (\mathfrak{t}^k)^*.$$

Відображення $\hat{\pi}$ встановлює взаємнооднозначну відповідність між T^k-орбітами в M і точками N. Неважко також переконатись у тому, що $\hat{\pi}$ — субмерсія.

Редукована дужка $\{\cdot,\cdot\}_N$ коректно визначається формулою $\{f, g\}_N \circ \hat{\pi} = \{f \circ \hat{\pi}, g \circ \hat{\pi}\}_N$, $f, g : N \to \mathbb{R}$. Опишемо тепер її безпосередньо, без використання дужки $\{\cdot,\cdot\}$.

Нехай $\mathrm{d}\hat{\Lambda}$ — стандартна симплектична структура на $T^*\mathfrak{N}$, $\{\cdot,\cdot\}^0$ — відповідна їй пуассонова структура. Через π_1 та π_2 позначимо проекції відповідно на перший і другий співмножники прямого добутку $T^*\mathfrak{N} \times (\mathfrak{t}^k)^*$. Похідну функції $f: N \to \mathbb{R}$ в точці $y \in N$ щодо імпульсів $\tilde{p} \in T^*_{\tilde{q}}\mathfrak{N}$, $\tilde{q} = \mathfrak{pr} \circ \pi_1(y)$ природно вважати вектором $\partial_{\tilde{p}} f(y) \in T_{\tilde{q}}\mathfrak{N}$, а похідну щодо моментів $\boldsymbol{m} \in (\mathfrak{t}^k)^*$ — вектором $\partial_m f(y) \in \mathfrak{t}^k$.

Теорема 1. *Нехай $\tilde{\alpha}$, β, $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ — диференціальні форми, визначені твердженням 2. Дужку Пуассона $\{\cdot,\cdot\}_N$ характеризують такі співвідношення:*

1) *якщо $f, g : T^*\mathfrak{N} \to \mathbb{R}$, то*

$$\{f \circ \pi_1, g \circ \pi_1\}_N = \{f, g\}^0 \circ \pi_1 + [(\pi_2(y), \tilde{\boldsymbol{\Omega}}) + \tilde{\alpha}](\partial_{\tilde{p}} f \circ \pi_1, \partial_{\tilde{p}} g \circ \pi_1);$$

2) *якщо $f, g : T^*\mathfrak{N} \to \mathbb{R}$, $g : (\mathfrak{t}^k)^* \to \mathbb{R}$, то*

$$\{f \circ \pi_1, g \circ \pi_2\}_N = (\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\partial_{\tilde{p}} f \circ \pi_1), \partial_m g \circ \pi_2);$$

3) *якщо $f, g : (\mathfrak{t}^k)^* \to \mathbb{R}$, то* $\{f \circ \pi_2, g \circ \pi_2\}_N = \mathfrak{C}(\partial_m f \circ \pi_2, \partial_m g \circ \pi_2)$.

Доведення спирається на твердження 6 – 8, які ми наводимо нижче.

Твердження 6. *Справедлива формула* $\Lambda = (\pi_0 \circ P_0)^* \tilde{\Lambda} + (\boldsymbol{m}, \mathrm{pr}^* \omega)$, *д е* $\tilde{\Lambda}$ — 1-*форма дії на* $T^* \mathfrak{N}$.

Доведення. Оскільки $\iota^* \Lambda \pi_0^* \tilde{\Lambda}$, то $(\iota \circ P_0)^* \Lambda = (\pi_0 \circ P_0)^* \tilde{\Lambda}$, а тоді для кожного $\xi \in T_p M$ маємо

$$\xi \lrcorner [(\pi_0 \circ P_0)^* \tilde{\Lambda} + (\boldsymbol{m}, \mathrm{pr}^* \omega)] = \Lambda(\iota \circ P_{0*}\xi) + (\boldsymbol{m}(p), \omega(\mathrm{pr}_* \xi)) =$$

$$= [P_0(p) + (\boldsymbol{m}(p), \omega)](\mathrm{pr}_* \xi) = (p, \mathrm{pr}_* \xi) = \Lambda(\xi).$$

Починаючи з цього місця, там де це не викликає непорозумінь, позначатимемо однаковими символами диференціальні форми (зокрема, функції) та об'єкти, індуковані ними за допомогою відображень проектування, що фігурують у діаграмі (9). Згідно з цим зауваженням, а також з твердженнями 2, 6 форму ω^2 наведемо у вигляді

$$\omega^2 = \mathrm{d}\Lambda + \Gamma = \mathrm{d}\tilde{\Lambda} + \mathrm{d}\boldsymbol{m} \wedge \omega + (\boldsymbol{m}, \tilde{\boldsymbol{\Omega}}) + \tilde{\alpha} + \tilde{\boldsymbol{\beta}} \wedge \mathcal{P}_K \omega + \mathfrak{C}(\omega, \omega). \tag{10}$$

Твердження 7. $\{(\boldsymbol{m}, a), (\boldsymbol{m}, b)\} = \mathfrak{C}(a, b)$.

Доведення. Для вектора $\xi \in T_p M$ покладемо $\xi_1 = \pi_0 \circ P_{0*}\xi \in T^* \mathfrak{N}$, $\xi_2 = \mathrm{d}\boldsymbol{m}(\xi) \in (\mathfrak{t}^k)^*$, $\xi_3 = \omega(\xi) \in \mathfrak{t}^k$. Нехай $\tilde{p}$, $\tilde{q}$ — локальні координати на $\mathfrak{N}$, у яких $\tilde{\Lambda} = \tilde{p}\, \mathrm{d}\tilde{q}$. Покладемо $\xi = I \mathrm{d}(\boldsymbol{m}, a)$. З рівності $\xi \lrcorner \omega^2 = -\mathrm{d}(\boldsymbol{m}, a)$ з урахуванням (10) випливає, що $\xi_3 = a$, $\mathfrak{pr}_* \xi_1 = 0$ і $(\xi_2, \omega) = \mathfrak{C}(\omega, a)$. Застосувавши до обох частин останньої рівності операцію $I \mathrm{d}(\boldsymbol{m}, b) \lrcorner$, одержимо $\mathrm{d}(\boldsymbol{m}, b)(I \mathrm{d}(\boldsymbol{m}, a)) = \mathfrak{C}(b, a)$.

Твердження 8. *Гамільтонове відносно* ω^2 *векторне поле з функцією Гамільтона, піднятою з* $T^* \mathfrak{N}$ *на* M *у відповідності з діаграмою* (9), *горизонтальне щодо зв'язності на* M *з формою зв'язності* $\mathrm{pr}^* \omega$.

Доведення. Нехай $f \colon T^* \mathfrak{N} \to \mathbb{R}$ і $\eta = I \mathrm{d}f$. Тоді з рівності

$$\eta \lrcorner \omega^2 = -\mathrm{d}f \equiv -\frac{\partial f}{\partial \tilde{p}} \mathrm{d}\tilde{p} - \frac{\partial f}{\partial \tilde{q}} \mathrm{d}\tilde{q} \tag{11}$$

з урахуванням (10) одержуємо $(\mathrm{d}\boldsymbol{m}, \eta_3) = 0$, звідки $\eta_3 \overset{\mathrm{def}}{=} \omega(I \mathrm{d}f) = 0$.

З формули (11) можна також одержати рівність $\{f, (\boldsymbol{m}, a)\} = (\tilde{\boldsymbol{\beta}}(\partial_{\tilde{p}} f), a)$, яка дозволяє встановити співвідношення 2 теореми 1. Співвідношення 1 просто одержується з формули (10) і твердження 8.

Окремо виділимо важливий випадок, коли форма $Y_a \lrcorner \Gamma$ точна при кожному $a \in \operatorname{Ker} \mathfrak{C}$ або, що те саме, $\beta = \mathrm{d}\mu$, де β визначена формулою (4), $\mu \colon \mathfrak{M} \to (\mathfrak{t}^k)^*$. З (5) випливає, що $\mu = \tilde{\boldsymbol{\mu}} \circ \mathfrak{p}$, де $\tilde{\boldsymbol{\mu}} \colon \mathfrak{N} \to (\mathfrak{t}^k)^*$.

Відображення $\boldsymbol{J} \colon M \to (\operatorname{Ker} \mathfrak{C})^*$ визначимо формулою

$$(\boldsymbol{J}, a) = (\boldsymbol{m} + \mu \circ \mathrm{pr}, a), \quad a \in \operatorname{Ker} \mathfrak{C}. \tag{12}$$

З 10 випливає, що $X_a \lrcorner \omega^2 = -\mathrm{d}(\boldsymbol{J}, a)$, $a \in \operatorname{Ker} \mathfrak{C}$, звідки $I \mathrm{d}(\boldsymbol{J}, a) = X_a$. У зв'язку з цим природно дати таке означення.

Означення. *Назвемо* $\boldsymbol{J}$ *відображенням моментів дії* $\operatorname{Ker} \mathfrak{C}$.

Відображення, одержане внаслідок опускання $\boldsymbol{J}$ на N, позначимо через $\tilde{\boldsymbol{J}}$. Кожна функція $(\tilde{\boldsymbol{J}}, a)$ є функцією Казіміра дужки $\{\cdot, \cdot\}_N$, а кожна поверхня рівня відображення $\tilde{\boldsymbol{J}}$ — симплектичним листком цієї дужки [1].

У випадку, коли існує J, зручно замість проекції $\hat{\pi}$ користуватись проекцією $\hat{\pi}' = \pi_0 \circ P_0 \times m' \colon M \to N$, де $m' = m + \mathcal{P}_K^* \mu \circ \mathrm{pr}$, $\mathcal{P}_K^*$ — оператор, спряжений до $\mathcal{P}_K$. Відображення $\hat{\pi}'$ як відображення Пуассона породжує на N дужку Пуассона, яку ми позначимо через $\{\cdot,\cdot\}_N'$.

Теорема 2. *Дужку* $\{\cdot,\cdot\}_N'$ *характеризують співвідношення вигляду* 1 – 3 *теореми* 1, *у яких слід таким чином змінити позначення*:

$$\{\cdot,\cdot\}_N \to \{\cdot,\cdot\}_N', \quad \tilde{\alpha} \to \tilde{\alpha}' \overset{\mathrm{def}}{=} \tilde{\alpha} - (\tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\boldsymbol{\Omega}}), \quad \tilde{\boldsymbol{\beta}} \to \tilde{\boldsymbol{\beta}}' = 0.$$

Набір $\{(\tilde{J}(y), \varepsilon_i)\}_{i=1}^{K_0}$, де $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{K_0}$ — *довільний базис у* $\operatorname{Ker}\mathfrak{C}$, *утворює повну функціонально незалежну систему функцій Казіміра дужки* $\{\cdot,\cdot\}_N$.

Доведення. Враховуючи, що $\tilde{\boldsymbol{\Omega}}$ набуває значень у $\operatorname{Ker}\mathfrak{C}$, з формули 10 маємо

$$\omega^2 = d\tilde{\Lambda} + dm' \wedge \omega + (m', \tilde{\boldsymbol{\Omega}}) + \tilde{\alpha}' + \mathfrak{C}(\omega, \omega).$$

Після цього повторюємо схему доведення теореми 1.

Добре відомо, що, задавши розклад $\mathfrak{t}^k = \operatorname{Ker}\mathfrak{C} \oplus L$, базис $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{K_0}$ у $\mathfrak{t}^k$ можна вибрати так, щоб перші k_0 векторів утворювали базис $\operatorname{Ker}\mathfrak{C}$, останні $2l = k - k_0$ — базис L, а матриця форми $\mathfrak{C}$ в цьому базисі набувала вигляду

$$\operatorname{diag}\left(\mathrm{O}_{k_0}; \left(\begin{array}{c|c} 0 & -E_l \\ \hline E_l & 0 \end{array} \right) \right),$$

де O_{k_0} — нульова матриця розміру $k_0 \times k_0$, E_l — одинична матриця розміру $l \times l$.

Теорема 3. *При кожному* $c \in (\operatorname{Ker}\mathfrak{C})^*$ *фактор-многовид* $N_c = J^{-1}(c)/T^k$ *можна ототожнити з многовидом* $T^*\mathfrak{N} \times \mathbb{R}^{2l}_{(\bar{p},\, \bar{q})}$, *де* $\mathbb{R}^{2l}_{(\bar{p},\, \bar{q})}$ — *лінійний симплектичний простір з канонічними координатами* $\bar{p} = (\bar{p}_1, \ldots, \bar{p}_l)$, $\bar{q} = (\bar{q}_1, \ldots, \bar{q}_l)$. *Многовид* N_c *є симплектичним листком дужки* $\{\cdot,\cdot\}_N'$, *яка породжує на ньому симплектичну структуру*

$$\tilde{\omega}_c^2 = d\tilde{\Lambda} + \mathfrak{pr}^*[\tilde{\alpha} + (c - \tilde{\boldsymbol{\mu}}, \tilde{\boldsymbol{\Omega}})] + d\bar{p} \wedge d\bar{q}.$$

Доведення випливає безпосередньо з теореми 2, якщо покласти

$$\bar{p}_i = (m, \varepsilon_{k_0+i}), \quad \bar{q}_i = (m, \varepsilon_{k_0+l+i}), \quad m \in (\mathfrak{t}^k)^*, \quad i = 1, \ldots, l.$$

3. Редукція одного класу систем механічного типу. Нехай $\mathfrak{M}$ — ріманів многовид з T^k-інваріантною метрикою $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$. Вона породжує на $\mathfrak{M}$ T^k-інваріантну зв'язність: горизонтальний підпростір дотичного простору утворює ортогональне доповнення дотичного простору до орбіти тора T^k. Позначимо через ω форму цієї зв'язності, а через $A \colon T\mathfrak{M} \to T^*\mathfrak{M}$ взаємнооднозначне відображення, для якого $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle|_q = (A(q)\cdot,\cdot)/2$, де $A(q) = A|_q$, $q \in \mathfrak{M}$. Метрика $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ визначає також сім'ю додатно означених симетричних лінійних операторів

$$\{B(\tilde{q}) \colon \mathfrak{t}^k \to (\mathfrak{t}^k)^*\}_{\tilde{q} \in \mathfrak{N}} \tag{13}$$

таких, що

$$\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle|_q = \mathfrak{p}^* \widetilde{\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle}|_{\tilde q} + \frac{1}{2}(B(\tilde q)\omega,\omega)|_q, \quad \tilde q = \mathfrak{p}(q), \tag{14}$$

де $\widetilde{\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle}$ — фактор-метрика на $\mathfrak{N}$.

Означення. *T^k-інваріантну метрику $\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle$ і T^k-інваріантну замкнену 2-форму Γ на $\mathfrak{M}$ назвемо узгодженими, якщо існує підпростір $L \subset \mathfrak{t}^k$, для якого виконуються умови:* 1) $\mathfrak{t}^k = L \oplus \operatorname{Ker}\mathfrak{C}$, *де $\mathfrak{C}$ — білінійна форма, породжена на $\mathfrak{t}^k$ формою Γ;* 2) $\Gamma(Y, Y_a) = 0$ *для кожного горизонтального векторного поля Y і кожного $a \in L$.*

Для узгодженої 2-форми Γ справедлива формула (2), а тому Γ можна подати у вигляді (3). Надалі припускатимемо, що форма β визначена формулою (4), точна: $\beta = d\mu$. Тоді

$$\Gamma = \alpha' + d(\mu, \mathcal{P}_K\omega) + \mathfrak{C}(\omega,\omega), \tag{15}$$

де $\alpha' = \mathfrak{p}^*\tilde\alpha'$, $\tilde\alpha'$ визначена у теоремі 2.

Загальна конструкція T^k-розшарувань і узгоджених метрик та 2-форм на них одержується на основі міркувань, наведених у кінці п.1. В алгебрі Лі $\mathbb{R}^k$ тора $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$ виділимо підпростір K розмірності k_0, де $k - k_0 = 2l$, $l \in \mathbb{N}$. Нехай $j_1, \ldots, j_{n_2}$ — деякі цілочислові вектори з K (випадок $j_i = 0$ не виключається). Існує головне T^k розшарування $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{p})$, для якого $\mathfrak{p}^*(j_1\sigma_1^2 + \ldots + j_{n_2}\sigma_{n_2}^2) = \Omega$ є формою кривини деякої T^k-інваріантної форми зв'язності ω [9]. Кожна сім'я додатно означених лінійних операторів (13) визначає за формулою (14) метрику, узгоджену з 2-формою Γ, визначеною формулою (15), де $\mathfrak{C}$ — білінійна форма на $\mathfrak{t}^k$, для якої $\operatorname{Ker}\mathfrak{C} = K$.

Проведемо редукцію системи на (M, ω^2) з гамільтоніаном

$$T = (A^{-1}(q)p, p)/2, \tag{16}$$

одержаним внаслідок перетворення Лежандра $p = A(q)\dot q$ з кінетичної енергії $\langle\langle\dot q, \dot q\rangle\rangle$.

Твердження 9. *Функція $\tilde T : T^*\mathfrak{N} \times (\mathfrak{t}^k)^* \to \mathbb{R}$, для якої $T = \tilde T \circ \hat\pi'$, має вигляд*

$$\tilde T = \frac{1}{2}\left(\tilde A^{-1}(\tilde q)\tilde p,\ \tilde p\right) + \frac{1}{2}\left(B^{-1}(\tilde q)(z - \mathcal{P}_K^*\tilde{\boldsymbol{\mu}}),\ z - \mathcal{P}_K^*\tilde{\boldsymbol{\mu}}\right),$$

$\tilde q = \mathfrak{p}(\tilde p)$, $z \in (\mathfrak{t}^k)^*$, *де* $\tilde A(\tilde q) = \tilde A|_q$, $\tilde A : T\mathfrak{N} \to T^*\mathfrak{N}$ — *відображення, індуковане фактор-метрикою* $\widetilde{\langle\langle\cdot,\cdot\rangle\rangle}$.

Доведення. Нехай $hT\mathfrak{M} = \{\varepsilon \in T\mathfrak{M} : \omega(\xi) = 0\}$ — горизонтальне підрозшарування в $T\mathfrak{M}$. Тоді A відображає $hT\mathfrak{M}$ взаємнооднозначно на M_0 і діаграма

$$\begin{array}{ccc} hT\mathfrak{M} & \xrightarrow{T\mathfrak{p}} & T\mathfrak{N} \\ A\downarrow & & \downarrow\tilde A \\ M_0 & \xrightarrow{\pi_0} & T^*\mathfrak{N} \end{array} \tag{17}$$

комутативна. Тут $T\mathfrak{p}$ — дотичне до $\mathfrak{p}$ відображення.

Тепер покажемо, що

$$A^{-1}(q)(\boldsymbol{m}, \omega) = Y_{B^{-1}(\tilde q)\boldsymbol{m}}, \quad \boldsymbol{m} \in (\mathfrak{t}^k)^*, \quad \tilde q = \mathfrak{p}(q). \tag{18}$$

Дійсно, вектор $A^{-1}(q)(\boldsymbol{m}, \omega)$ вертикальний, оскільки для кожного $\xi \in hT_q\mathfrak{M}$ маємо $\langle\langle A^{-1}(q)(\boldsymbol{m}, \omega), \xi\rangle\rangle = (\boldsymbol{m}, \omega(\xi))/2 = 0$. Крім того, $\langle\langle A^{-1}(\boldsymbol{m}, \omega), Y_a\rangle\rangle = (\boldsymbol{m}, a)/2 \ \forall a \in \mathfrak{t}^k$. Але з (14) випливає, що таку ж властивість має вектор $Y_{B^{-1}(\tilde{q})\boldsymbol{m}}$. Отже, виконується (18).

На основі цієї рівності одержуємо

$$T = \frac{1}{2}(A^{-1}(q)(P_0(p) + (\boldsymbol{m}(p), \omega), P_0(p) + (\boldsymbol{m}(p), \omega)) =$$

$$= \frac{1}{2}(A^{-1}(q)P_0(p), P_0(p)) + \frac{1}{2}(B^{-1}(\tilde{q})\,(\boldsymbol{m}'(p) - \mathcal{P}_K^*\mu), \boldsymbol{m}'(p) - \mathcal{P}_K^*\mu). \tag{19}$$

Оскільки в силу (17)

$$(A^{-1}(q)P_0(p), P_0(p)) = (\tilde{A}^{-1}(\tilde{q})\,\tilde{p}, \tilde{p}), \quad \tilde{p} = \pi_0 \circ P_0(p),$$

то проекція $\hat{\pi}'$, яка точку $p \in M$ відображає у пару $(\tilde{p} = \pi_0 \circ P_0(p), z = \boldsymbol{m}'(p))$ співставляє функції (19) функцію $\tilde{T}$.

Вкажемо тепер два випадки, у яких редукована система допускає подальшу редукцію на многовид $T^*\mathfrak{N}$.

Теорема 4. *Нехай метрика визначається формулою* (14), *у якій* $B(\tilde{q})B$ *не залежить від* $\tilde{q}$, *а* 2-*форма* (15) *задовольняє умову*

$$\langle\langle Y_a, Y_b\rangle\rangle \equiv (Ba, b) = 0, \quad a \in K = \operatorname{Ker}\mathbb{C}, \quad b \in L. \tag{20}$$

Покладемо в теоремі 3 $H = T$, *де* T *визначимо формулою* (16).

Тоді редукована система на $N_c = T^*\mathfrak{N} \times \mathbb{R}^{2l}_{(\overline{p}, \overline{q})}$ *є прямим добутком гамільтонової системи на симплектичному многовиді* $(T^*\mathfrak{N}, \mathrm{d}\tilde{\Lambda} + \tilde{\alpha}' + (c, \tilde{\boldsymbol{\Omega}}))$ *з гамільтоніаном механічного типу*

$$\frac{1}{2}(\tilde{A}^{-1}(\tilde{q})\,\tilde{p}, \tilde{p}) + \frac{1}{2}(\mathcal{P}_K B^{-1}\mathcal{P}_K^*(c - \tilde{\boldsymbol{\mu}}(\tilde{q})), c - \tilde{\boldsymbol{\mu}}(\tilde{q}))$$

та лінійної гамільтонової системи зі сталими коефіцієнтами на $(\mathbb{R}^{2U}_{(\tilde{p}, \tilde{q})}, d\tilde{p} \wedge d\tilde{q})$.

Доведення. Маємо розклад $(\mathfrak{t}^k)^* = L^\perp \oplus K^\perp$, де $L^\perp = \mathcal{P}_K^* K^*$, $K^\perp = \mathcal{P}_L^* L^*$ — простори, ортогональні відповідно до L та K. З умови (20) випливає

$$B^{-1}L^\perp = K. \tag{21}$$

Нехай $\{\varepsilon_i^*\}_{i=1}^k$ — базис, дуальний до базиса $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^k$, запроваджено в кінці п. 2. Зрозуміло, що $\{\varepsilon_i^*\}_{i=1}^{k_0}$ — базис у $L^\perp$, $\{\varepsilon_i^*\}_{i=k_0+1}^k$ — базис у $K^\perp$. Враховуючи розклади

$$\mathcal{P}_K^*\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{i=1}^{k_0}\tilde{\mu}_i\varepsilon_i^*, \quad z - \mathcal{P}_K^*\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \sum_{i=1}^{k_0}(\tilde{J}_i - \tilde{\mu}_i)\varepsilon_i^* + \sum_{i=1}^{l}(\overline{p}\,\varepsilon_{k_0+i}^* + \tilde{q}\,\varepsilon_{k_0+l+i}^*),$$

де $\tilde{J}_i = (z, \varepsilon_i)$, $\overline{p}_i = (z, \varepsilon_{k_0+i})$, $\overline{q}_i = (z, \varepsilon_{k_0+l+i})$, $z \in (\mathfrak{t}^k)^*$, а також (21), маємо

$$(B^{-1}(z-\mathcal{P}_K^*\tilde{\mu}),\, z-\mathcal{P}_K^*\tilde{\mu}) = \sum_{i,j=1}^{k_0} B^{ij}(\tilde{J}_i-\tilde{\mu}_i)(\tilde{J}_j-\tilde{\mu}_j) +$$

$$+ \sum_{i,j=1}^{l}\Big(B^{k_0+i,k_0+i}\,\overline{p}_i\overline{p}_j + B^{k_0+i,k_0+l+j}\,\overline{p}_i\overline{q}_j + B^{k_0+l+i,k_0+l+j}\,\overline{q}_i\overline{q}_j\Big),$$

де $B^{ij} = (B^{-1}\varepsilon_i^*,\, \varepsilon_j^*)$. Остаточно потрібний результат тепер випливає з твердження 9 та теореми 3.

Відщеплення системи на $T^*\mathfrak{N}$ можливе також у випадку метрики (14), для якої виконуються умови:

1) $(B(\tilde{q})\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$ при $1 \le i \le k_0$, $j > k_0$, а також при $i > k_0$, $j > k_0$, $i \ne j$;

2) $(B(\tilde{q})\varepsilon_{k_0+i}, \varepsilon_{k_0+i}) = \lambda_i^2(B(\tilde{q})\varepsilon_{k_0+l+i}, \varepsilon_{k_0+l+i})$, $i = 1, \ldots, l$, $\lambda_i = \text{const}$.

Справді, гамільтоніан редукованої системи на N_c в цьому випадку має вигляд

$$\frac{1}{2}\Big[(\tilde{A}^{-1}(\tilde{q})\tilde{p}, \tilde{p}) + (\mathcal{P}_K B^{-1}(\tilde{q})\mathcal{P}_K^*(c-\tilde{\mu}(\tilde{q}), c-\tilde{\mu}(\tilde{q})) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} B^i(\tilde{q})\big(\overline{p}_i^{\,2} + \lambda_i^2\overline{q}_i^{\,2}\big)\Big],$$

де $B^i(\tilde{q}) = (B^{-1}(\tilde{q})\varepsilon_{k_0+i}^*, \varepsilon_{k_0+i}^*)$. Відщеплення стає можливим завдяки тому, що система з таким гамільтоніаном має набір перших інтегралів $\overline{p}_i^{\,2} + \lambda_i^2\overline{q}^{\,2} = c_i$, $i = 1, \ldots, l$.

4. Умова нерезонансності симплектичної структури. Припустимо, що редукована гамільтонова система на N цілком інтегровна, причому для неї існують глобальні змінні дії, тобто такі інтеграли $\tilde{A}_j : N \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$; $m = (2n-k-k_0)/2$ з незалежними диференціалами, що $\{\tilde{A}_i, \tilde{A}_j\}'_N = 0$ і кожне гамільтонове (відносно $\{\cdot,\cdot\}'_N$) векторне поле з гамільтоніаном $\tilde{A}_j$ породжує періодичний потік з найменшим додатним періодом, рівним 1. Тоді спільна поверхня рівня функцій $A_j = \tilde{A}_j \circ \hat{\pi}^{\prime}$ та відображення моментів дії $\operatorname{Ker}\mathbb{C}$ є коізотропним інваріантним тором вихідної гамільтонової системи [1]. Опишемо умови нерезонансності симплектичної структури відносно одержаного розшарування коізотропними торами.

Нехай $(M, \{g_j^t\})$ — потік векторного поля $I\,\mathrm{d}A_j$. Як і в [1], позначимо через $\psi_j(x)$ елемент тора T^k, під дією якого точка g_j^1x переходить у x, а через $a_j(x) \in \mathfrak{t}^k$ — деякий прообраз цього елемента відносно експоненціального відображення. Тоді вектор $\gamma_j = \mathcal{P}_L a_j(x)$ не залежить від x. (Зауважимо, що γ_j коректно визначений незалежно від виконання умови h_5 в [1].)

Тепер ототожнимо $\mathfrak{t}^k$ з координатним простором $\mathbb{R}^k$ так, щоб у відповідності з розкладом $\mathfrak{t}^k = \mathfrak{t}^{k_1} \oplus \mathfrak{t}^{k_2}$, одержаним у кінці п. 1, орти $e_1, \ldots, e_{k_2}$ утворювали базис у $\mathfrak{t}^{k_2}$, $e_{k_2+1}, \ldots, e_k$ — базис у $\mathfrak{t}^{k_1}$ і $T^k = \mathbb{R}^k/\mathbb{Z}^k$. Завжди можна вважати, що $L \subset \mathfrak{t}^{k_2}$. Тоді

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^{k_2} \gamma_{ij} e_i, \quad j = 1, \dots, m.$$

Нехай

$$\left\{ \sigma_j = \sum_{i=1}^{k_2} \sigma_{ij} e_i \right\}_{j=1}^{k_0 - k_1}$$

— базис простору $\mathcal{P}_2 \operatorname{Ker} \mathfrak{C}$. Оскільки $e_j \in \operatorname{Ker} \mathfrak{C}$, $j = k_2 + 1, \dots, k$, то умови нерезонансності симплектичної структури набувають дещо спрощеного у порівнянні з п.2 [1] вигляду: не існує цілочислового вектора $(n_1, \dots, n_{k_2}) \neq 0$, для якого виконуються співвідношення

$$\sum_{i=1}^{k_2} n_i \gamma_{ij} \,|\, \mathrm{mod}\, 1 = 0, \;\; j = 1, \dots, m; \;\; \sum_{i=1}^{k_2} n_i \sigma_{ij} = 0, \;\; j = 1, \dots, k_0 - k_1. \quad (22)$$

Покажемо, як умову нерезонансності можна описати в термінах групи голономій плоскої зв'язності розшарування $(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}, \mathfrak{p}')$ з твердження 3. Перш за все зауважимо, що група голономій такої зв'язності є дискретною підгрупою D тора T^{k_2}, яка в силу своєї комутативності не залежить від опорної точки [10]. Вона є образом природного гомоморфізму $\mathfrak{h}\colon \pi_1(\mathfrak{N}; y_0) \to T^{k_2}$, де точку $y_0 \in \mathfrak{N}$ можна вибирати довільно. З іншого боку, D співпадає з групою монодромії накриття многовиду $\mathfrak{N}$ будь-яким шаром інволютивного горизонтального розподілу, визначеного плоскою зв'язністю розшарування $(\mathfrak{M}', \mathfrak{N}, \mathfrak{p}')$ [9]. Оскільки D комутативна, то гомоморфізм $\mathfrak{h}$ не розрізняє спряжених елементів у $\pi_1(\mathfrak{N}; y_0)$, а тому коректно визначає відображення

$$\mathfrak{f}\colon [S^1, \mathfrak{N}] \to D, \quad (23)$$

областю визначення якого є множина „вільних" гомотопічних класів відображень кола в $\mathfrak{N}$.

Твердження 10. *Кожна функція $\tilde{A}_j$ коректно визначає елемент $\rho(\tilde{A}_j) \subset \subset [S^1, \mathfrak{N}]$. Нехай γ_j^* — довільний вектор алгебри Лі $\mathfrak{t}^{k_2}$, образ якого при експоненціальному відображенні співпадає з $\mathfrak{f}(\rho(\tilde{A}_j))$. Тоді в умові нерезонансності* (22) *вектор γ_j можна замінити вектором γ_j^*.*

Доведення. З'ясуємо більш детально структуру елемента $\psi_j(x)$. В силу твердження 8 та теореми 2 справедливий розклад

$$I\,\mathrm{d}A_j = h(I\,\mathrm{d}A_j) + \sum_{i=1}^{k_0} \frac{\partial \tilde{A}_j}{\partial \tilde{J}_j} X_{\varepsilon_i} + \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{\partial \tilde{A}_j}{\partial \overline{p}_i} X_{\varepsilon_{k_0+i}} + \frac{\partial \tilde{A}_j}{\partial \overline{q}_i} X_{\varepsilon_{k_0+l+i}} \right), \quad (24)$$

де hX — горизонтальна складова векторного поля X відносно форми зв'язності ω_0 з твердження 3. Безпосередньою перевіркою можна переконатись у справедливості такого твердження.

Лема. Нехай $(M, \{g^t\})$ — потік векторного поля $X(x) = \alpha_1(x) X_1(x) + \alpha_2(x) X_2(x)$, де $\alpha_j\colon M \to \mathbb{R}$ — гладкі функції, а X_1, X_2 — векторні поля, для яких $[X_1, X_2] = 0$. Тоді справджується рівність

$$g^t x = g_1^{\int_0^t \alpha_1(g^\tau x)d\tau} \circ g_2^{\int_0^t \alpha_2(g^\tau x)d\tau} x.$$

Оскільки $\dot{\overline{p}}_i = \partial\tilde{A}_j/\partial\overline{q}_i$, $\dot{\overline{q}}_i = \partial\tilde{A}_j/\partial\overline{p}_i$, то середнє за період вздовж проекції потоку g_j^t на N функцій у правих частинах цих рівностей дорівнює нулеві. В силу наведеної вище леми з урахуванням (24) маємо:

$$g_j^1 x = \mathrm{h}\, g_j^1 \circ g_{\varepsilon_1}^{\tau_1(x)} \circ \ldots \circ g_{\varepsilon_{k_0}}^{\tau_{k_0}(x)} x,$$

де $h g_j^1$ — потік векторного поля $\mathrm{h}(I\mathrm{d}A_j)$, $g_{\varepsilon_i}^t$ — потік векторного поля X_{ε_i},

$$\tau_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial\tilde{A}_j}{\partial\tilde{J}_i}\,(\hat{\pi}' \circ g_j^s x)\,ds.$$

Нехай тепер $\overline{\psi}_j(x)$ — той елемент тора T^k, під дією якого точка $\mathrm{h}g^1 x$ переходить у x. У відповідності з розкладом $T^k = T^{k_1} \times T^{k_2}$ маємо $\overline{\psi}_j(x) = \overline{\psi}_j^1(x) \cdot \overline{\psi}_j^2(x)$, де $\overline{\psi}_j^i(x) \in T^{k_i}$. Поставимо у відповідність елементу $\overline{\psi}_j^2(x)$ вектор $b_j(x) \in \mathfrak{t}^{k_2}$ так само, як $a_j(x)$ було поставлено у відповідність $\psi_j(x)$. Оскільки $L \subset \mathfrak{t}^{k_2}$, $\mathfrak{t}^{k_1} \subset \mathrm{Ker}\,\mathfrak{C}$, то

$$\mathcal{P}_L b_j(x) = \mathcal{P}_L a_j(x) = \gamma_j. \tag{25}$$

З іншого боку, легко зрозуміти, що

$$\left(\overline{\psi}_j^2(x)\right)^{-1} = \mathfrak{h}([c_j(x)]) = \mathfrak{f}\left(\rho(\tilde{A}_j)\right) \in D,$$

де $[c_j(x)]$ — елемент з $\pi_1(\mathfrak{N}; \mathfrak{p} \circ \mathrm{pr}(x))$, що зображає цикл

$$c_j(x) = \bigcup_{t \in [0,1]} \mathfrak{p} \circ \mathrm{pr}\, g_j^t x,$$

а $\rho(\tilde{A}_j)$ — гомотопічний клас відображень

$$f_x(t)\colon [0,1] \to \mathfrak{N} : t \to \mathfrak{p} \circ \mathrm{pr}\, g_j^t x, \quad x \in M.$$

(Оскільки многовид M зв'язний, то відображення $f_{x_i}(t)$, $x_i \in M$, $i = 1, 2$, гомотопні.) Звідси випливає, що $b_j(x) = b_j$ не залежить від x і $b_j = -\gamma_j^* \,|\, \mathrm{mod}\, \mathbb{Z}^{k_2}$. І тому що в силу (25) вектор $b_j - \gamma_j$ є лінійною комбінацією σ_j, $j = 1, \ldots, k_0 - k_1$ в умові (22) γ_j можна замінити на γ_j^*.

1. *Парасюк І. О.* Редукція та коізотропні інваріантні тори гамільтонових систем з непуассоновими комутативними симетріями. І // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, №5. – С. 537–544.
2. *Новиков С. П.* Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса // Успехи мат. наук. – 1982. – **37**, № 5. – С. 3–49.
3. *Арнольд В. И., Гивенталь А. В.* Симплектическая геометрия // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики / ВИНИТИ. – 1985. – **4**. – С. 4–139.
4. *Харламов М. П.* Понижение порядка в механических системах с симметрией // Механика твердого тела. Респ. межвед. сб. – 1976. – Вып. 8. – С. 4–18.
5. *Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И.* Математические аспекты классической и небесной механики // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики / ВИНИТИ. – 1985. – **3**. – С. 5–304.
6. *Болотин С. В.* Замечания о методе Рауса и гипотезе Герца // Вестн. Моск. ун-та. Сер. I. Математика, механика. – 1986. – №5. – С. 51–53.
7. *Леонов И. А., Харламов М. П.* Понижение порядка в механических системах с гироскопическими силами // Механика твердого тела. Респ. межвед. сб. – 1985. – Вып.17. – С. 35–41.
8. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1989. – 472 с.
9. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. – М.: Наука, 1986. – 760 с.
10. *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии: В 2-х т. – М.: Наука, 1981. – Т. 1. – 344 с.

Получено 22.02.93