УДК 519. 4; 513. 71

А. О. Пришляк (Нац. ун-т им Т. Шевченко, Киев)

ИЗОМОРФИЗМЫ КОМБИНАТОРНЫХ КЛЕТОЧНЫХ РАЗБИЕНИЙ ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ*

For three-manifolds with the structure of combinatorial block complex, we construct an invariant which admits one to verify the existence of isomorphisms between these manifolds. For the complexes of small dimension, we solve the problem of possibility of extending the isomorphisms of subcomplexes to the isomorphisms of complexes.

Для тривимірних многовидів зі структурою комбінаторного кліткового комплексу побудовано інваріант, який дозволяє перевіряти існування ізоморфізмів між ними. Для комплексів малої вимірності розв'язано задачу про можливість продовження ізоморфізмів підкомплексів до ізоморфізмів комплексів.

Пусть L — клеточный комплекс. Клеткой-произведением называется клетка c^{n+1}, имеющая характеристическое отображение $\varphi: D^n \times D^1 \to L$, ограничение которого на $D^n \times \{i\}$ задает характеристические отображения ψ_j клеток c_j^n, $j = 0, 1$ (возможно совпадающих) комплекса L. Клеточное отображение f: $L \to K$ стягивает клетку c^{n+1}, если $f\varphi = f\psi_j$.

Клеточное отображение $f: L \to K$ называется комбинаторным, если каждая открытая клетка комплекса L отображается гомеоморфно на открытую клетку комплекса K или является клеткой-произведением, которая стягивается отображением f. Клеточный комплекс K называется комбинаторным, если приклеивающее отображение $\partial\varphi: S^{n-1} \to K$ каждой клетки c^n комбинаторно для некоторого клеточного разбиения сферы S^{n-1}. Под графом будем понимать конечный одномерный клеточный комплекс. Каждый одномерный комплекс комбинаторный. Клеточный 2-комплекс будет комбинаторным, если приклеивающее отображение каждой 2-клетки отображает 1-клетки, для некоторого клеточного разбиения границы 2-диска, гомеоморфно на 1-клетки или в вершины. Такие 2-комплексы впервые были рассмотрены Рейдемейстером [1]. Для того чтобы 3-комплекс был комбинаторным, необходимо существование *squashing* отображений 3-клеток [2].

Изоморфизмом клеточных комплексов называется такой гомеоморфизм их носителей, который отображает каждую открытую клетку одного комплекса на открытую клетку другого. Изоморфизмы различны, если существует клетка, образы которой при этих изоморфизмах различны.

Изоморфизмы одномерных комплексов это изоморфизмы графов и они хорошо изучены. В настоящей работе строятся инварианты, различающие не изоморфные 2-комплексы и 3-комплексы, носителем которых есть 3-многообразие. Эти инварианты позволяют ответить на вопрос о возможности продления изоморфизмов 1-комплексов до изоморфизмов 2-комплексов и изоморфизмов 2-остовов до гомеоморфизмов 3-многообразий.

1. Критерий изоморфности клеточных разбиений. Пусть M и M' — замкнутые ориентированные трехмерные многообразия, на которых заданы структуры комбинаторных клеточных комплексов K и K' соответственно. Построим по каждому из комплексов разложение 3-многообразия на ручки. При этом каждой k-клетке соответствует ручка индекса k, средний диск которой содержит эту клетку.

Обозначим через Φ границу объединения 0- и 1-ручек для комплекса K. Эта граница есть ориентированная поверхность рода $n - k + 1$, которая задает

*Выполнена при частичной финансовой поддержке международного фонда INTAS (проект № 94-0921).

разбиение Хегора многообразия M на два кренделя [3]. Здесь k и n — число 0- и 1-ручек соответственно.

Обозначим через u_i косредние сферы 1-ручек. Тогда u_i — набор непересекающихся окружностей на поверхности Φ. Пусть $c_1, \ldots, c_m$ — 2-клетки. Тогда $v_i = c_i \cap \Phi$ — другой набор окружностей на поверхности Φ, которые есть средними дисками 2-ручек. Аналогично для комплекса K' на поверхности Φ' существует два набора окружностей.

Если у комплекса по одной 0- и 3-клетке, то наборы окружностей будут системами меридианов поверхности, которые задают диаграмму Хегора многообразия M^3 [4].

Если 3-многообразие не ориентируемо, то, проведя аналогичные построения, получим неориентированную поверхность рода $2(n-k+1)$.

Предложение. *Комплекс K изоморфен K' тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм поверхностей $f\colon \Phi \to \Phi'$, который первый набор окружностей переводит в первый, а второй — во второй.*

Доказательство. Необходимость следует из построения. Докажем достаточность. Пусть такой гомеоморфизм поверхностей существует. Рассмотрим косредние диски 1-ручек. Тогда можем продолжить гомеоморфизмы с границ этих дисков до гомеоморфизмов самих дисков. Аналогично существует гомеоморфизм средних дисков 2-ручек. Тогда поверхность вместе с этими дисками разбивает многообразие на 3-мерные диски, каждый из которых содержит ручку индекса 0 или 3. Имея гомеоморфизмы на границах дисков, продолжим их на внутренности этих дисков. Таким образом, мы построили гомеоморфизм между многообразиями, который и задает изоморфизм комплексов.

2. Продление изоморфизмов графов до гомеоморфизмов поверхностей. Пусть G — ориентированный граф, вложенный в поверхность Φ, а G' — в Φ'. Если графы изоморфны, то различных изоморфизмов между ними конечное число. Тогда вопрос о существования гомеоморфизма поверхностей, сужение которого на графы — изоморфизм графов, равносилен вопросу о возможности продления изоморфизма графов до гомеоморфизма поверхностей.

Пусть $g: G \to G'$ — сохраняющий ориентацию изоморфизм графов, который переводит вершины A_i графа G в вершины A_i', а ребра B_j — в B_j'. Обозначим через $U(G)$ трубчатую окрестность графа G в поверхности Φ и пусть $p\colon \overline{U(G)} \to G$ — проекция ее замыкания на граф. Тогда дополнение $\Phi \setminus U(G)$ состоит из поверхностей F_i с краями и $\bigcup \partial F_i = \partial U(G)$. Каждую окружность, входящую в край поверхности F_i, разобьем на дуги так, чтобы каждая дуга отображалась проекцией p ровно на одно ребро графа G, а прообразом $p^{-1}(B_j)$ каждого ребра было две дуги из границ всех поверхностей. Зададим на дугах ориентации так, чтобы проекция p сохраняла ориентации и обозначим эти дуги так же, как и соответствующие им ребра.

На каждой поверхности F_i, если она ориентирована, зададим ориентацию (согласованную с ориентацией F, если поверхность F ориентирована, и произвольным образом — в противном случае). Для каждой окружности из границы поверхности выпишем слово, состоящее из букв $B_j^{\pm 1}$, обозначающих дуги (ребра графа), которые лежат на этой окружности. При этом буквы выписываются в той последовательности, в которой они встречаются при обходе окружности по ориентации, согласованной с ориентацией поверхности F_i, если поверхность ориентирована, и вдоль произвольной ориентации окружности — в противном случае. Буква имеет степень $+1$, если ориентация соответствующей ей дуги совпадает с этой ориентацией окружности, и -1 — в противном случае. Два слова называются эквивалентными, если в результате циклической перестановки букв их можно получить одно из другого. Это соответствует другому выбору начала обхода окружности. Слова называются обратными, если они получаются одно из другого в результате выписывания букв в обратном порядке и с обращением степеней и, возможно, циклической перестановки. Это соответствует обходу окружности против ориентации или выбору другой ориентации окружности.

Для каждой поверхности F_i составим список, который состоит из: 1) числа n_i, равного роду поверхности F_i, если поверхность ориентирована, и $-n_i$ — в противном случае; 2) слов, выписанных при обходе границы поверхности вдоль ориентации. Два таких списка назовем эквивалентными, если у них совпадают числа n_i и между словами можно установить биекцию так, что соответствующие слова эквивалентны или обратны.

Таким образом, для поверхности Φ и графа G построили набор списков так, что каждый список соответствует одной поверхности F_i. Два таких набора назовем эквивалентными, если существует биективное соответствие между списками такое, что соответствующие списки эквивалентны.

Сохраняющий ориентацию изоморфизм графов $g: G \to G'$, который переводит вершины A_i графа G на поверхности Φ в вершины A_i' графа G' на поверхности Φ', а ребра B_j в B_j' продлеваются до гомеоморфизма поверхностей тогда и только тогда, когда при замене B_j на B_j' в наборе списков для пары (Φ, G) получается набор, эквивалентный набору списков пары (Φ', G') [5]. При этом гомеоморфизм сохраняет ориентацию, если все соответствующие слова эквивалентны.

Определение. *Граф вместе с набором списков слов (НСС), у которых буквы соответствуют ребрам графа, назовем НСС-графом. Два НСС-графа назовем изоморфными, если существует изоморфизм графов такой, что при замене букв второго НСС буквами, соответствующими при изоморфизме, из первого НСС получится НСС, эквивалентный первому НСС.*

3. Построение инварианта клеточного разбиения. Использовав НСС, построим классификацию с точностью до изоморфизма клеточных разбиений двумерных многообразий. В этом случае вложенным графом является 1-остов клеточного разбиения. Каждая поверхность F_i — 2-клетка, т. е. ее род равен 0 и каждый список состоит из одного слова. Таким образом, инвариант клеточного разбиения 2-многообразия состоит из графа и набора слов, в котором каждая буква соответствует одному ребру и она (в степени 1 или -1) встречается в наборе 2 раза [5].

По аналогии, как это делается для поверхности, можно построить инвариант произвольного комбинаторного 2-мерного комплекса. В этом случае каждая буква может встречаться произвольное число раз.

Для трехмерных многообразий по клеточному разбиению, как в пункте 1, построим поверхность с двумя наборами окружностей на ней. В качестве вершин графа на этой поверхности возьмем точки пересечения окружностей, а также по одной произвольно выбранной точке на тех окружностях, которые не пересекаются с другими окружностями. В качестве ребер графа возьмем дуги окружностей, заключенные между этими точками. По этой поверхности и графу построим НСС-граф, который назовем НСС-графом данного клеточного разбиения. Тогда из предложения и [5] следует такое утверждение.

Теорема 2. *Клеточные разбиения трехмерных многообразий изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их НСС-графы.*

Если между двумя 2-остовами клеточных разбиений существует изоморфизм, то он индуцирует изоморфизм графов, лежащих на поверхности. Тогда изоморфизм 2-остовов продлевается до изоморфизма 3-многообразия тогда и только тогда, когда изоморфизм графов на поверхностях индуцирует изоморфизм НСС-графов.

1. *Reidemeister K.* Einführung in die kombinatorische Topologie. – Vieweg, 1932.
2. *Sieradski A. J.* Combinatorial squashings, 3-manifolds, and the third homology of groups // Invent. Math. – 1986. – **84**. – P. 121 – 139.
3. *Zieshang H.* On Heegaard diagrams of 3-manifolds // Asteisque. – 1988. – 163/164. – P. 247 – 280.
4. *Матвеев С. В., Фоменко А. Т.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 301 с.
5. *Пришляк А. О.* О вложенных в поверхность графах // Успехи мат. наук. – 1997. – **52**, вып. 4. – С. 211 – 212.

Получено 21.01.97