УДК 519.21

А. П. Юрачківський (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

ФУНКЦІОНАЛЬНА ГРАНИЧНА ТЕОРЕМА ТИПУ ЗАКОНУ ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ВИПАДКОВИХ РЕЛЬЄФІВ

For a random function dependent on time and on a point of a space with measure, we find an asymptotic expression for the measure of the region in which the values of the function do not exceed a given level.

Для випадкової функції, залежної від часу та точки простору з мірою, знайдено асимптотичний вираз міри області, в якій значення функції не перевищують заданого рівня.

Нехай $(X, \mathcal{X}, \mu)$ —простір із σ-скінченною мірою, $\mathcal{H}$ — під-σ-алгебра $\mathcal{X}$; β_n, $n \in \mathbb{N}$, — випадкові функції від $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in X$. Досліджується асимптотична при $n \to \infty$ поведінка функцій $\xi_n(t, y, x) = \mu\{\beta_n(t, x) \le y \,|\, \mathcal{H}\}$. Очевидне картографічне тлумачення ξ_n пояснює появу слова „рельєф" у назві статті.

Окремий випадок цієї задачі, в якому $\beta_n(t, x) = \sum_{i \le nt} \chi_{ni}(x)$, χ_{ni} набувають значень 0 або 1, розглядався в [1 – 5]. У цьому випадку можна обмежитися цілочисельними значеннями y, а адекватним видом збіжності буде слабка збіжність мір, породжених у просторі $\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbb{R}_+)$ випадковими процесами $\xi_n(\cdot, y, x)$, для всіх y і μ-майже всіх x. Якщо ж множина значень функції β_n неперервна, то вимога збіжності для всіх y неприродна (досить зауважити, що ξ_n є функцією розподілу за y). Тому нам доведеться змінити точку зору на ξ_n. Позначимо наділений метрикою Леві простір зростаючих (можливо нестрого) неперервних справа числових функцій на $\mathbb{R}$ з граничними значеннями 0 на $-\infty$ та 1 на ∞ через $\mathcal{G}$; тихоновський добуток m таких просторів — $\mathcal{G}^m$. Розглядатимемо ξ_n при фіксованих t, x як $\mathcal{G}$-значний випадковий елемент Ξ_n, тобто $\Xi_n(t, x) = \xi_n(t, \cdot, x)$. Якщо до того ж для якогось x β_n як функція від t з імовірністю 1 неперервна справа і має границі зліва, то для цього x траєкторії $\Xi_n(\cdot, x)$ з імовірністю 1 належать просторові $\mathcal{R} = \mathbf{D}(\mathbb{R}_+ \to \mathcal{G})$ відображень з $\mathbb{R}_+$ у $\mathcal{G}$, неперервних справа з границями зліва.

Під слабкою збіжністю випадкових функцій розуміємо слабку збіжність мір, породжених ними у відповідному функціональному просторі. Використовуємо такі позначення: $\xrightarrow{C}$ — слабка збіжність в $\mathcal{R}$ до неперервної $\mathcal{G}$-значної функції; $\xrightarrow{C}$ — слабка збіжність у $\mathbf{D}(\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^m)$ до неперервного процесу; $\xrightarrow{d}$ — слабка збіжність скінченновимірних розподілів випадкових функцій, зокрема збіжність за розподілом скінченновимірних випадкових векторів; $\xrightarrow{\mathcal{G}^m}$ — збіжність за розподілом $\mathcal{G}^m$-значних випадкових елементів; $\mathrm{Jp}_t g = \max_{s \le t} |\Delta g(s)|$ — величина максимального на $[0, t]$ стрибка функції g; $\Delta(g, t, a) = \sup_{(v-a)^+ \le u \le v \le t} |g(v) - g(u)|$; $\mathrm{Var}_{[a,b]} g$, $\mathrm{Var}_t g$ — повна варіація g на $[a, b]$, $[0, t]$ відповідно; якщо в останньому виразі t випущене, то це означає, що варіація розглядається як функція від t.

Оскільки міркування проводяться здебільшого для фіксованого x (виняток становить п. 7^0 доведення теореми), то аргумент x у позначеннях випускається, а співвідношення з вільною змінною x (наприклад, умови й висновок теореми) розуміються як виконані μ-майже скрізь.

Позначимо через M оператор умовного відносно $\mathcal{H}$ усереднення за мірою μ. Для подальшого зручно прийняти технічне припущення

$$M1 \equiv \mu(X|\mathcal{H}) = 1, \tag{1}$$

яке можна зняти ускладненням запису (див. [1]). При цьому $\mu(X)$ може бути й нескінченною. Перетворення Фур'є – Стільтьєса на $\mathcal{G}$ позначатимемо символом $\wedge$, наприклад

$$\hat{\xi}_n(t, z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izy}\xi_n(t, dy) \tag{2}$$

($\xi_n(t, \cdot)$ є $\mathcal{G}$-значним випадковим елементом завдяки (1)).

Введемо випадкові функції

$$\alpha_n(t, y) = I\{\beta_n(t) \le y\},$$

$$\eta_n(t, z) = e^{iz\beta_n(t)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izy}\alpha_n(t, dy). \tag{3}$$

Тоді функцію ξ_n можна подати у вигляді

$$\xi_n(t, y) = M\alpha_n(t, y). \tag{4}$$

Зіставляючи (2) – (4), одержуємо основну формулу

$$\hat{\xi}_n(t, z) = M\eta_n(t, z). \tag{5}$$

(Переставність інтегрувань за x та y становить зміст теореми про ітеровані ядра з теорії марковських процесів).

Дослідження асимптотики процесів Ξ_n повинно спиратися на якесь конструктивне задання β_n. Ми зупинимось на такому узагальненні згаданого на початку статті задання:

$$\beta_n = \beta_n(0) + \Phi_n + f_n * \nu_n. \tag{6}$$

Тут Φ_n — неперервний випадковий процес локально обмеженої варіації (тобто $\Phi \in \mathcal{V}^c$), $(f_n * \nu_n)(t) = \int_0^t \int_{\Theta_n} f_n(u, \theta)\nu_n(du, d\theta)$, ν_n — цілочисельна випадкова міра на якомусь вимірному просторі $(\Theta_n, \mathcal{E}_n)$, f_n — випадкова функція на $\mathbb{R}_+ \times \Theta_n$; $\beta_n(0)$, Φ_n, ν_n, f_n задані на спільному стохастичному базисі $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{F}_n, P_n)$, залежать від x і опційні. (З урахуванням залежності від n, x в означеннях II.1.4, II.1.6 [6] опційної функції та опційної випадкової міри слід замінити $\mathcal{O} \otimes \mathcal{E}$ на $\mathcal{O}_n \otimes \mathcal{E}_n \otimes \mathcal{X}$.)

У теоремі використовуються такі позначення: π_n — компенсатор міри ν_n, $\overline{\nu}_n = \nu_n - \pi_n$, $\Pi_n = (e^{izf_n} - 1) * \pi_n$ (у записі з аргументами — $\Pi_n(t, z)$), $Y_n = 2|\sin(zf_n/2)| * \nu_n$, $F_n = M\Phi_n$, $Q_n = M\Pi_n$, $U_n = M|\varphi_n| * \pi_n$, $Z_n = M|\varphi_n|^2 * \pi_n$ (функції φ_n вводяться в теоремі). Запис $\int_a^b$ означає $\int_{]a, b]}$; $MA \circ B$ означає $M(A \circ B)$ (так само для $*$), де $A \circ B(t) = \int_0^t A(u)dB(u)$.

Теорема. *Нехай виконані умови* (1), (6),

$$\forall\, t, z \ \sup_{s \le t} M\left|\int_{\Theta_n} (e^{izf_n(s,\theta)} - 1)\nu_n(\{s\}, d\theta)\right| \xrightarrow{P} 0, \tag{7}$$

$$\forall\, l \in \mathbb{N} \quad \forall\, z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{R} \ \ (\hat{\xi}_n(0, z_j), \Phi_n(\cdot), F_n(\cdot), \Pi_n(\cdot, z_j),$$

$$Q_n(\cdot, z_j), j = \overline{1, l}) \xrightarrow{C} (J(z_j), F(\cdot), F(\cdot), Q(\cdot, z_j), Q(\cdot, z_j), j = \overline{1, l}), \tag{8}$$

$$\forall\, t \quad \underset{z \to 0}{\text{l.i.p.}}\, Q(t, z) = 0, \tag{9}$$

$$\underset{z \to 0}{\text{l.i.p.}}\, J(z) = 1 \tag{10}$$

і для кожного $z \in \mathbb{R}$ *існує послідовність передбачуваних (тобто* $\mathcal{P}_n \otimes \mathcal{E}_n \otimes \otimes \mathcal{X}$*-вимірних) функцій* $\varphi_n = \varphi_n(\omega, t, \theta, x, z)$ *(*z *— параметр) таких, що*

А) *наступні послідовності відносно компактні в* $\mathbf{C}$: 1) $(M \operatorname{Var} \Phi_n)$, 2) (U_n), 3) (Z_n);

Б) *для будь-якого* t *наступні послідовності стохастично обмежені*: 1) $(\operatorname{Var}_t \Phi_n)$, 2) $(Y_n(t, z))$, 3) $(MY_n(t, z))$;

$$\forall\, t \quad \sup_n EZ_n(t, z) < \infty, \tag{11}$$

$$\forall\, t \quad M\left| e^{izf_n} - 1 - \varphi_n \right| * \nu_n(t) \xrightarrow{P} 0, \tag{12}$$

$$\forall\, t \quad M\left| e^{izf_n} - 1 - \varphi_n \right| * \pi_n(t) \xrightarrow{P} 0, \tag{13}$$

$$\forall\, t, \varepsilon > 0 \quad \lim_{c \to 0} \varlimsup_{n \to \infty} P\Big\{ \sup_{(u-c)^+ < u' \le u < u'' < (u+c) \wedge t} (M|\beta_n(u) - \beta_n(u')| \wedge M|\beta_n(u'') - \beta_n(u)| > \varepsilon \Big\} = 0. \tag{14}$$

Тоді $\Xi_n \xrightarrow{C} \Xi$, *де* $\Xi(t) = \xi(t, \cdot)$,

$$\hat{\xi}(t, z) = J(z) \exp\{izF(t) + Q(t, z)\}.$$

Доведення теореми спирається на узагальнення теореми неперервності Леві, яке полягає в тому, що функції розподілу (ф. р.) і відповідно їхні характеристичні функції випадкові (тобто ф. р. залежать вимірним чином від пари аргументів ω, y і майже для всіх ω як функції від y належать $\mathcal{G}$). Скінченні набори таких функцій називатимемо векторними ф. р. (в. ф. р.).

Лема 1 (узагальнення теореми Хеллі). *Нехай послідовність в. ф. р.* $\boldsymbol{H}_n = (H_{1n}, \ldots, H_{mn})$, $n \in \mathbb{N}$, *задовольняє умови:*

$$\lim_{N \to \infty} \varliminf_{n \to \infty} E[H_{kn}(N) - H_{kn}(-N)] = 1, \quad k = \overline{1, m}; \tag{15}$$

існують усюди щільна множина $S \subset \mathbb{R}$ *і випадкові неперервні справа функції* $H_1, \ldots, H_m$ *такі, що*

$$\forall\, r \in \mathbb{N}, \quad \forall\, y_1, \ldots, y_r \in S \quad (\boldsymbol{H}_n(y_1), \ldots, \boldsymbol{H}_n(y_r)) \xrightarrow{d} \xrightarrow{d} (\boldsymbol{H}(y_1), \ldots, \boldsymbol{H}(y_r)). \tag{16}$$

Тоді: i) $\boldsymbol{H}$ *— в. ф. р.*; ii) $\boldsymbol{H}_n \xrightarrow{\mathcal{G}^m} \boldsymbol{H}$; iii) $\hat{\boldsymbol{H}}_n \xrightarrow{C} \hat{\boldsymbol{H}}$.

Доведення. i). Очевидно, кожна з H_k є зростаючою функцією зі значеннями в $[0, 1]$. З (15) випливає $\lim_{N \to \infty} E[1 - (H_k(N) - H_k(-N))] = 0$. Оскільки $P\{1 - (H_k(N) - H_k(-N)) \ge 0\} = 1$, це означає, що $H_k(N) - H_k(-N) \xrightarrow{P} 0$, $N \to \infty$. Але монотонна збіжність за ймовірністю є збіжністю майже напевне.

ii). Нехай S_0 — зліченна всюди щільна підмножина S. Згідно з теоремою Скорохода [7], існують задані на спільному ймовірнісному просторі $(\Omega^*, \mathcal{F}^*,$

P^*) випадкові функції $H_n^* \overset{d}{=} H_n$, $H^* \overset{d}{=} H$ такі, що $P^*\{\forall\, y \in S_0 \quad H_n^*(y) \to \to H^*(y)\} = 1$, відтак $P^*\{H_n^* \xrightarrow{\mathcal{G}^m} H^*\} = 1$. Згідно з і) H^* — в. ф. р. Тоді для будь-якого неперервного обмеженого функціонала Λ на $\mathcal{G}^m$ $E\Lambda(H_n) = E^*\Lambda(H_n^*) \to E^*\Lambda(H^*) = E\Lambda(H)$.

iii). Оскільки $\wedge$ є за теоремою Хеллі неперервним відображенням із $\mathcal{G}$ в $\mathbf{C}(\mathbb{R})$, то для будь-якого обмеженого неперервного функціонала λ на $\mathbf{C}(\mathbb{R})^m \equiv \mathbf{C}(\mathbb{R}) \otimes \ldots \otimes \mathbf{C}(\mathbb{R})$ функціонал $\Lambda(H) = \lambda(\hat{H})$ обмежений і неперервний на $\mathcal{G}^m$. Згідно з ii) $E\lambda(\hat{H}_n) \to E\lambda(\hat{H})$.

Лема 2 (узагальнення теореми Леві). *Нехай послідовність* (H_n) *в. ф. р. задовольняє умови*

$$\hat{H}_n \xrightarrow{d} U, \tag{17}$$

$$\lim_{z\to 0} EU_k(z) = 1, \quad k = \overline{1, m}. \tag{18}$$

Тоді: і) $\hat{H}_n \xrightarrow{C} U$; ii) *існує в. ф. р.* H *така, що* $\hat{H} \overset{d}{=} U$ *і* $H_n \xrightarrow{\mathcal{G}^m} H$.

Доведення. і). Очевидно,

$$\left|\hat{H}_{kn}(z)\right| \le 1. \tag{19}$$

Тоді з огляду на (17)

$$\forall\, z, k \quad E\hat{H}_{kn}(z) \to EU_k(z). \tag{20}$$

Як і при доведенні теореми Леві для детермінованих ф. р., переконуємося, що $H_{kn}(N) - H_{kn}(-N) \ge 1 - \dfrac{N}{2}\int_{-2/N}^{2/N}(1 - \hat{H}_{kn}(z))\,dz$. За теоремою Фубіні, застосовною завдяки (19), $E[H_{kn}(N) - H_{kn}(-N)] \ge 1 - \dfrac{N}{2}\int_{-2/N}^{2/N}(1 - E\hat{H}_{kn}(z))\,dz$, звідки на підставі (20) і теореми про мажоровану збіжність

$$\varliminf_{n\to\infty} E[H_{kn}(N) - H_{kn}(-N)] \ge 1 - \frac{N}{2}\int_{-2/N}^{2/N}(1 - EU_k(z))\,dz.$$

Переходячи до границі при $N \to \infty$ і враховуючи (18), отримуємо (15).

Очевидно, $\forall\, c, N > 0$, $\Delta(\hat{H}_{kn}, \infty, c) \le Nc + 2(1 - (H_{kn}(N) - H_{kn}(-N)))$. Звідси і з (15) маємо $\lim_{c\to 0}\varlimsup_{n\to\infty} \Delta(\hat{H}_n, \infty, c) = 0$. Посилання на (17) завершує доведення і).

ii). Зафіксуємо зліченну всюди щільну множину $S \subset \mathbb{R}$. Оскільки для будь-якого y випадкова послідовність $(H_n(y))$, будучи обмеженою, відносно компактна, то, застосовуючи діагональний метод, переконуємося, що будь-яка нескінченна множина $V \subset \mathbb{N}$ містить нескінченну підмножину W таку, що при $n \to \infty$, $n \in W$ справджується (16), де функція H визначена поки що на S. Довизначимо H_k, $k = \overline{1, m}$, на $\mathbb{R}\setminus S$ за неперервністю справа і позначимо через S_1 множину (очевидно, не більш ніж зліченну) тих точок, у яких імовірність розриву хоча б однієї з H_k додатна. У точках $y \in S_1 \cap S$ замінимо $H(y)$ на $H(y+)$, після чого H стає неперервною справа на $\mathbb{R}$. Згідно з лемою 1 H — в. ф. р. і $H_n \xrightarrow{\mathcal{G}^m} H$, $\hat{H}_n \xrightarrow{C} \hat{H}$, $n \to \infty$, $n \in W$. Порівнюючи друге співвідношення з (17), бачимо, що $\hat{H} \overset{d}{=} U$. Зважаючи на довільність множини V, з якої вибиралася W, приходимо до ii).

Нам також знадобиться наступний технічний результат щодо стохастичних інтегралів.

Лема 3. *Нехай* $(\Theta, \mathscr{E})$ — *вимірний простір,* $N = N(\omega, dt, d\theta)$ — *задана на стохастичному базисі цілочисельна випадкова міра на* $\mathcal{B}_+ \otimes \mathscr{E}$, K — *її компенсатор,* $\overline{N} = N - K$, $g = g(\omega, t, \theta)$ — *комплексна передбачувана функція. Тоді для будь-яких моментів зупинки* $\sigma \le \tau$

$$E\left[\left|\int_\sigma^\tau \int_\Theta g(u, \theta)\overline{N}(du, d\theta)\right|^2 \Big| \mathcal{F}(\sigma)\right] \le$$

$$\le E\left[\int_\sigma^\tau \int_\Theta |g(u, \theta)|^2 K(du, d\theta) \Big| \mathcal{F}(\sigma)\right]. \tag{21}$$

Доведення. Досить розглянути дійсну g і показати, що для кожного t

$$E(g * \overline{N}(t))^2 \le Eg^2 * K(t). \tag{22}$$

Якщо у (22) замінити g на $g I_{]]\sigma,\tau]]} v$, де v — $\mathcal{F}(\sigma)$-вимірна випадкова величина, то дістанемо нерівність, еквівалентну (21).

Встановимо (22) спочатку для функцій виду

$$g(t, \theta) = \sum_{i=1}^r I_{A_i}(\theta) \sum_{j=1}^m a_{ij} I_{\Delta_j}(t), \tag{23}$$

де $\Delta_j =]t_{j-1}, t_j]$, $0 = t_0 < \ldots < t_m = t$; $A_j \in \mathscr{E}$, $A_i \cap A_l = \varnothing$, $i \ne l$; $a_{ij} = a_{ij}(\omega)$ — $\mathcal{F}_{j-1}$-вимірні випадкові величини; $\mathcal{F}_j = \mathcal{F}(t_j)$. (Доданки $a_{i0} I_{\{0\}}$ не включено у внутрішню суму, тому що за означенням II.1.3 [6] випадкової міри $N(\{0\}, \Theta) = 0$). Позначимо $K_i(t) = K(t, A_i)$, $K_{ij}(t) = (K_i(t) - K_i(t_{j-1}))\operatorname{sgn}|a_{ij}|$, $t \ge t_{j-1}$, $\nabla K_{ij} = K_{ij}(t_j)$ (аналогічно для N, $\overline{N}$). Тоді права частина (22) дорівнює $E\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^m a_{ij}^2 E[\nabla K_{ij} | \mathcal{F}_{j-1}]$, так що нерівність нетривіальна лише за умови

$$\forall\, i, j \quad P\{E[\nabla K_{ij} | \mathcal{F}_{j-1}] < \infty\} = 1. \tag{24}$$

Якщо це виконано, то при $j < k$ $E a_{ij} \nabla \overline{N}_{ij} a_{lk} \nabla \overline{N}_{lk} = E(a_{ij} \nabla \overline{N}_{ij} a_{lk} \times E[\nabla \overline{N}_{lk} | \mathcal{F}_{k-1}]) = 0$, тож для g виду (23)

$$E(g * N(t))^2 = E \sum_{i,l=1}^r \sum_{j=1}^m a_{ij} a_{lj} E[\nabla \overline{N}_{ij} \nabla \overline{N}_{lj} | \mathcal{F}_{j-1}]. \tag{25}$$

За умови (24) N_{ij} — лічильний процес на Δ_j з компенсатором K_{ij}, а $\overline{N}_{ij}$ — мартингал зі скінченним умовним відносно $\mathcal{F}_{j-1}$ другим моментом. Згідно з [8, с. 140] $\langle N_{ij} \rangle = (1 - \Delta K_{ij}) \circ K_{ij}$ (інтегрування від t_{j-1}), звідки

$$E[(\nabla \overline{N}_{ij})^2 | \mathcal{F}_{j-1}] \equiv E[\nabla \langle N_{ij} \rangle | \mathcal{F}_{j-1}] \le E[\nabla K_{ij} | \mathcal{F}_{j-1}]. \tag{26}$$

При $i \ne l$ $N_{ij} + N_{lj}$ — лічильний процес із компенсатором $K_{ij} + K_{lj}$, отже, $\overline{N}_{ij} + \overline{N}_{lj}$ — мартингал із характеристикою $(1 - \Delta K_{ij} - \Delta K_{lj}) \circ (K_{ij} + K_{lj})$. Але $(\Delta K_{lj}) \circ K_{ij} = (\Delta K_{ij}) \circ K_{lj} = 0$, бо $\{t : \Delta K_{ij}(t) \ne 0\} \cap \{t : \Delta K_{lj}(t) \ne 0\} \subset \{t : \Delta N_{ij}(t) \ne 0\} \cap \{t : \Delta N_{lj}(t) \ne 0\} = \varnothing$. Таким чином, $\langle \overline{N}_{ij} + \overline{N}_{lj} \rangle = \langle \overline{N}_{ij} \rangle + \langle \overline{N}_{lj} \rangle$. Це означає, що $\overline{N}_{ij}\overline{N}_{lj}$ — мартингал, відтак у (25) доданки з $i \ne l$ зникають, що спільно з (26) доводить (22) для функцій виду (23).

Далі шляхом граничних переходів, спираючись на теорему Б. Леві, поширюємо (22) спочатку на функції виду $\sum_{i=1}^{r} I_{A_i} G_i$, де $G_i(\omega, t)$ — передбачувана функція, а потім на довільні $\mathcal{P} \otimes \mathcal{E}$-вимірні функції.

Перейдемо до доведення теореми, міркуючи за тією ж схемою, що й у [3] (основний момент — п. 11^0). У пп. 1^0, 2^0, $5^0 - 11^0$ міркування ведуться для фіксованого z, яке через це випускається в позначеннях процесів.

1^0. З (6), (3) за формулою Іто дістаємо

$$\eta_n = \eta_n(0) + iz\eta_n \circ \Phi_n + (\eta_n^-(e^{izf_n} - 1)) * \nu_n. \tag{27}$$

Тут $\eta_n^-(t) = \eta_n(t-)$. У першому інтегралі, з огляду на неперервність Φ_n, мінус можна не писати. Звідси на підставі (5)

$$\hat{\xi}_n = \hat{\xi}_n(0) + izM\eta_n \circ \Phi_n + M(\eta_n^-(e^{izf_n} - 1)) * \nu_n. \tag{28}$$

2^0. Покажемо, що послідовність $(\hat{\xi}_n)$ відносно компактна в $\mathbf{C}$.

Зважаючи на (3),

$$|\eta_n(t)| = 1. \tag{29}$$

Тоді за теоремою про мажоровану збіжність $M\eta_n(s-) \equiv M \lim\limits_{u \uparrow s} \eta_n(u) = \lim\limits_{u \uparrow s} M\eta_n(u) \equiv \hat{\xi}_n(s-)$. Отже, $\Delta\hat{\xi}_n(s) = M\Delta\eta_n(s) \overset{(27)}{=} M\eta_n(s-)\int_{\Theta_n} (e^{izf_n} - 1)\nu_n(\{s\}, d\theta)$. Це спільно з (29), (7) показує, що $\forall t\ \mathrm{Jp}_t \hat{\xi}_n \xrightarrow{P} 0$. Тому достатньо встановити відносну компактність $(\hat{\xi}_n)$ у просторі $\mathbf{D}$.

Позначивши $\psi_n = M(\eta_n^- \varphi_n) * \overline{\nu}_n$, перепишемо рівність (28) у вигляді

$$\hat{\xi}_n = \hat{\xi}_n(0) + izM\eta_n \circ \Phi_n + M(\eta_n^-(e^{izf_n} - 1 - \varphi_n)) * \nu_n +$$
$$+ M(\eta_n^- \varphi_n) * \pi_n + \psi_n. \tag{30}$$

Звідси з огляду на (29) $\left|\hat{\xi}_n(t) - \hat{\xi}_n(s)\right| \le |z|(M \operatorname{Var} \Phi_n)\big|_s^t + (M|e^{izf_n} - 1 - \varphi_n| * \nu_n)\big|_s^t + |U_n(t) - U_n(s)| + |\psi_n(t) - \psi_n(s)|$, що разом з А1), А2), (12), (30), (8) зводить задачу до встановлення відносної компактності в $\mathbf{D}$ послідовності (ψ_n).

Для будь-яких скінченних моментів зупинки $\sigma \le \tau$ маємо

$$E[|\psi_n(\tau) - \psi_n(\sigma)|^2 \mid \mathcal{F}_n(\sigma)] \equiv$$

$$\equiv E\left[\left|M\int_\sigma^\tau \int_{\Theta_n} \eta_n(u-)\varphi_n(u, \theta)\overline{\nu}_n(du, d\theta)\right|^2 \mid \mathcal{F}_n(\sigma)\right] \le$$

$$\le ME\left[\left|\int_\sigma^\tau \int_{\Theta_n} \eta_n(u-)\varphi_n(u, \theta)\overline{\nu}_n(du, d\theta)\right|^2 \mid \mathcal{F}_n(\sigma)\right],$$

звідки за лемою 3 з урахуванням (29) одержуємо

$$E[|\psi_n(\tau) - \psi_n(\sigma)|^2 \mid \mathcal{F}_n(\sigma)] \le E[Z_n(\tau) - Z_n(\sigma) \mid \mathcal{F}_n(\sigma)]. \tag{31}$$

Скінченність (за умовою (11)) правої частини (31) уможливлює застосування теореми Фубіні в передостанній нерівності. Крім того, оскільки $(\eta_n^- \varphi_n) \circ \overline{\nu}_n$ —

мартингал (скінченність $E\left|(\eta_n^- \circ \varphi_n) \circ \overline{\nu}_n(t)\right|$ випливає з (31)), то на підставі (11), (31) і теореми Фубіні ψ_n — квадратично інтегровний мартингал.

Позначимо через $\mathcal{T}_n^T$ сукупність моментів зупинки відносно $\mathbb{F}_n$, обмежених числом T. Зафіксуємо $T > 0$, $\sigma \in \mathcal{T}_n^T$ і введемо процеси $\psi_n^*(t) = \psi_n(t) - \psi_n(t \wedge \sigma)$, $Z_n^*(t) = Z_n(t) - Z_n(t \wedge \sigma)$. З (31) випливає, що для будь-якого скінченного моменту зупинки τ $E\left|\psi_n^*(\tau)\right|^2 \le EZ_n^*(\tau)$. Враховуючи, що процес Z_n передбачуваний за побудовою, а Z_n^* успадковує від нього цю властивість згідно з п. I.2.4 [6], виводимо звідси за нерівністю Ленгляра I.3.31 [6], що для будь-яких $a, \varepsilon > 0$ і моменту зупинки $\tau \ge \sigma$ $P\{\sup_{t\le\tau}\left|\psi_n^*(\tau)\right|^2 \ge \varepsilon\} \le a/\varepsilon + P\{Z_n^*(\tau) \ge a\} \equiv a/\varepsilon + P\{Z_n(\tau) - Z_n(\sigma) \ge a\}$. З огляду на A3) це означає, що $\forall\, \varepsilon, T > 0$ $\lim\limits_{c\to 0} \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\sigma,\tau\in\mathcal{T}_n^T, \sigma\le\tau\le\sigma+c} P\{|\psi_n(\tau) - \psi_n(\sigma)| > \sqrt{\varepsilon}\} = 0$, отже за теоремою Альдуса VI. 4.5 [6] послідовність (ψ_n) відносно компактна в $\mathbf{D}$.

У пп. 3^0, 4^0, 12^0 для всіх процесів, залежних від z, використовуються позначення на зразок $Q^{(j)}(t) = Q(t, z_j)$, $\underline{Q} = (Q^{(1)}, \ldots, Q^{(l)})$.

3^0. Оскільки послідовність $\mathbb{R}^m$-значних процесів відносно компактна в $\mathbf{C}$ тоді й тільки тоді, коли для кожного j цю властивість має послідовність j-х компонент, то з огляду на п. 2^0 та умову (8) кожна нескінченна множина $V \subset \mathbb{N}$ містить нескінченну підмножину W таку, що

$$(\hat{\underline{\xi}}_n, \Phi_n, F_n, \underline{\Pi}_n, \underline{Q}_n) \xrightarrow{C} (\underline{\kappa}, F, F, \underline{Q}, \underline{Q}), \quad n \to \infty, \quad n \in W. \tag{32}$$

4^0. Введемо процеси $q_n^{(j)} = iz_j F_n + Q^{(j)}$, $q^{(j)} = iz_j F + Q^{(j)}$, $\zeta_n^{(j)} = i\hat{\xi}_n^{(j)-} \circ q_n^{(j)}$, $\zeta^{(j)} = i\kappa^{(j)} \circ q^{(j)}$ і покажемо, що

$$(\hat{\underline{\xi}}_n, \underline{\zeta}_n) \xrightarrow{C} (\underline{\kappa}, \underline{\zeta}), \quad n \to \infty, \quad n \in W. \tag{33}$$

Щоб не писати індекс j, міркуємо для $l = 1$ (на випадок $l > 1$ міркування переносяться очевидним чином). Нехай δ — розбиття півосі точками $0 = u_0 < u_1 < \ldots$, причому $\lim u_k = \infty$. Позначимо $|\delta| = \sup(u_k - u_{k-1})$, $r = r(t) = \max\{k : u_k \le t\}$, $v_k = v_k(t) = u_k \wedge t$ і введемо процеси $\zeta_n^\delta(t) = \sum_{k=0}^r \hat{\xi}_n(v_k)(q_n(v_{k+1}) - q_n(v_k))$, $\zeta^\delta(t) = \sum_{k=0}^r \kappa(v_k)(q_n(v_{k+1}) - q_n(v_k))$. Зважаючи на (32),

$$\forall\, \delta \quad (\hat{\xi}_n, \zeta_n^\delta) \xrightarrow{C} (\kappa, \zeta^\delta), \quad n \to \infty, \quad n \in W. \tag{34}$$

Очевидно,

$$\operatorname{Var} q_n \le |z| M \operatorname{Var} \Phi_n + M|\varphi_n| * \pi_n. \tag{35}$$

За побудовою $|\zeta_n(t) - \zeta_n^\delta(t)| = \left|\sum_{k=0}^r \int_{v_k}^{v_{k+1}} (\hat{\xi}_n(u-) - \hat{\xi}_n(v_k))\, dq_n(u)\right| \le \sum_{k=0}^r \sup\limits_{v_k < u \le v_{k+1}} \left|\hat{\xi}_n(u-) - \hat{\xi}_n(v_k)\right| \operatorname{Var}_{]v_k, v_{k+1}]} q_n \le \Delta(\hat{\xi}_n, t, |\delta|) \operatorname{Var}_t q_n$, що разом із (35), A1), A2) і п. 2^0 дає

$$\forall\, T, \varepsilon > 0 \quad \lim_{|\delta|\to 0} \lim_{n\to\infty} P\Big\{\sup_{t\le T}\left|\zeta_n(t) - \zeta_n^\delta(t)\right| > \varepsilon\Big\} = 0. \tag{36}$$

З (8), (35), А1), А2) випливає, що $q \in \mathcal{V}$. Звідси аналогічно попередньому виводимо співвідношення $\forall\, T > 0 \ \sup\limits_{t \le T} \left|\zeta(t) - \zeta^{\delta}(t)\right| \xrightarrow{P} 0$, і зважаючи на (34), (36), одержуємо (33).

5^0. Покажемо, що для будь-якого t

$$\lim_{C\to\infty} \sup_n P\{\mathrm{Var}_t\, \underline{\eta}_n > C\} = 0, \tag{37}$$

$$\lim_{C\to\infty} \sup_n P\{\mathrm{Var}_t\, \hat{\underline{\xi}}_n > C\} = 0. \tag{38}$$

Досить встановити ці співвідношення для $l = 1$. Перше з них випливає з (27), (29), Б1), Б2). Встановимо друге.

З огляду на (28), (29)

$$\mathrm{Var}\, \hat{\xi}_n \le |z| M\, \mathrm{Var}\, \Phi_n + M|\, e^{izf_n} - 1 - \varphi_n| * \nu_n + M|\varphi_n| * \nu_n. \tag{39}$$

Очевидно,

$$P\{M|\varphi_n| * \nu_n(t) \ge C\} \le P\{U_n(t) \ge C/2\} + P\{|M|\varphi_n| * \overline{\nu}_n(t)| \ge C/2\}, \tag{40}$$

$$E(M|\varphi_n| * \overline{\nu}_n)^2 \le ME(|\varphi_n| * \overline{\nu}_n)^2. \tag{41}$$

Тепер (38) випливає з (39), А1), (12), (40), А2), (41), леми 3 і (11).

6^0. Позначимо $\rho_n = iz\Phi_n + \Pi_n$, $\gamma_n = \eta_n \circ \rho_n \equiv iz\eta_n \circ \Phi_n + (\eta_n^-(e^{izf_n} - 1)) * \pi_n$, $\upsilon_n = i\eta_n \circ q_n$ і покажемо, що для будь-якого t

$$\gamma_n(t) - \upsilon_n(t) \xrightarrow{P} 0. \tag{42}$$

Нехай δ, r, v_k ті самі, що в п. 4^0. Зважаючи на (8), (29),

$$\sum_{k=0}^{r} \eta_n(v_k)[\rho_n(v_{k+1}) - \rho_n(v_k) - (q_n(v_{k+1}) - q_n(v_k))] \xrightarrow{P} 0. \tag{43}$$

З формули інтегрування частинами в інтегралі Стільтьєса [9, с. 222] випливає нерівність для $A, B \in \mathcal{V}$

$$\left|\int_a^b A(u-)\,dB(u)\right| \le |A(a)B(a)| + |A(b)B(b)| + \sup_{a<u\le b} |B(u)|\, \mathrm{Var}_{]a,b]} A.$$

При $a = v_k$, $b = v_{k+1}$, $A(u) = \eta_n(u) - \eta_n(v_k)$, $B(u) = \rho_n(u) - \rho_n(v_k)$ вона набуває вигляду

$$\left|\int_{v_k}^{v_{k+1}} (\eta_n(u-) - \eta_n(v_k))\,d\rho_n(u)\right| \le |\eta_n(v_{k+1}) - \eta_n(v_k)|\,|\rho_n(v_{k+1}) - \rho_n(v_k)| +$$

$$+ \sup_{v_k < u \le v_{k+1}} |\rho_n(u) - \rho_n(v_k)|\, \mathrm{Var}_{]v_k, v_{k+1}]} \eta_n$$

і аналогічно для $B(u) = q_n(u) - q_n(v_k)$. Звідси для $g = \rho, q$ дістаємо $D(g_n, \delta) \equiv$ $\equiv \left|\int_0^t (\eta_n(u-)dg_n(u) - \sum_{k=0}^r \eta_n(v_k)(g_n(v_{k+1}) - g_n(v_k))\right| \le 2\Delta(g_n, t, |\delta|)\, \mathrm{Var}_t \eta_n$

Значить, $\forall\, \varepsilon, C > 0$ $P\{D(g_n, \delta) > \varepsilon\} \le P\{\mathrm{Var}_t \eta_n > C\} + P\{\Delta(g_n, t, |\delta|) > > \varepsilon/2C\}$, відтак на підставі (8) $\lim\limits_{|\delta|\to 0} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, P\{D(g_n, \delta) > \varepsilon\} \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, P\{\mathrm{Var}_t \eta_n > > C\}$. Тепер (42) випливає з (43), (37).

7^0. Покажемо, що для будь-якого t

$$M\gamma_n(t) - \zeta_n(t) \xrightarrow{P} 0. \tag{44}$$

Внаслідок $\mathcal{H}$-вимірності $q_n(t)$ як функції від x ліва частина (44) дорівнює $M(\gamma_n(t) - \upsilon_n(t))$, тож з огляду на (42) потрібно лише довести, що в записаному виразі можна переходити до границі під знаком M. А для цього досить встановити співвідношення

$$\forall\ \varepsilon > 0 \quad \lim_{C\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}}\ P\{M|g_n| I\{|g_n| > C\} > \varepsilon\} = 0, \tag{45}$$

де $g_n = \gamma_n(t)$ або $\upsilon_n(t)$.

З означення γ_n і формули (27) випливає рівність

$$\gamma_n = \eta_n - \eta_n(0) - (\eta_n^-(e^{izf_n} - 1 - \varphi_n)) * \overline{\nu}_n - (\eta_n^- \varphi_n) * \overline{\nu}_n. \tag{46}$$

На підставі теореми Фубіні, леми 3 і рівності (29) $EM|(\eta_n^-\varphi_n) * \overline{\nu}_n|^2 \le \le ME|\varphi_n|^2 * \pi_n = EZ_n$. Тепер співвідношення (45) для $g_n = \gamma_n(t)$ випливає з (46), (29), (12), (13), (11).

Очевидно,

$$M|\upsilon_n(t)| I\{|\upsilon_n(t)| > C\} \le C^{-1} M|\upsilon_n(t)|^2. \tag{47}$$

З означень процесів υ_n (п. 6^0), U_n (перед теоремою), з рівності (29) і очевидної нерівності $\operatorname{Var} MA \le M \operatorname{Var} A$ $(A \in \mathcal{V})$ дістаємо $|\upsilon_n| \le M \operatorname{Var} \Phi_n + M|e^{izf_n} - 1 - - \varphi_n| * \pi_n + U_n$, що разом із (47), A1), (13), A2) доводить (45) для $g_n = \upsilon_n(t)$.

8^0. Покажемо, що для кожного z процес $R = \kappa - \zeta$ є мартингалом.

За побудовою $R_n \equiv \hat{\xi}_n - M\gamma_n = \psi_n + M(\eta_n^-(e^{izf_n} - 1 - \varphi_n)) * \overline{\nu}_n$, причому, як показано в п. 2^0, ψ_n — мартингал. Згідно з пп. 4^0, 7^0 $R_n \xrightarrow{d} R$, $n \to \infty$, $n \in W$, відтак з огляду на (12), (13), (29) $\psi_n \xrightarrow{d} \kappa - \zeta$. Залишається зауважити, що для будь-якого t послідовність $(\psi_n(t))$ рівномірно інтегровна завдяки (31), (11).

9^0. Покажемо, що $R \in \mathcal{V}$.

Внаслідок (33), (38) $\kappa \in \mathcal{V}$. За побудовою $\operatorname{Var}\zeta_n \le \operatorname{Var} q_n \le |z| M \operatorname{Var}\Phi_n + + 2MY_n$. Це разом з A1), Б3), (33) показує, що $\zeta \in \mathcal{V}$.

10^0. Процес R неперервний внаслідок (33).

11^0. З пп. $8^0 - 10^0$ робимо висновок, що $R(t) = R(0)$, тобто $\kappa(t) - - iz\int_0^t \kappa(u)\,dF(u) - \int_0^t \kappa(u)\,dQ(u) = J(z)$, де J визначається умовою (8). Звідси

$$\kappa(t, z) = J(z) \exp\{izF(t) + Q(t, z)\}. \tag{48}$$

12^0. Порівнюючи висновки пп. 3^0 і 11^0, бачимо, що будь-яка нескінченна підмножина $V \subset \mathbb{N}$ містить нескінченну підмножину W таку, що підпослідовність $(\underline{\hat{\xi}}_n, n \in W)$ слабко збігається в $\mathbf{C}$ до векторного процесу $(\kappa(\cdot, z_j), j = = \overline{1, m})$, який задається формулою (48). Зважаючи на довільність множини V, з якої вибиралася W, до цієї ж границі збігається і вся послідовність $(\underline{\hat{\xi}}_n, n \in \in \mathbb{N})$.

13^0. З п. 12^0 і умов (9), (10) виводимо за лемою 2, що при кожному t функція $\kappa(t, \cdot)$ аргументу z є характеристичною функцією деякої випадкової ф. р. $\Xi(t) = \xi(t, \cdot)$: $\kappa(t, z) = \hat{\xi}(t, z)$ ($\hat{\xi}$ як у формулюванні теореми). Тоді з п. 12^0 випливає, що для будь-яких $m, l \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$, $z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{R}$

$$(\hat{\xi}_n(t_i, z_j),\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, l}) \xrightarrow{d} (\hat{\xi}(t_i, z_j),\ i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, l}),$$

звідки за лемою 2 $\forall\, t_1, \ldots, t_m\, (\xi_n(t_1, \cdot), \ldots, \xi_n(t_m, \cdot)) \xrightarrow{d} (\xi(t_1, \cdot), \ldots, \xi(t_m, \cdot))$, або, в інакших позначеннях, $\Xi_n \xrightarrow{d} \Xi$.

14^0. Тепер, щоб завершити доведення, достатньо показати, що: і) послідовність (Ξ_n) відносно компактна в $\mathcal{R}$; іі) кожна її часткова границя є неперервним $\mathcal{G}$-значним процесом.

Позначимо відстань Леві в $\mathcal{G}$ через L. Згідно з нерівністю Золотарьова [10, с. 159]

$$\forall\, T > e \quad L(\Xi_n(u), \Xi_n(v)) \le \int_0^T \frac{\left|\hat{\xi}_n(u, z) - \hat{\xi}_n(v, z)\right|}{z}\, dz + \frac{2e \ln T}{T}.$$

При цьому $\left|\hat{\xi}_n(u, z) - \hat{\xi}_n(v, z)\right| \overset{(5),(3)}{=} |Me^{iz\beta_n(u)} - Me^{iz\beta_n(v)}| \le zM|\beta_n(u) - \beta_n(v)|$, відтак $L(\Xi_n(u), \Xi_n(v)) \le TM|\beta_n(u) - \beta_n(v)| + 2eT^{-1}\ln T$. Ця нерівність разом з умовою (14) доводить і). З неперервності (внаслідок (8)) правої частини рівності (48) випливає іі).

Зробимо ряд зауважень щодо умов теореми.

1. Умову (8) можна, не змінюючи решти умов теореми, замінити трьома наступними:

$$\forall\, l \in \mathbb{N}, \quad \forall\, z_1, \ldots, z_l \in \mathbb{R} \quad (\hat{\xi}_n(0, z_j), \Phi_n(\cdot), \Pi_n(\cdot, z_j), j = \overline{1, l}) \xrightarrow{C}$$

$$\xrightarrow{C} (J(z_j), F(\cdot), Q(\cdot, z_j), j = \overline{1, l}), \tag{49}$$

$$\forall\, t, z \quad \Pi_n(t, z) - Q_n(t, z) \xrightarrow{P} 0, \tag{50}$$

$$\forall\, t \quad \Phi_n(t) - F_n(t) \xrightarrow{P} 0. \tag{51}$$

Це стає очевидним, якщо зауважити, що послідовності (F_n), $(Q_n(\cdot, z))$ відносно компактні в $\mathbf{C}$ внаслідок A1), A2), (13).

2. Якщо в лемі 3 міра N квазінеперервна зліва, то нерівність (21) має місце (притому у формі рівності) для довільної опційної функції g. Таким чином, висновок теореми залишається справедливим, якщо функція $\pi_n(\cdot, A)$ неперервна для тих A, для яких вона скінченна, і справджуються умови (8) – (11), A), Б) з функцією $\varphi_n = e^{izf_n} - 1$, від якої не вимагається передбачуваності.

3. З огляду на нерівність $2|\sin(a/2)| \le 3|a|/(1 + |a|)$, $a \in \mathbb{R}$, можна замінити умови Б2), Б3) вимогою стохастичної обмеженості для будь-якого t послідовностей $(S_n(t))$, $(MS_n(t))$, де $S_n = (|f_n|/(1 + |f_n|)) * \pi_n$. Якщо до того ж можна покласти $\varphi_n = e^{izf_n} - 1$ (за умов попереднього зауваження або для передбачуваної f_n), то замість A2), A3) можна зажадати відносної компактності в $\mathbf{C}$ послідовностей (S_n), (B_n), де $B_n = (f_n^2/(1 + f_n^2)) * \pi_n$, а умову (11) замінити такою: $\forall\, t\ \sup_n EB_n(t) < \infty$.

4. Основній умові збіжності (8) або її модифікації (49) – (51) можна надати зручнішої для перевірки форми — такої, як у теорії підсумовування випадкових величин. Позначимо $a_n = (f_n/(1 + f_n^2)) * \pi_n$, $G_n(t, y) = (I\{f_n \le y\} f_n^2/(1 + f_n^2)) *$

$*\pi_n(t)$, $b_n(t)=\lim\limits_{y\to\infty} G_n(t,y)$, $\Gamma_n(t)=G_n(t,\cdot)/b_n(t)$, $H_n(y)=\mu\{\beta_n(0)\le y\}\equiv\xi_n(0, y)$, $h(y,z)=(e^{izy}-1-izy/(1+y^2))(1+y^2)/y^2$.

Очевидно,

$$\Pi_n(t,z) = iza_n(t)+\int\limits_{\mathbb{R}} h(y,z)G_n(t,dy).$$

Звідси, спираючись на Скороходів принцип спільного ймовірнісного простору [7], неважко вивести, що умови (49), (50) можна конкретизувати в такий спосіб:

$$(H_n, \Phi_n, a_n, b_n, \Gamma_n) \xrightarrow{\mathcal{G}\times C^3\times C} (H, F, a, b, \Gamma), \tag{52}$$

$$\forall\, t \quad |a_n(t)-Ma_n(t)|+|b_n(t)-Mb_n(t)|+$$
$$+L(\Gamma_n(t), MG_n(t,\cdot))/Mb_n(t) \xrightarrow{P} 0. \tag{53}$$

Отже, якщо виконані умови (7), А), Б), (11) – (13), (51) – (53), то справджується висновок теореми з $J(z) = \hat{H}(z)$, $Q(t,z) = iz\dot{a}(t) + \int_{\mathbb{R}} h(y,z)G(t,dy)$, де $G(t,\cdot)=b(t)\Gamma(t)$ (очевидно, такі J, Q задовольняють (9), (10)).

1. *Юрачківський А. П.* Закон великих чисел для міри області, покритої потоком випадкових множин // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 1996. – Вип. 55. – С. 173–177.
2. *Юрачківський А.П.* Явища усереднення для об'єднань випадкових множин // Допов. НАН України. – 1997. – № 6. – С. 45–49.
3. *Юрачківський А. П.* Граничні теореми для мір перерізів випадкових множин // Теорія ймовірностей і мат. статистика. – 1997. – Вип. 56. – С. 177–182.
4. *Yurachkivsky A. P.* Functional limit theorems for coverage processes // Theory Stochast. Process. – 1997. – **3 (19)**, № 3–4. – P. 256–263.
5. *Юрачківський А. П.* Функціональні граничні теореми з пуассонівською компонентою в задачах стохастичної геометрії // Допов. НАН України. – 1997. – № 11. – С. 46–50.
6. *Жакод Ж., Ширяев А. Н.* Предельные теоремы для случайных процесов: В 2-х т. – М.: Физматгиз, 1994. – Т. 1. – 544 с.
7. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процесов // Теория вероятностей и ее применения. – 1956. – **1**, № 2. – С. 289–319.
8. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Теория мартингалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
9. *Ширяев А. Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1989. – 640 с.
10. *Петров В. В.* Суммы независимых случайных величин. – М.: Наука, 1972. – 416 с.

Одержано 24.01.97,
після доопрацювання — 06.12.98