УДК 519.41/47

О. Ю. Дашкова (Днепропетр. ун-т)

РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ КОНЕЧНОГО НЕАБЕЛЕВА СЕКЦИОННОГО РАНГА

Non-Abelian soluble groups of finite non-Abelian sectional rank are studied. It was proved that their (special) rank is finite.

Вивчаються неабелеві розв'язні групи скінченного неабелева секційного рангу і доводиться, що їх (спеціальний) ранг скінченний.

В [1] введено понятие неабелева секционного ранга группы и изучаются локально нильпотентные группы, имеющие конечный неабелев секционный ранг. *Неабелев секционный ранг неабелевой группы* G — это такое наименьшее число r, для которого всякая неабелева конечно порожденная секция группы G может быть порождена не более чем r элементами. Если все секции группы G абелевы, неабелев секционный ранг группы G полагают равным 0. В случае, когда G имеет хотя бы одну неабелеву секцию и числа r с указанными свойствами не существует, неабелев секционный ранг группы G считается бесконечным. Как и в [1], под секцией группы G всюду будем понимать фактор-группу A/B, где A и B — неединичные подгруппы группы G и подгруппа B нормальна в A. Для неабелева секционного ранга группы G будем использовать введенный в [1] символ $\bar{r}_c(G)$. Символом $r(G)$ обозначается, как обычно, специальный ранг группы G.

Установлено [1], что неабелевы локально нильпотентные группы конечного неабелева секционного ранга имеют конечный (специальный) ранг. Основным результатом данной статьи является следующая теорема.

Теорема. *Неабелева разрешимая группа конечного неабелева секционного ранга имеет конечный ранг.*

Доказательству теоремы предпошлем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Если* G *— неабелева конечная или разрешимая группа, то*

$$r(Z(G)) \leq 4 + \bar{r}_c(G).$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $r(Z(G)) > 1$. В центре $Z(G)$ можно выбрать элемент z, для которого фактор-группа $G/\langle z\rangle$ неабелева. Неабелев ранг [2] фактор-группы $G/\langle z\rangle$ не превышает $\bar{r}_c(G)$, откуда с учетом леммы 2 [2] получаем неравенство $r(Z(G)/\langle z\rangle) \leq 3 + \bar{r}_c(G)$, и поэтому $r(Z(G)) \leq 4 + \bar{r}_c(G)$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Сплетение* W *группы простого порядка* p *и бесконечной циклической группы имеет бесконечный неабелев секционный ранг.*

Доказательство. Пусть A — база сплетения W, $W = A\langle g\rangle$, $\langle g\rangle$ — бесконечная циклическая группа и $V = A\langle g^n\rangle$ — подгруппа сплетения W, где n — произвольное натуральное число, большее 1. Подгруппа A разлагается в прямое произведение $A = A_1 \times \ldots \times A_n$ таких g^n-допустимых подгрупп A_i, $i = 1, \ldots, n$, что произведение $A_i\langle g^n\rangle$ изоморфно группе W. Секция V/A_1 неабелева, и согласно лемме 3 [2] ее неабелев ранг бесконечен. Отсюда следует бесконечность неабелева секционного ранга группы G. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть неабелева группа G представима в виде произведения $G = A\langle g\rangle$, где A — ее нормальная абелева подгруппа. Если подгруппа A содержит конечную подгруппу B, нормальную в группе G, для которой фактор-группа G/B абелева, то из конечности неабелева секционного ранга группы G следует конечность ее ранга.*

Доказательство. Предположим, что ранг подруппы A бесконечен. Поскольку подгруппа B конечна, а фактор-группа G/B абелева, в подгруппе A можно выбрать подгруппу $C = \mathop{\times}\limits_{i=1}^{\infty} \langle c_i\rangle$, имеющую бесконечный ранг, для которой $c_i^g = c_i b$, $i = 1, 2, \ldots$, где b — элемент из B. Отсюда вытекает, что элементы $c_j c_t^{-1}$, $j = 1, 2, \ldots$, $t = 1, 2, \ldots$, содержатся в центре группы G, и поэтому $D \le Z(G)$, где $D = \langle c_j c_t^{-1}, j = 1, 2, \ldots, t = 1, 2, \ldots\rangle$. Ранг подгруппы D бесконечен, что противоречит лемме 1. Следовательно, ранг подгруппы A конечен, и поэтому $r(G) < \infty$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть неабелева группа G представима в виде произведения $G = A\langle g\rangle$, где A — ее периодическая абелева нормальная подгруппа. Если неабелев секционный ранг группы G конечен, то конечен и ее ранг.*

Доказательство. Докажем сначала, что в подгруппе A можно выбрать конечную неединичную подгруппу B, нормальную в G. В случае, когда элемент g индуцирует в подгруппе A автоморфизм конечного порядка, для произвольного неединичного элемента $b \in A$ нормальное замыкание $B = \langle b^G\rangle$ конечно, и подгруппа B с заданным свойством найдена.

Пусть теперь элемент g индуцирует в подгруппе A автоморфизм бесконечного порядка. Покажем, что для любого элемента $a \in A$ простого порядка p нормальное замыкание $B = \langle a^G\rangle$ элемента a в группе G конечно. Подгруппа B порождается элементами

$$g^{-t} a g^t, \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{1}$$

порядка p, исчерпывающими все множество сопряженных элементов с элементом a в группе G. Если множество элементов (1) бесконечно, то все его элементы различны и поэтому подгруппа $\langle a, g\rangle$ изоморфна сплетению группы порядка p и бесконечной циклической. Согласно лемме 2 неабелев секционный ранг подгруппы $\langle a, g\rangle$ бесконечен, что противоречит конечности неабелева секционного ранга группы G. Следовательно, множество элементов (1) конечно, и поэтому конечна подгруппа B.

Для доказательства леммы достаточно показать, что ранг фактор-группы G/B конечен. Если фактор-группа G/B неабелева, то с учетом конечости неабелева секционного ранга группы G по лемме 4 [2] получаем конечность ранга $r(G/B)$. В случае абелевой фактор-группы G/B согласно лемме 3 $r(G) < \infty$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если A — абелева группа без кручения, G — ее неединичная полициклическая группа автоморфизмов, то в A существует периодический G-фактор B/C, в котором G действует нетождественно, и ранги $r(A)$ и $r(B/C)$ одинаковы.*

Доказательство. Если A — абелева группа без кручения бесконечного ранга, то существование периодического G-фактора B/C бесконечного ранга, в котором G действует нетождественно, следует из леммы 5 [2].

Для доказательства леммы воспользуемся некоторыми результатами Холла о конечно порожденных модулях над полициклическими группами [3]. Пусть D — конечно порожденный G-модуль, G — полициклическая группа, действующая в D нетождественно. По определению группа D принадлежит классу $\mathfrak{B}$ абелевых групп [3, с. 174]. Согласно лемме 5.2 [3] группа D входит в класс $\mathfrak{A}(\pi)$, где π — некоторое конечное множество простых чисел, т. е. в D существует такая свободная абелева подгруппа F, что D/F — π-группа. Из леммы 12 [3] вытекает $\bigcap_{p\notin\pi} pD = 1$, и поэтому существует такое простое $p \notin \pi$, что группа G действует в факторе D/pD нетождественно. Пусть ранг абелевой подгруппы D конечен. Поскольку $D/pD \simeq F/pF$, то справедливо равенство

$$r(D/pD) = r(F/pF). \tag{2}$$

Из периодичности фактора D/F следует

$$r(D) = r(F). \tag{3}$$

Из равенств (2) и (3) с учетом равенства $r(F) = r(F/pF)$ получаем $r(D) = r(D/pD)$.

Перейдем непосредственно к доказательству леммы и рассмотрим случай абелевой подгруппы A конечного ранга. Подгруппу A будем рассматривать как G-модуль и использовать для записи операции в A аддитивную запись. Согласно указанным свойствам Холла существует такое простое p, что группа G действует нетождественно в факторе A/pA, и $r(A) = r(A/pA)$. Положив $A/pA = B/C$, получаем справедливость доказываемого утверждения. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть неабелева группа G представима в виде произведения $G = A\langle g\rangle$, где A — ее нормальная абелева подгруппа без кручения. Если неабелев секционный ранг группы G конечен, то конечен и ее ранг.*

Доказательство. Если ранг подгруппы A бесконечен, то согласно лемме 5 в A существует периодический G-фактор B/C, ранг которого бесконечен, и элемент g действует в B/C нетождественно. Применяя к группе $B\langle g\rangle/C$ лемму 4, получаем конечность ранга $r(B/C)$. Противоречие. Следствие доказано.

Доказательство *теоремы.* Рассмотрим сначала случай двуступенно разрешимой группы G конечного неабелева секционного ранга $\bar{r}_c(G)$. Обозначим через A коммутант группы G и через T — периодическую часть подгруппы A.

Если A/T — центральный фактор группы G, то ввиду леммы 1, примененной к фактор-группе G/T, ранг $r(A/T)$ не превышает числа $4 + \bar{r}_c(G)$. Если A/T — нецентральный фактор группы G, то найдется такой элемент $g \in G$, что группа $A\langle g\rangle/T$ неабелева. Поскольку A/T — группа без кручения, согласно следствию леммы 5 ранг фактора A/T конечен. Конечность ранга подгруппы T устанавливается аналогично, только здесь вместо следствия леммы 5 нужно использовать лемму 4. Тем самым конечность ранга подгруппы A доказана.

Если подгруппа T и фактор-группа A/T неединичны, то фактор-группа G/T неабелева и имеет конечный неабелев ранг, не превышающий $\bar{r}_c(G)$. Согласно теореме [2] с учетом конечности $r(T)$ получаем конечность ранга группы G. Пусть теперь $A = T$ и T_1 — неединичная собственная подгруппа группы

T, нормальная в группе G. Фактор-группа G/T_1 неабелева, откуда с учетом теоремы [2] и конечности рангов $r(T_1)$ и $\bar{r}_c(G)$ вытекает конечность ранга группы G.

Если подгруппа T_1 с указанными свойствами не существует, то подгруппа T является элементарной абелевой, откуда с учетом конечности ранга $r(T)$ следует конечность подгруппы T, и поэтому для централизатора $C = C_G(T)$ выполняется соотношение $|G : C| < \infty$. Если подгруппа C неабелева, то она двуступенно нильпотентна и согласно теореме [1] ранг $r(C)$ конечен, откуда получаем конечность ранга группы G. Пусть теперь подгруппа C абелева. Если C центральна в группе G, то по лемме 1 $r(C) \le 4 + \bar{r}_c(G)$. В случае нецентральной подгруппы C существует элемент $g \in G$, для которого подгруппа $C\langle g\rangle$ неабелева, причем фактор-группа $C\langle g\rangle/T$ абелева. Ввиду леммы 3 ранг подгруппы C конечен. Отсюда с учетом конечности индекса $|G : C|$ следует конечность ранга группы G.

Пусть теперь коммутант A двуступенно разрешимой группы G не имеет кручения. Если подгруппа A центральна в G, то группа G двуступенно нильпотентна и согласно [1] ранг $r(G)$ конечен. Пусть A не содержится в $Z(G)$, и предположим, что $r(G/A) > \bar{r}_c(G)$. Тогда в G можно выбрать такую конечно порожденную неабелеву подгруппу B, для которой справедливо неравенство

$$r(BA/A) > \bar{r}_c(G), \tag{4}$$

и полициклическая группа автоморфизмов $B/C_B(B \cap A)$ действует в $B \cap A$ нетождественно. Из доказательства леммы 5 следует, что в $B \cap A$ существует периодический $B/C_B(B \cap A)$-фактор $(B \cap A)/D$, в котором $B/C_B(B \cap A)$ действует нетождественно. Секция B/D неабелева и конечно порождена, откуда ввиду конечности $\bar{r}_c(G)$ вытекает, что B/D имеет систему порождающих, состоящую не более чем из $\bar{r}_c(G)$ элементов. Следовательно, для абелевой секции BA/A, изоморфной $(B/D)/((B \cap A)/D)$, справедливо неравенство $r(BA/A) \le \bar{r}_c(G)$. Противоречие с (4). Отсюда получаем, что $r(G/A) \le \bar{r}_c(G)$ и ранг группы G конечен.

Рассмотрим теперь случай разрешимой группы G, ступень разрешимости которой больше 2. Обозначим через H предпоследний отличный от единицы член ряда коммутантов группы G, через H_1 — коммутант подгруппы H. Подгруппа H двуступенно разрешима, откуда с учетом конечности $\bar{r}_c(G)$ и рассуждений, проведенных выше, вытекает конечность ранга $r(H)$. Фактор-группа G/H_1 неабелева и имеет конечный неабелев ранг. По теореме [2] ранг фактор-группы G/H_1 конечен, и следовательно, конечен ранг группы G. Теорема доказана.

1. *Дашкова О. Ю.* Локально нильпотентные группы конечного неабелева секционного ранга // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 4. – С. 452–455.
2. *Дашкова О. Ю.* Разрешимые группы конечного неабелева ранга // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 159–164.
3. *Холл Ф.* О конечности некоторых разрешимых групп // Разрешимые и простые бесконечные группы. – М.: Мир, 1981. – С. 171–206.

Получено 20.10.94