УДК 517.5

А. И. Степанец, Р. А. Ласурия (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ. II

Questions of strong summability of Fourier series in orthonormal systems of functions of polynomial type are considered. A local characteristics of points at which such series for summable functions are strongly summable is found. It is shown that the set of these points is of complete measure in the segment of uniform boundedness of the considered systems.

Розглядаються питання сильної сумовності рядів Фур'є за ортонормованими системами поліноміального вигляду. Знайдено локальну характеристику точок сильної сумовності таких рядів для сумовних функцій. Показано, що множина цих точок має повну міру на відрізку рівномірної обмеженості систем, що розглядаються.

Настоящая статья является продолжением работы [1]. Нумерация пунктов, утверждений, формул и списка литературы продолжается.

4. Основные результаты. Основной результат настоящей работы содержится в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть*

$$\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega, \quad \varphi_0(\cdot) \equiv \left(1\Big/\int_a^b \omega(t)\,dt\right)^{1/2},$$

— ортонормированная с весом $\omega(\cdot)$ на отрезке $[a,b]$ система функций полиномиального вида, которая на множестве $[c,d] \subseteq [a,b]$ равномерно ограничена:

$$\sup_{\substack{x \subset [c,d],\\ k \in N}} |\varphi_k(x)| \le K. \tag{79}$$

Пусть, далее, x — произвольная точка отрезка (c,d), в которой данная система имеет свойство B.

Тогда если функция $f(\cdot)$ суммируема с весом $\omega(\cdot)$ на $[a,b]$ ($f \in L_\omega(a,b)$), на множестве $E = [a,b] \setminus [c,d]$ суммируем ее квадрат с весом $\omega(\cdot)$ ($f \in L^2_\omega(E)$) и в данной точке x имеет конечное значение, то для любого $\delta > 0$, входящего в определение B*-свойства точки x, при любых $q \ge 2$ справедливо неравенство*

$$H_{n,q}(f;\varphi;x) \le K\left(h^{(\omega)}_{n,p}(f;x;\delta)\right)^{1/p} + \varepsilon_n(x), \tag{80}$$

где $H_{n,q}(f;\varphi;x)$ и $h^{(\omega)}_{n,p}(f;x;\delta)$ — величины, которые определяются соответственно равенствами (3) *и* (15)*; $p = q/(q-1)$; K — величина, равномерно ограниченная по n, и $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n(x) = 0$.*

Доказательство. Пусть x — точка, определяемая условиями теоремы и δ — величина, входящая в определение ее B-свойства. Поскольку

$$\varphi_0 \equiv \left(1\Big/\int_a^b \omega(t)\,dt\right)^{1/2},$$

то

$$\int_a^b \Phi_k(t,x)\,\omega(t)\,dt = \int_a^b \left(\sum_{i=0}^{k} \varphi_i(t)\,\varphi_i(x)\right)\omega(t)\,dt = 1.$$

Поэтому, полагая $\overline{\varphi}_x(t) = f(t) - f(x)$, имеем

$$f(x) - S_k(f;x) = \int_a^b \overline{\varphi}_x(t)\, \Phi_k(t,x)\, \omega(t)\, dt =$$

$$= \left(\int_E + \int_G + \int_{u_\delta(x)} \right) \overline{\varphi}_x(t)\, \Phi_k(t,x)\, \omega(t)\, dt \overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{3} J_{\nu,k}(x), \tag{81}$$

где $G = [c,d] \backslash u_\delta(x)$.

Отсюда с помощью неравенства Минковского для сумм получаем

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f(x) - S_k(f;x) \right|^q \right)^{1/q} \le \sum_{\nu=1}^{3} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |J_{\nu,k}(x)|^q \right)^{1/q} \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} \sum_{\nu=1}^{3} \left(\tilde{J}_\nu^{(n)}(x) \right)^{1/q}. \tag{82}$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{J}_1^{(n)}(x) = 0. \tag{83}$$

Пользуясь представлением (11) ядра $\Phi_k(t,x)$ и равномерной ограниченностью величин $\gamma_{m,j,l}^{(n)}$ и $\varphi_n(\cdot)$, находим

$$|J_{1,k}(x)| = \left| \int_E \overline{\varphi}_x(t)\, \Phi_k(t,x)\, \omega(t)\, dt \right| =$$

$$= \left| \int_E \overline{\varphi}_x(t) \sum_{l=1}^{r} F_l(t,x) \sum_{m,j=-\sigma}^{r} \gamma_{m,j,l}^{(k)}\, \varphi_{k+m}(t)\, \varphi_{k+j}(x)\, \omega(t)\, dt \right| \le$$

$$\le K \sum_{l=1}^{r} \sum_{m,j=-\sigma}^{\sigma} \left| \int_E \overline{\varphi}_x(t)\, F_l(t,x)\, \varphi_{k+m}(t)\, \omega(t)\, dt \right| \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} K \sum_{l=1}^{r} \sum_{m,j=-\sigma}^{\sigma} \left| \kappa_{k+m}^{(l)}(t)(x) \right|.$$

Величина $\kappa_{k+m}^{(l)}(x)$ представляет собой $(k+m)$-й коэффициент разложения по системе $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ функции

$$y_x^{(l)}(t) = \begin{cases} \overline{\varphi}_x(t)\, F_l(t,x), & t \in E; \\ 0, & t \notin E. \end{cases}$$

Вследствие (12) заключаем, что $y_x^{(l)}(t) \in L_\omega^2(a,b)$. Известно, (см., например, [13, с. 15]), что коэффициенты $c_k(f)$ ряда Фурье функции $f \in L_\omega^2(a,b)$ по любой ортонормированной с весом на $[a,b]$ системе функций стремятся к нулю при $k \to \infty$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_{k+m}^{(l)}(x) = 0, \quad m = -\sigma, \dots, \sigma, \quad l = 1, \dots, r,$$

и значит,

$$\lim_{k\to\infty} J_{1,k}(x) = 0.$$

Отсюда заключаем, что равенство (83) справедливо, поскольку $\tilde{J}_1^{(n)}(x)$ является средним арифметическим величин, стремящихся к нулю при $n\to\infty$.

Проводя аналогичные рассуждения, получаем

$$|J_{2,k}(x)| = \left|\int_G \overline{\varphi}_x(t)\,\Phi_k(t,x)\,\omega(t)\,dt\right| \le$$

$$\le K\sum_{l=1}^{r}\sum_{m,j=-\sigma}^{\sigma}\left|\int_G \overline{\varphi}_x(t)\,F_l(t,x)\,\varphi_{k+m}(t)\,\omega(t)\,dt\right| = K\sum_{l=1}^{r}\sum_{m,j=-\sigma}^{\sigma}\left|\overline{\kappa}_{k+m}^{(l)}(x)\right|, \tag{84}$$

где $\overline{\kappa}_{k+m}^{(l)}(x)$ — $(k+m)$-й коэффициент Фурье по системе $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ функции

$$\overline{y}_x^{(l)}(t) = \begin{cases}\overline{\varphi}_x(t)\,F_l(t,x), & t\in G;\\ 0, & t\notin G.\end{cases}$$

В силу (12) функция $\overline{y}_x^{(l)}(t)$ является суммируемой на $[a,b]$ и на множестве E обращается в нуль. В таком случае, как показано в [18, с. 764],

$$\lim_{k\to\infty}\overline{\kappa}_{k+m}^{(l)}(x) = 0,\quad m=-\sigma,\ldots,\sigma,\quad l=1,\ldots,r.$$

Поэтому вследствие (84)

$$\lim_{k\to\infty} J_{2,k}(x) = 0,$$

а значит, и

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{J}_2^{(n)}(x) = 0. \tag{85}$$

Теперь покажем, что

$$\left(\tilde{J}_3^{(n)}(x)\right)^{1/q} = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|J_{3,k}(x)|^q\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{u_\delta(x)}\overline{\varphi}_x(t)\,\Phi_k(t,x)\,\omega(t)\,dt\right|^q\right)^{1/q} \le K\left(h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta)\right)^{1/p}. \tag{86}$$

С этой целью положим $e_n(\delta) = (x-\delta/n, x+\delta/n)$, $e_n = u_\delta(x)\setminus e_n(\delta)$. Тогда

$$\int_{u_\delta(x)}\overline{\varphi}_x(t)\,\Phi_k(t,x)\,\omega(t)\,dt =$$

$$= \left(\int_{e_n(\delta)} + \int_{e_n}\right)\overline{\varphi}_x(t)\,\Phi_k(t,x)\,\omega(t)\,dt \overset{\text{def}}{=} i_{k,\delta}^{(n)}(x) + i_k^{(n)}(x).$$

Применяя неравенство Минковского, имеем

$$\left(\tilde{J}_3^{(n)}(x)\right)^{1/q} \le \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|i_{k,\delta}^{(n)}(x)\right|^q\right)^{1/q} + \left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|i_k^{(n)}(x)\right|^q\right)^{1/q} =$$

$$= \sum\nolimits_n^{(1)}(x) + \sum\nolimits_n^{(2)}(x). \tag{87}$$

В силу оценки (79) при $t, x \in [c, d]$

$$\Phi_k(t, x) \leq Ck, \tag{88}$$

где C — величина, равномерно ограниченная по k.

Поэтому

$$\sum\nolimits_n^{(2)}(x) \leq \left(\frac{K}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(n \int_{e_n} |\overline{\varphi}_x(t)| \, \omega(t) \, dt \right)^q \right)^{1/q} \leq$$

$$\leq Kn \int_{e_n} |\overline{\varphi}_x(t)| \, \omega(t) \, dt \leq K \left(h_{n,p}^{(\omega)}(f; x; \delta) \right)^{1/p}. \tag{89}$$

Переходя к оценке величины $\sum_n^{(1)}(x)$, полагаем $\overline{\Delta} = [0, 1]$; $\overline{\Delta}_k^{(n)} = [k/n, (k+1)/n]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, и через $\kappa_{n,k}(t)$ обозначаем характеристическую функцию промежутка $\overline{\Delta}_k^{(n)}$. Тогда

$$\sum\nolimits_n^{(2)}(x) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| i_{k,\delta}^{(n)}(x) \right|^q \right)^{1/q} = \left(\int_{\overline{\Delta}} \left| \sum_{k=0}^{n-1} i_{k,\delta}^{(n)}(x) \, \kappa_{n,k}(t) \right|^q dt \right)^{1/q} =$$

$$= \left\| \sum_{k=0}^{n-1} i_{k,\delta}^{(n)}(x) \, \kappa_{n,k}(t) \right\|_{q, \overline{\Delta}}. \tag{90}$$

Используя соотношение двойственности (см., например, [15, с. 39]), имеем

$$\sum\nolimits_n^{(1)}(x) = \sup_{\|g\|_{p,\overline{\Delta}} \leq 1} \left| \int_{\overline{\Delta}} \sum_{k=0}^{n-1} i_{k,\delta}^{(n)}(x) \, \kappa_{n,k}(t) \, g(t) \, dt \right| = \sup_{\|g\|_{p,\overline{\Delta}} \leq 1} \left| \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{(n)} i_{k,\delta}^{(n)}(x) \right|, \tag{91}$$

где

$$C_k^{(n)} \leq \int_{\overline{\Delta}_k^{(n)}} g(t) \, dt. \tag{92}$$

Учитывая равенства (11) и (87), получаем

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{(n)} i_{k,\delta}^{(n)}(x) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_\delta(x)} \overline{\varphi}_x(t) \, \Phi_k(t, x) \, \omega(t) \, dt \right| =$$

$$= \left| \sum_{l=1}^{r} \sum_{m,j=-\sigma}^{\sigma} \int_{e_n(\delta)} \overline{\varphi}_x(t) \, F_l(t, x) \left(\sum_{k=0}^{n-1} C_k^{(n)} \gamma_{m,j,l}^{(k)} \, \varphi_{k+m}(t) \, \varphi_{k+j}(x) \right) \omega(t) \, dt \right| \leq$$

$$\leq \sum_{l=1}^{r} \sum_{m,j=-\sigma}^{\sigma} \left| \int_{e_n(\delta)} \overline{\varphi}_x(t) \, F_l(t, x) \, T_{n+m-1}^{(j,l)}(t; x) \, \omega(t) \, dt \right|, \tag{93}$$

где

$$T_{n+m-1}^{(j,l)}(t; x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_k^{(n)} \gamma_{m,j,l}^{(k)} \, \varphi_{k+m}(t) \, \varphi_{k+j}(x) \tag{94}$$

— обобщенный полином порядка $n + m - 1$ по системе функций $\{ \varphi_k(\cdot) \}_\omega$.

Пусть $D_n(\delta)$ — множество отрезков $\Delta_k^{(n)}$, входящих в определение В-свойства системы $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$, и

$$M_k^{(n)} = \sup_{t\in\Delta_k^{(n)}} \left|T_{n+m-1}^{(j,l)}(t;x)\right|. \tag{95}$$

Тогда, обозначая через $J_{e_n(\delta)}^{(x)} = J_{e_n(\delta)}(l,m,j,k)$ интегралы в правой части (93) и пользуясь неравенством Гельдера, получаем

$$|J_{e_n(\delta)}(x)| \le \sum_{2\le|i|\le n} M_i^{(n)} \int_{\Delta_i^{(n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\, F_l(t,x)\right| \omega(t)\,dt =$$

$$= \left(\sum_{i=-n}^{-2} + \sum_{i=2}^{n}\right) M_i^{(n)} \int_{\Delta_i^{(n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\, F_l(t,x)\right| \omega(t)\,dt \overset{\text{def}}{=}$$

$$\overset{\text{def}}{=} J_{e_n(\delta)}^{-}(x) + J_{e_n(\delta)}^{+}(x). \tag{96}$$

Оценим сначала величину $J_{e_n(\delta)}^{+}$. Имеем

$$J_{e_n(\delta)}^{+} = n\int_0^1 \sum_{i=2}^{n} M_i^{(n)}\varkappa_{n,i}(\tau) \sum_{i=2}^{n} \left|\overline{\varphi}_x(t)\, F_l(t,x)\right| \omega(t)\,dt\, \varkappa_{n,i}(\tau)\,d\tau \le$$

$$\le n\left\|\sum_{i=2}^{n} M_i^{(n)}\varkappa_{n,i}(\tau)\right\|_{q,\overline{\Delta}} \left\|\sum_{i=2}^{n}\int_{\Delta_i^{(n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\, F_l(t,x)\right| \omega(t)\,dt\, \varkappa_{n,i}(\tau)\right\|_{p,\overline{\Delta}},$$

откуда

$$\left|J_{e_n(\delta)}^{+}(x)\right| \le \left(\sum_{i=2}^{n}\left(M_i^{(n)}\right)^q\right)^{1/q} \left(\sum_{i=2}^{n}\left(\int_{\Delta_i^{(n)}} \left|\overline{\varphi}_x(t)\, F_l(t,x)\right| \omega(t)\,dt\right)^p\right)^{1/p}. \tag{97}$$

Оценим первый сомножитель правой части этого неравенства. Учитывая (95), имеем

$$\left(\sum_{i=2}^{n}\left(M_i^{(n)}\right)^q\right) \le \left(\sum_{i=1}^{n} \sup_{t\in\Delta_k^{(n)}} \left|T_{n+m-1}^{(j,l)}(t;x)\right|^q\right). \tag{98}$$

Полиномы $T_{n+m-1}^{(j,l)}(t;x)$ представимы в виде

$$T_{n+m-1}^{(j,l)}(t;x) = \sum_{k=0}^{n+m-1} \alpha_k\varphi_k(t), \tag{99}$$

где

$$\alpha_k = \begin{cases} 0, & k = 0,\dots,m-1; \\ C_{k-1}^{(n)}\,\gamma_{m,j,l}^{(k-m)}\,\varphi_{k-m+j}(x), & k = m,\dots,n = m-1. \end{cases}$$

При этом в силу равномерной ограниченности величин $\gamma_{m,j,l}^{(k)}$ и соотношения (79) имеем

$$\left(\sum_{k=0}^{n+m-1}|\alpha_k|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|C_i^{(n)}\,\gamma_{m,j,l}^{(i)}\,\varphi_{k+j}(x)\right|^p\right)^{1/p} \le$$

$$\leq K\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left|C_i^{(n)}\right|^p\right)^{1/p} = K n^{1/p}\left\|\sum_{i=0}^{n-1}\int_{\Delta_i^{(n)}} g(t)\,dt\,\kappa_{n,i}(\tau)\right\|_{p,\overline{\Delta}} \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} n^{(1/p)-1}\left\|(Q_{\overline{\Delta}}\, g)(\tau)\right\|_{p,\overline{\Delta}}.$$

Оператор $Q_{\overline{\Delta}}$, являясь оператором усреднения, как известно (см., например, [19, с. 111]), ограниченно действует из L^p в L^p, $1 \leq p \leq \infty$, причем $\| Q_\Delta \|_{p,\Delta} \leq \leq 1$. Поэтому

$$\left(\sum_{k=0}^{n+m-1}|\alpha_k|^p\right)^{1/p} \leq K n^{(1-p)/p}\,\|g\|_{p,\overline{\Delta}} \leq K n^{(1-p)/p}. \tag{100}$$

Стало быть, согласно (98)

$$\sum_{i=2}^{n}\left(M_i^{(n)}\right)^q \leq \operatorname{Sup}\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Sup}_{t\in\Delta_k^{(n)}}\left|T_{n+m-1}^{(j,l)}(t;x)\right|^q, \tag{101}$$

где внешняя верхняя грань берется по полиномам вида (99), коэффициенты которых подчинены условию (100).

Далее положим

$$T_{n+m-1}^{(j,l)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k\varphi_k(x) + \sum_{k=m+1}^{n+m-1}\alpha_k\varphi_k(x) \stackrel{\text{def}}{=} T_n(x) + \Pi_{n+m-1}(x).$$

В силу равномерной ограниченности системы $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ на $[c, d]$ и неравенства Гельдера имеем

$$\left|T_{n+m-1}^{(j,l)}(t;x)\right|^q \leq 2^q|T_n(x)|^q + K_q\left|\sum_{k=m+1}^{n+m-1}|\alpha_k|\right|^q \leq$$

$$\leq 2^q|T_n(x)|^q + K_q m\left(\sum_{k=n+1}^{n+m-1}|\alpha_k|^p\right)^{q/p}, \tag{102}$$

где K_q — величина, равномерно ограниченная по n.

Система $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ в рассматриваемой точке x удовлетворяет условию В. Поэтому

$$\operatorname{Sup}\sum_{i=1}^{n}\operatorname*{Sup}_{t\in\Delta_i^{(n)}}|T_n(t)|^q \leq K, \tag{103}$$

а вследствие (100)

$$\operatorname{Sup}\sum_{i=1}^{n} K_q\, m \operatorname*{Sup}_{t\in\Delta_i^{(n)}}\left(\sum_{k=n+1}^{n+m-1}|\alpha_k|^p\right)^{q/p} \leq nmK_q\left(K n^{(1-p)/p}\right)^q \leq K. \tag{104}$$

Объединяя соотношения (101)–(104), убеждаемся, что правая часть в (101) не превышает величину, равномерно ограниченную по n. Поэтому согласно (98)

$$\left(\sum_{i=2}^{n}\left(M_i^{(n)}\right)^q\right)^{1/q} \leq K. \tag{105}$$

Принимая во внимание соотношение (12) при $t \in \Delta_i^{(n)}$, находим

$$|F_l(t,x)| \le \frac{K}{t-x} \le \frac{K}{(i-1)\delta} \le \frac{2Kn}{i\delta}.$$

Значит,

$$\left(\sum_{i=2}^{n} \left(\int_{\Delta_i^{(n)}} \left| \overline{\varphi}_x(t)\, F_l(t,x) \right| \omega(t)\, dt \right)^p \right)^{1/p} \le$$

$$\le K \left(\sum_{i=2}^{n} \left(\frac{n}{i} \int_{\Delta_i^{(n)}} \left| \overline{\varphi}_x(t) \right| \omega(t)\, dt \right)^p \right)^{1/p} \le \left(h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta) \right)^{1/p}. \qquad (106)$$

Таким образом, в силу (97), (105) и (106),

$$\left| J_{e_n(\delta)}^{+}(x) \right| \le K \left(h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta) \right)^{1/p}.$$

Ясно, что такая же оценка будет справедливой и для величины $\left| J_{e_n(\delta)}^{-}(x) \right|$, а стало быть, и для величины $|J_{e_n(\delta)}(x)|$. Подставляя эту оценку в (93) и принимая во внимание равенство (91), имеем

$$\sum\nolimits_n^{(1)}(x) \le K \left(h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta) \right)^{1/p}.$$

Объединяя это соотношение с оценками (89) и (88), получаем (86), что и завершает доказательство теоремы.

Из доказанной теоремы вытекает ряд следствий.

Принимая во внимание определение $h_{p,\omega}$-точки данной функции $f(\cdot)$ и замечание о том, что (H,q)-суммируемость влечет (H,q_1)-суммируемость при $q_1 \in (0,q]$, получаем следующие утверждения.

Следствие 1. *Пусть система* $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$, *точка* $x \in (c,d)$ *и функция* $f(\cdot)$ *удовлетворяют всем требованиям теоремы* 1 *и, кроме того, данная точка* x *является* $h_{p,\omega}$*-точкой функции* $f(\cdot)$. *Тогда для каждого* $q_1 \in (0, q]$, $q \ge 2$, $1/q + 1/p = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} H_{n,q_1}(f;\varphi;x) = 0, \qquad (107)$$

т. е. в данной точке x *ряд Фурье функции* $f(\cdot)$ *по данной системе является* (H,q_1)*-суммируемым.*

Следствие 2. *Пусть система* $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ *и функция* $f(\cdot)$ *удовлетворяют всем требованиям теоремы* 1 *и, кроме того, на некотором множестве* $e \subseteq (c,d)$ *система имеет свойство* B. *Тогда для любого* $x \in e \cap H_p^{(\omega)}$, *где* $H_p^{(\omega)}$ — *множество* $h_{p,\omega}$*-точек функции* $f(\cdot)$ *при любых* $q_1 \in (0,q]$, $q \ge 2$, $1/q + 1/p = 1$, *справедливо равенство* (107).

Принимая во внимание лемму 2, приходим к следующему утверждению.

Следствие 3. *При условиях, принятых в следствии* 2, *соотношение* (107) *выполняется почти всюду на* e.

Тригонометрическая система удовлетворяет условиям, принятым в следствии 3, и в силу леммы 6 имеет свойство B на всей действительной оси. Поэтому из следствия 3 получается упомянутый в п. 1 результат Габисония–Новикова–Родина.

Учитывая лемму 7, из следствия 3 получаем такое утверждение.

Следствие 4. *Пусть* $\{P_k(\cdot)\}_\omega$ — *ортонормированная на* $[a,b]$ *с весом* $\omega(\cdot)$ *система алгебраических полиномов, равномерно ограниченных на* $[c,d]\subseteq$ $\subseteq[a,b]$ *и для любого* $x\in(c,d)$ $\omega(x)\geq\omega_0>0$. *Пусть, далее, функция* $f(\cdot)$ *суммируема с весом* $\omega(\cdot)$ *на* $[a,b]$ *и на множестве* $[a,b]\backslash[c,d]$ *суммируем ее квадрат с весом* $\omega(\cdot)$. *Тогда в каждой точке* $x\in(c,d)\bigcap H_p^{(\omega)}$ *при любых* $q_1\in(0,q]$, $q\geq 2$, $1/q+1/p=1$, *справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}|f(x)-S_k(f;x)|^q=0, \tag{108}$$

где $S_k(f;x)$ — *частная сумма порядка* k *ряда Фурье функции* $f(x)$ *по системе* $\{P_k(\cdot)\}_\omega$.

Отметим, что последнее утверждение анонсировано в [20].

Величина $H_{n,q}(f;x)$, определяемая равенством (3), может быть записана в виде

$$H_{n,q}(f;x)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}l_k^{(n)}\left|\rho_k(f;x)\right|^q\right)^{1/q}, \tag{109}$$

где $\rho_k(f;x)=f(x)-S_k(f;x)$ и

$$l_k^{(n)}=\begin{cases}1/n, & 0\leq k\leq n-1;\\ 0, & k>n-1.\end{cases} \tag{110}$$

Тогда равенство (107) принимает вид

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}l_k^{(n)}\left|\rho_k(f;x)\right|^q\right)^{1/q}=0. \tag{111}$$

Используя полученные выше результаты, можно установить аналоги равенства (111) и в более общих ситуациях, т. е. когда числа $l_k^{(n)}$ задаются не только соотношением (110).

Пусть $\Lambda=\{\lambda_k^{(n)}\}$, $k,n=0,1,\ldots,$ — бесконечная прямоугольная матрица чисел. Каждой $f\in L_\omega(a,b)$ при некотором $q>0$ поставим в соответствие величину

$$R_{n,q}(f;x)=R_{n,q}(f;x;\Lambda)=\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k^{(n)}\left|\rho_k(f;x)\right|^q\right)^{1/q}. \tag{112}$$

Ближайшей целью является указание условий, обеспечивающих выполнение соотношения

$$\lim_{n\to\infty}R_{n,q}(f;x;\Lambda)=0. \tag{113}$$

Следуя Л. Гоголадзе, обозначим через Λ_γ множество матриц Λ, элементы $\lambda_k^{(n)}$ которых при данном фиксированном $\gamma>1$ удовлетворяют условию

$$\left(\frac{1}{m}\sum_{k=m+1}^{2m}\left|\lambda_k^{(n)}\right|^\gamma\right)^{1/\gamma}\leq\frac{K}{m}\sum_{k=[(m+1)/2]}^{m}\left|\lambda_k^{(n)}\right|,\quad m=1,2,\ldots, \tag{114}$$

где $[\alpha]$ — целая часть числа α и K — величина, равномерно ограниченная по m и по n.

Пусть также при $s>0$ и $\nu\ge 1$

$$\mathscr{E}_{\nu,s}(x)=\mathscr{E}_{\nu,s}(f;x)=\sup_{m\ge\nu}\left(\frac{1}{m}\sum_{k=m+1}^{2m}\left|\rho_k(f;x)\right|^s\right)^{1/s}. \tag{115}$$

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Лемма 8. *Пусть $\Lambda\in\Lambda_\gamma$ и $\gamma'=\gamma/(\gamma-1)$. Тогда для любой функции $f\in\in L_\omega(a,b)$ при каждом $q>0$ в каждой точке $x\in(a,b)$, в которой $f(x)<<\infty$, справедлива оценка*

$$R_{n,q}(f;x)\le K\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left|\lambda_k^{(n)}\right|^q\mathscr{E}^q_{k,\gamma',q}(f;x)\right)^{1/q}, \tag{116}$$

где K — величина, равномерно ограниченная по n.

Доказательство. Имеем

$$R^q_{n,q}(f;x)\le\sum_{k=0}^{2}\left|\lambda_k^{(n)}\right|\left|\rho_k(f;x)\right|^q+\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\left|\lambda_k^{(n)}\right|\left|\rho_k(f;x)\right|^q. \tag{117}$$

Ясно, что

$$\sum_{k=0}^{2}\left|\lambda_k^{(n)}\right|\left|\rho_k(f;x)\right|^q\le K\sum_{k=0}^{2}\left|\lambda_k^{(n)}\right|. \tag{118}$$

Применяя неравенство Гельдера и учитывая оценку (114), находим

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\left|\lambda_k^{(n)}\right|\left|\rho_k(f;x)\right|^q\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\left|\lambda_k^{(n)}\right|^\gamma\right)^{1/\gamma}\left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\left|\rho_k(f;x)\right|^{q\gamma'}\right)^{1/\gamma'}\le$$

$$\le K\sum_{i=1}^{\infty}(2^i)^{-1/\gamma'}\sum_{k=2^{i-1}}^{2^i}\left|\lambda_k^{(n)}\right|\left(\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\left|\rho_k(f;x)\right|^{q\gamma'}\right)^{1/\gamma'}\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}}^{2^i}\left|\lambda_k^{(n)}\right|\mathscr{E}^q_{2^i,q\gamma'}(x).$$

Величины $\mathscr{E}_{\nu,s}(x)$ не возрастают по индексу ν, поэтому

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}}\left|\lambda_k^{(n)}\right|\left|\rho_k(f;x)\right|^q\le K\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}}^{2^i}\left|\lambda_k^{(n)}\right|\mathscr{E}^q_{2^i,q\gamma'}(x)\le$$

$$\le K\sum_{i=1}^{\infty}\left|\lambda_k\right|\mathscr{E}^q_{k,q\gamma'}(x). \tag{119}$$

Сопоставляя соотношения (117)–(119), приходим к оценке (116).

Лемма 9. *Пусть система* $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ *и функция* $f(\cdot)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда в каждой точке* $x \in (c, d)$, *в которой система* $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ *имеет* B*-свойство и* $f(x) < \infty$, *выполняется соотношение*

$$\mathscr{E}_{\nu, q_1}(f; x) = K \operatorname*{Sup}_{m \ge \nu} \left(h_{2m,p}^{(\omega)}(f; x; \delta) + \varepsilon_{2m}(x) \right), \tag{120}$$

в котором $q_1 \in (0, q]$, $q \ge 2$, $1/p + 1/q = 1$, $\lim\limits_{m \to \infty} \varepsilon_{2m}(x) = 0$ *и* K — *величина, равномерно ограниченная по* ν.

Доказательство этой леммы вытекает из утверждения теоремы 1 и определения величин $\mathscr{E}_{\nu,s}(f; x)$.

На основании последних двух лемм с учетом соотношения (9) получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\Lambda \in \Lambda_\gamma$ *и* $\gamma' = \gamma/(\gamma - 1)$, *система функций* $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ *и функция* $f(\cdot)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Тогда в каждой точке* $x \in (c, d)$, *в которой система* $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ *имеет* B*-свойство и* $f(x) < \infty$, *выполняется соотношение*

$$R_{n,q_1}^{q_1}(f; x) \le K \sum_{k=0}^{\infty} \left|\lambda_k^{(n)}\right| \left(\operatorname*{Sup}_{m \ge k} \left(h_{2m,s}^{(\omega)}(f; x; \delta) + \varepsilon_{2m}(x) \right) \right)^{q_1}, \tag{121}$$

в котором $s = (\gamma' q)' = \gamma' q / (\gamma' q - 1)$, $q_1 \in (0, q]$, $q \ge 2/\gamma'$ *и* K — *величина, равномерно ограниченная по* n.

Обозначим через Λ'_γ подмножество матриц $\Lambda \subset \Lambda_\gamma$, элементы которых положительны, $\lambda_k^{(n)} \ge 0$, и каждая из них определяет метод суммирования, регулярный в смысле Теплица, что, как известно, равносильно выполнению условий

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} = 1, \quad \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots . \tag{122}$$

Для таких матриц справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\Lambda \subset \Lambda'_\gamma$ *и* $\gamma' = \gamma/(\gamma - 1)$, *система функций* $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ *и функция* $f(\cdot)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и, кроме того, на некотором множестве* $e \subseteq (c, d)$ *система* $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ *имеет свойство* B. *Тогда для любого* $q_1 \in (0, q]$, $q \ge 2/\gamma'$, *в каждой точке* $x \in e \cap H_s^{(\omega)}$, $s = (\gamma' q)'$, *выполняется равенство*

$$\lim_{n \to \infty} R_{n,q_1}(f; x) = 0. \tag{123}$$

Действительно, в рассматриваемом случае

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname*{Sup}_{m \ge k} \left(h_{2m,s}^{(\omega)}(f; x; \delta) + \varepsilon_{2m}(x) \right) = 0$$

и требуемое заключение следует из (121) с учетом соотношений (122).

Как отмечалось, тригонометрическая система удовлетворяет условиям теоремы 3 при всех действительных значениях x. Поэтому справедливо такое утверждение.

***Следствие* 5.** *Пусть* $\Lambda \subset \Lambda'_\gamma$ *и* $\gamma' = \gamma/(\gamma - 1)$. *Тогда для любой функции* $f \in L(0, 2\pi)$ *при любом* $q_1 \in (0, q]$, $q \ge 2/\gamma'$, *в каждой точке* $x \in H_s^{(\omega)}$, $\omega(x) = 1$, $s = (\gamma' q)'$, *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} |f(x) - S_k(f;x)|^{q_1} = 0, \tag{124}$$

где $S_k(f;x)$ *— частная сумма порядка* k *ряда Фурье функции* $f(\cdot)$ *по тригонометрической системе.*

Объединяя утверждения теоремы 3 и леммы 7, получаем такое утверждение.

***Следствие* 6.** *Пусть* $\{P_k(\cdot)\}_\omega$ *— ортонормированная на* $[a,b]$ *с весом* $\omega(\cdot)$ *система алгебраических полиномов, равномерно ограниченных на* $[c,d] \subseteq [a,b]$ *и для каждого* $x \in (c,d)$ $\omega(x) > \omega_0 > 0$. *Пусть, далее,* $f(\cdot)$ *— функция, суммируемая с весом* $\omega(x)$ *на* $[a,b]$ *и на множестве* $[a,b]\setminus[c,d]$ *суммируем ее квадрат с весом* $\omega(\cdot)$. *Тогда если* $\Lambda \subset \Lambda'_\gamma$ *и* $\gamma' = \gamma/(\gamma-1)$, *то для любого* $q_1 \in (0,q]$, $q \geq 2/\gamma'$, *в каждой точке* $x \in (c,d) \cap H_s^{(\omega)}$, $s = (\gamma' q)'$, *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} |f(x) - S_k(f;x)|^{q_1} = 0, \tag{125}$$

где $S_k(f;x)$ *— частная сумма порядка* k *ряда Фурье функции* $f(\cdot)$ *по системе* $\{P_k(\cdot)\}_\omega$.

Каждой функции $f \in L_\omega(a,b)$ с помощью матрицы $\Lambda = \{\lambda_k^{(n)}\}$, $k, n = 0, 1, \dots$, сопоставим последовательность линейных средних частных сумм $S_k(f;x)$ ее ряда Фурье по системе $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$:

$$U_n(f;x) = U_n(f;x;\Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} S_k(f;x). \tag{126}$$

Тогда

$$|f(x) - U_n(f;x)| \leq |f(x)| \left| 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \right| + \sum_{k=0}^{\infty} \left|\lambda_k^{(n)}\right| |f(x) - S_k(f;x)| =$$

$$= |f(x)| \left| 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} \right| + \sum_{k=0}^{\infty} \left|\lambda_k^{(n)}\right| |\rho_k(f;x)|.$$

Поэтому на основании теоремы 3 получаем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть при некотором* $\gamma \in (1,2]$ $\Lambda \subset \Lambda'_\gamma$ *и система функций* $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ *и функция* $f(\cdot)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 3. *Тогда для любого* $x \in e \cap H_\gamma^{(\omega)}$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - U_n(f;x;\Lambda)| = 0. \tag{127}$$

Из этой теоремы для тригонометрической системы и системы алгебраических полиномов выводятся следующие факты.

***Следствие* 7.** *Пусть при некотором* $\gamma \in (1,2]$ $\Lambda \subset \Lambda'_\gamma$. *Тогда для любой функции* $f \in L(0,2\pi)$ *в каждой точке* $x \in H_\gamma^{(\omega)}$ *при* $\omega(x) \equiv 1$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} S_k(f;x) \right| = 0, \tag{128}$$

где $S_k(f;x)$ — *частная сумма порядка* k *ряда Фурье функции* $f(\cdot)$ *по тригонометрической системе.*

Следствие 8. *Пусть система полиномов* $\{P_k(\cdot)\}_\omega$ *и функция* $f(\cdot)$ *удовлетворяют условиям следствия* 6. *Тогда если при некотором* $\gamma \in (1,2]$ $\Lambda \subset \Lambda'_\gamma$, *то в каждой точке* $x \in (c,d) \bigcap H_\gamma^{(\omega)}$ *выполняется равенство*

$$\lim_{n\to\infty} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{(n)} S_k(f;x) \right| = 0, \tag{129}$$

в котором $S_k(f;x)$ — *частная сумма порядка* k *ряда Фурье функции* $f(\cdot)$ *по системе* $\{P_k(\cdot)\}_\omega$.

Заметим, что множеству Λ'_γ принадлежат, в частности, матрицы, элементы $\lambda_k^{(n)}$ которых положительны и убывают по индексу k.

Такими, к примеру, есть матрицы, определяющие методы Чезаро (C,α) при $\alpha > 0$, метод Абеля – Пуассона, метод Валле Пуссена, логарифмический метод и др.

Теорема 4 и следствия 7 и 8 доставляют достаточные условия сходимости в $h_p^{(\omega)}$-точках функции $f \in L_\omega(a,b)$ выражений вида (126), представляющих собой линейные средние частных сумм $S_n(f;x)$. Пользуясь теоремой 1, можно сформулировать также ряд утверждений, касающихся сходимости непосредственно самих линейных средних рядов Фурье по системам $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$.

Каждой функции $f \in L_\omega(a,b)$ с помощью треугольной матрицы чисел $\Lambda = \{\alpha_k^{(n)}\}$, $\alpha^{(n)} \equiv 1$, $k, n = 0, 1, \ldots$, $\alpha_k^{(n)} \equiv 1$, $k > n$, по ее ряду Фурье (1) поставим в соответствие последовательность его линейных средних

$$A_n(f;x) = A_n(f;x;\Lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^{(n)} c_k \varphi_k(x). \tag{130}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть система* $\{\varphi_k(\cdot)\}_\omega$ *и функция* $f(\cdot)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и, кроме того, на некотором множестве* $e \subseteq (c,d)$ *данная система имеет свойство* B. *Пусть, далее, элементы* $\alpha_k^{(n)}$ *матрицы* A *при некотором* $p \in (1,2]$ *подчинены условию*

$$\left(h^{p-1} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \Delta \alpha_k^{(n)} \right|^p \right)^{1/p} < K, \tag{131}$$

где

$$\Delta \alpha_k^{(n)} = \alpha_k^{(n)} - \alpha_{k+1}^{(n)}$$

и K — *величина, равномерно ограниченная по* n.

Тогда в каждой точке $x \in e$, *в которой* $f(x) < \infty$, *для любого* $\delta > 0$, *входящего в определение* B*-свойства точки* x, *выполняется неравенство*

$$|f(x) - A_n(f;x)| \le K\, h_{n,p}^{(\omega)}(f;x;\delta) + \varepsilon_n(x), \tag{132}$$

где $\varepsilon_n(x) \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и в каждой точке* $x \in e \bigcap H_\gamma^{(\omega)}$ *справедливо равенство*

$$\lim_{n \to \infty} A_n(f; x) = f(x). \tag{133}$$

Доказательство. Применяя преобразование Абеля, имеем

$$f(x) - A_n(f; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta \alpha_k^{(n)} \rho_k(f; x).$$

Поэтому в силу неравенства Гельдера и оценки (131) получаем

$$|f(x) - A_n(f; x)| \le \left(\sum_{k=0}^{n} \left|\Delta \alpha_k^{(n)}\right|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=0}^{n} |\rho_k(f; x)|^q \right)^{1/q} \le$$

$$\le K \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} |\rho_k(f; x)|^q \right)^{1/q}, \quad 1/p + 1/q = 1. \tag{134}$$

Если $x \in e$, то в силу теоремы 1 из (134) следуют (132), откуда при условии, что $x \in e \bigcap H_p^{(\omega)}$, убеждаемся в справедливости равенства (133).

Условие (131) при $p = 2$ впервые использовал и исследовал Г. А. Фомин [21] в связи с оценками констант Лебега линейных методов суммирования рядов Фурье. Позже С. Б. Стечкин [22, с. 338] в той же связи рассматривал случай $p \in (0, 2]$. Этому условию удовлетворяет широкий спектр матриц, порождающих линейные методы суммирования и, в частности, матрицы, порождающие классические методы.

Поэтому из теоремы 5 вытекают утверждения для тригонометрической системы и систем ортогональных алгебраических многочленов, повторяющие и дополняющие соответствующие результаты многих авторов (см., например, [23–28]).

18. *Осиленкер Б. П.* О линейных методах суммирования разложений функций классов L_μ^p $(1 \le p \le \infty)$ по ортонормированным системам полиномиального вида // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1968. – **32**, № 4. – С. 756–771.
19. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
20. *Ласурия Р. А.* О характеристике точек степенной сильной суммируемости ортогональных разложений по общим полиномиальным системам. – Киев, 1994. – 44 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 94.14).
21. *Фомин Г. А.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Мат. сб. – 1964. – **65**, № 1. – С. 144–152.
22. *Фомин Г. А.* О линейных методах суммирования рядов Фурье, подобных методу Бернштейна – Рогозинского // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1967. – **31**. – С. 335–348.
23. *Ефимов А. В.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Там же. – 1960. – **24**. – С. 743–756.
24. *Никольский С. М.* О линейных методах суммирования рядов Фурье // Там же. – 1948. – **12**. – С. 259–278.
25. *Теляковский С. А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов Фурье // Там же. – 1964. – **28**. – С. 1209–1236.
26. *Nagy B. Cz.* Méthodes de sommation des séries de Fourier. 1 // Acta Sci. Math. Szeged. – 1950. – **12**. – Pars B. – P. 204–210.
27. *Кальней С. Г.* Некоторые вопросы суммирования рядов Фурье: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – М., 1977. – 118 с.
28. *Осиленкер Б. П.* Ряды Фурье по ортогональным полиномам: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Харьков, 1994. – 285 с.

Получено 16.01.95