УДК 519.21

А. А. Дороговцев

Расширенный стохастический интеграл для гладких функционалов от белого шума

1. Введение. В настоящей статье определения стохастической производной и расширенного стохастического интеграла [1] распространяются на случайные элементы, не имеющие конечного второго момента нормы. Как и в случае интеграла Ито, естественно рассматривать замыкание стохастического интеграла относительно сходимости более слабой, чем сходимость в среднем квадратическом. Сходимость по вероятности использовать не удается, так как расширенный стохастический интеграл включает в себя оператор дифференцирования, который не допускает замыкания относительно сходимости по вероятности. Поэтому в статье используется сходимость в среднем квадратическом на специальных подмножествах вероятностного пространства, допускающих применение формулы интегрирования по частям [2]. Введенное определение стохастической производной позволяет сформулировать теорему о производной суперпозиции при более естественных ограничениях, чем в [3].

2. Вспомогательные определения и утверждедения. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$. Обозначим через ξ обобщенный гауссовский случайный элемент в H с нулевым средним и единичным корреляционным оператором [1], заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. В дальнейшем считаем, что $\mathcal{F} = \sigma(\xi)$.

В такой ситуации в [1] определены расширенный стохастический интеграл и стохастическая производная. Здесь мы кратко приведем эти определения, необходимые в дальнейшем. Пусть при каждом $k \geqslant 1$ H_k — пространство k-линейных симметричных по всем аргументам форм Гильберта — Шмидта над H. При $k = 0$ естественно считать $H_0 = \mathbb{R}$. Существует единственная изометрия J, отображающая пространство Фока $\bigoplus_{k=0}^{\infty} \sqrt{k!} \cdot H_k$ на $L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, при которой образом любой конечномерной формы из H_k является полином степени k от случайных величин $\{(\xi, \varphi); \varphi \in L\}$ (L — конечномерное подпространство соответствующее форме). Результат применения J к вектору $(0, 0, \ldots, 0, \sqrt{k!} \cdot A_k, 0, \ldots)$, $A_k \in H_k$, называется значением полилинейной формы A_k на обобщенном случайном элементе ξ и обозначается $A_k(\xi, \ldots, \xi)$. Итак, случайная величина α или случайный элемент x в H такие, что α, $\| x \| \in L_2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ допускают единственным образом следующее представление:

$$\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(\xi, \ldots, \xi),$$

$$(x; \varphi) = \sum_{k=}^{\infty} B_k(\varphi, \xi, \ldots, \xi), \quad \varphi \in H,$$

где при $k \geqslant 0$ $A_k \in H_k$, B_k — $k+1$-линейная форма Гильберта — Шмидта, симметричная по последним k аргументам.

Определение 1 [1]. *Случайная величина α (случайный элемент x) является стохастически дифференцируемой, если ряд $\sum_{k=0}^{\infty} kA_k(\varphi, \xi, \ldots, \xi)$ (соответственно*

$$\sum_{k=0}^{\infty} kB_k(\varphi, \psi, \xi, \ldots, \xi))$$

сходится для всех $\varphi \in H$, $\varphi, \psi \in H$, в среднем квадратическом и определяет случайную 1-линейную (2-линейную) форму Гильберта—Шмидта на H с конечным вторым моментом нормы. Соответствующий случайный элемент в H (1-линейная форма) или 2-линейная форма называется стохастической производной случайной величины α или случайного элемента x.

Обозначим при каждом $k \geqslant 0$ через ΛB_k симметризацию формы B_k по всем $k+1$ аргументам.

Определение 2 [1]. *Если ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Lambda B_k(\xi, \ldots, \xi)$$

сходится в среднем квадратическом, то случайный элемент x называется стохастически интегрируемым, а сумма ряда — расширенным стохастическим интегралом от x.

Введем следующие обозначения: H^2 — тензорное произведение $H \oplus H$; D_0 — совокупность всех тех случайных элементов в H, для которых в [1] определен расширенный стохастический интеграл; для $x \in D_0$ $\langle x; \xi \rangle$ — значение расширенного стохастического интеграла от x; W^1 ($W^1(H)$) — совокупность всех случайных величин (элементов в H), имеющих стохастическую производную; для $\alpha \in W^1(W^1(H))$ $D\alpha$ — стохастическая производная α; $W_b^1 := W^1 \cap L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$; для $A \in \mathcal{F}$ $L_2(A)$ — пространство функций, определенных на A, измеримых относительно $\mathcal{F}$ и интегрируемых с квадратом по мере P; для $A \in \mathcal{F}$, $\eta \in L_0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ $\eta/_A$ — сужение η на множество A; $C^{1,b}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций, имеющих ограниченную производную и действующих из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$.

Согласно [3] имеют место следующие факты:

I) $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in W_b^1 : \alpha_1 \cdot \alpha_2 \in W_b^1$, $D(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = \alpha_1 \cdot D\alpha_2 + \alpha_2 \cdot D\alpha_1$;

II) $\forall \alpha \in W^1$, $\forall \varphi \in C^{1,b}$ $\varphi(\alpha) \in W^1$, $D\varphi(\alpha) = \varphi'(\alpha) \cdot D\alpha$.

Определение 3. *$A \in \mathcal{F}$ называется гладким открытым множеством, если существуют $\alpha \in W^1$ и G — открытое подмножество $\mathbb{R}$ такие, что $A = \alpha^{-1}(G)$.*

Совокупность всех гладких открытых множеств обозначим через $\mathcal{E}$.

Лемма 1. *Пусть $A \in \mathcal{E}$. Тогда существует $\beta \in W_b^1$ такая, что* 1) $0 \leqslant \beta \leqslant 1 \pmod P$; 2) $\{\beta > 0\} = A$.

Любая случайная величина, удовлетворяющая условиям леммы 1, называется канонически соответствующей A.

Лемма 2. *Пусть $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathcal{E}$. Тогда* $\bigcap_{k=1}^{n} A_k, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{E}$.

Определение 4. *Множество $B \in \mathcal{F}$ называется вложенным в множество $A \in \mathcal{E}$, если существуют случайная величина β, канонически соответствующая A, и число $c > 0$ такие, что $B \subset \{\beta > c\}$.*

Тот факт, что B вложено в A, в дальнейшем обозначается $B \Subset A$.

Лемма 3. *Пусть $A \in \mathcal{E}$, $\alpha \in W_b^1$ и $\{|\alpha| > 0\} \Subset A$. Тогда*

$$D\alpha \cdot (1 - \chi_A) = 0 \pmod P.$$

Обозначим через $W_{b,0}^1(A)$ совокупность всех случайных величин, удовлетворяющих условию леммы 3.

Лемма 4. *$W_{b,0}^1(A)$ плотно в $L_2(A)$.*

Теорема 1. *Пусть $\eta \in \mathcal{D}_0$ и $A \in \mathcal{E}$ таковы, что $\eta \cdot \chi_A = 0 \pmod P$. Тогда $\langle \eta;\ \xi \rangle \cdot \chi_A = 0 \pmod P$.*

3. Основные определения и теоремы.

Определение 5. *Случайная величина x называется обобщенно стохастически дифференцируемой, если существует последовательность $\{A_n;\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{E}$, удовлетворяющая условиям*

1) $\forall n \geqslant 1 : A_n \Subset A_{n+1}$;

2) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega \pmod P$;

3) $\forall n \geqslant 1 : \exists\ \{x_{nk};\ k \geqslant 1\} \subset W_b^1$; $\int_A (x_{nk} - x)^2\, dP \to 0$, $k \to \infty$, $\{Dx_{nk}|_{A_n};$ $k \geqslant 1\}$ — *фундаментальная последовательность в $L_2(A_n, H)$.*

Совокупность всех обобщенно дифференцируемых случайных величин обозначим через $\tilde{W}^1$.

Лемма 5. *Всякой случайной величине $x \in \tilde{W}^1$ соответствует единственный случайный элемент z в H такой, что при любом выборе последовательностей $\{A_n;\ n \geqslant 1\}$ и $\{x_{nk};\ k \geqslant 1,\ n \geqslant 1\}$, удовлетворяющих определению 5,*

$$Dx_{nk}|_{A_n} \to z|_{A_n},\ k \to \infty \text{ в } L_2(A_n, H).$$

Случайный элемент z называется обобщенной стохастической производной $x \in \tilde{W}^1$ и обозначается по-прежнему Dx.

Лемма 6. *Пусть $x \in \tilde{W}^1$, G — открытое множество в $\mathbb{R}$. Тогда $x^{-1}(G) \in \mathcal{E}$.*

Теорема 2. *Пусть $F \in C^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$, $x_1, \ldots, x_m \in \tilde{W}^1$. Тогда $F(x_1, \ldots, x_m) \in \tilde{W}^1$ и*

$$DF(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_m) \cdot Dx_i.$$

Следствие. *D — линейный оператор на $\tilde{W}^1$.*

Определение 6. *Случайный элемент x в H называется стохастически интегрируемым, если существуют последовательности $\{x_n;\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{D}_0$ и $\{A_n;\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{E}$ такие, что*

1) $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega \pmod P$;

2) $\forall n \geqslant 1 : A_n \subset A_{n+1}$;

3) $(x_n - x_{n+1})\, \chi_{A_n} = 0 \pmod P$.

Совокупность всех интегрируемых случайных элементов обозначим через $\mathcal{D}$. Из теоремы 1 получаем следующее утверждение.

Лемма 7. *Для всякого $x \in \mathcal{D}$ существует единственная случайная величина α такая, что любые последовательности $\{x_n;\ n \geqslant 1\} \subset D_0$, $\{A_n;\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{E}$ из определения 5 удовлетворяют соотношениям*

$$\forall n \geqslant 1 : \langle x_n; \xi \rangle |_{A_n} = \alpha.$$

Случайную величину α назовем стохастическим интегралом от x и обозначим $\langle x; \xi \rangle$.

Отметим, что $D_0 \subset D$ и соответствие $\mathcal{D} \ni x \mapsto \langle x; \xi \rangle$ — линейный оператор. В работе [1] доказано, что достаточным условием существования стохастического интеграла от $x \in L_2(\Omega, P, H)$ является существование стохастической производной Dx. Обобщенная стохастическая производная для случайных элементов в H определяется так же, как в определении 5 для случайных величин с заменой пространств $L_2(A_n)$ и $L_2(A_n, H)$ на $L_2(A_n, H)$ и $L_2(A_n, H^2)$ соответственно. Совокупность всех обобщенно дифференцируемых случайных элементов обозначим через $\widetilde{W}^1(H)$. Можно показать что имеет место аналог теоремы 2 о производной суперпозиции.

Теорема 3. $\widetilde{W}^1(H) \subset D$.

4. Примеры. Пример 1. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — непересекающиеся множества из $\mathcal{E}$ такие, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \Omega \pmod P$, $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{A_k} \in \widetilde{W}^1, \quad D\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \cdot \chi_{A_k}\right) = 0.$$

Пример 2. Пусть для случайного элемента x в H существует случайная величина $\alpha \in W_b^1$ такая, что

1) $\alpha > 0 \pmod P$;
2) $\| D\alpha \| \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$;
3) $\alpha \cdot x \in \mathcal{D}_0$.

Тогда $x \in \mathcal{D}$ и $\langle x; \xi \rangle = \dfrac{1}{\alpha} \langle \alpha x; \xi \rangle - \dfrac{1}{\alpha} (x; D\alpha)$.

Пример 3 (аналог двустороннего интеграла Парду—Проттера [4]). Пусть $\{w(t);\ t \in [0; 1]\}$ — винеровский процесс на $[0; 1]$. Обозначим через X_u и Y^u, $u \in [0; 1]$, решения прямого и обратного уравнений Ито:

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(X_s)\, dw(s),$$

$$Y^t = y + \int_t^1 c(Y^s)\, ds + \int_t^1 \gamma(Y^s)\, dw(s),$$

$x, y \in \mathbb{R}$, функции b, c, σ, $\gamma \in C^2(\mathbb{R})$ и имеют ограниченные производные. Пусть Φ: $L_2([0; 1]) \times L_2([0; 1]) \to L_2([0; 1])$ — непрерывно дифференцируемая функция. Тогда $\Phi(X_\cdot, Y^\cdot) \in \widetilde{W}^1(L_2([0; 1]))$. Следовательно, существует стохастический интеграл

$$\int_0^1 \Phi(X_\cdot, Y^\cdot)(t)\, dw(t).$$

Пример 4. Обозначим через $L_{2,\mathrm{loc}}$ пространство случайных величин таких, что $\forall \alpha \in L_{2,\mathrm{loc}}\ \exists \{A_n;\ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{E}$:

1) $\forall n \geqslant 1 : A_n \Subset A_{n+1}$;
2) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega \pmod P$;
3) $\forall n \geqslant 1 : \alpha |_{A_n} \in L_2(A_n)$.

Пусть $\{w(t);\ t\in[0;1]\}$ — винеровский процесс,

$$f=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k\cdot\chi_{[t_k;t_{k+1})}$$

— случайная ступенчатая функция, согласованная с потоком σ-алгебр, порожденным w. Если $\forall k=0,\ \ldots,\ m-1:\alpha_k\in L_{2,\mathrm{loc}}$, то $f\in D$ и

$$\langle f;\xi\rangle=\sum_{k=0}^{m-1}\alpha_k\,(w(t_{k+1})-w(t_k)).$$

5. Доказательства. Доказательство леммы 1. Пусть $\alpha\in W^1$ и открытое подмножество $G\subset\mathbb{R}$ таковы, что $A=\alpha^{-1}(G)$. Для G существует $\varphi\in C^{1,b}$, удовлетворяющая соотношениям

1) $\forall t\in\mathbb{R}:\varphi(t)\in[0;1]$;
2) $\{t:\varphi(t)>0\}=G$;
3) $\forall t\in\partial G:\varphi'(t)=0$.

Согласно II случайная величина $\beta=\varphi(\alpha)$ удовлетворяет требованиям леммы 1.

Доказательство леммы 2. Пусть $\{\beta_n;\ n\geqslant 1\}$ — последовательность случайных величин, канонически соответствующих множествам $\{A_n;\ n\geqslant 1\}$. Выберем положительные числа $\{a_n;\ n\geqslant 1\}$ так, чтобы

$$\forall n\geqslant 1:\max\{a_n;\ a_n\cdot\|D\beta_n\|^2\}<\frac{1}{4^n}.$$

Тогда случайные величины $\beta_1\ldots\beta_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\beta_n$ канонически соответствуют множествам $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$. Лемма 2 доказана.

Доказательство леммы 3. Нетрудно проверить, что существует случайная величина β, канонически соответствующая A и такая, что

$$\{|\alpha|>0\}\subset\{\beta=1\}\cap\{D\beta=0\}.$$

Тогда

$$D\alpha=D(\alpha\beta)=\beta\cdot D\alpha+\alpha\cdot D\beta=\beta D\alpha.$$

Следовательно,

$$D\alpha\,(1-\chi_A)=0\pmod P.$$

Лемма 3 доказана.

Доказательство леммы 4. Пусть β — случайная величина, канонически соответствующая A. Рассмотрим последовательность случайных величин $\{\beta_n;\ n\geqslant 1\}\subset W_b^1$, удовлетворяющую условиям

1) $\forall n\geqslant 1:1\geqslant\beta_n\geqslant 0\pmod P$;
2) $\forall n\geqslant 1:\{\beta_n=1\}\supset\left\{\beta>\dfrac{1}{n}\right\}$;

$$\{\beta_n=0\}\supset\left\{\beta\leqslant\frac{1}{n+1}\right\}.$$

Тогда

$$\forall x\in L_2(A):\int\limits_A(x-\beta_nx)^2\,dP\to 0,\quad n\to\infty.$$

Пусть теперь произвольная $y\in L_2(A)$ фиксирована. Тогда существует последовательность случайных величин $\{\alpha_m;\ m\geqslant 1\}\subset W_b^1$ такая, что

$$\int\limits_A(y-\alpha_m)^2\,dP\to 0,\quad m\to\infty.$$

Этот факт следует из плотности W_b^1 в $L_2(\Omega. \mathcal{F}, P)$. Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, m, \ n \geqslant 1 : \int\limits_A (y - \alpha_m \beta_n)^2 \, dP < \varepsilon.$$

Так как

$$\forall m, \ n \geqslant 1 : \alpha_m \cdot \beta_n \in W_{b,0}^1 (A),$$

то лемма 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Для всякой случайной величины $\alpha \in W_{b,0}^1 (A)$ справедливо равенство [2]

$$M (D\alpha; \eta) = M \langle \eta; \xi \rangle \cdot \alpha.$$

Согласно лемме 3 и условию теоремы 1

$$M (D\alpha; \ \eta) = 0.$$

Теперь утверждение теоремы 1 следует из леммы 4.

Для доказательства леммы 5 достаточно заметить, что аналогично утверждению леммы 4 пространство $W_{b,0}^1 (A, H)$ плотно в $L_2 (A, H)$, и воспользоваться формулой интегрирования по частям. Здесь

$$W_{b,0}^1 (A, H) := W_b^1 (H) \cap \{x : \{\| x \| > 0\} \Subset A\}.$$

Доказательство леммы 6. Пусть $\{A_n; \ n \geqslant 1\} \subset \mathcal{E}$ — последовательность гладких открытых множеств из определения 3, $\{x_{nk}; k \geqslant 1, \ n \geqslant 1\} \subset W_b^1$ — соответствующие последовательности случайных величин. Выберем функцию $\varphi \in C^{1,b}$, которая связана с множеством G так же, как при доказательстве леммы 1, и имеет непрерывную ограниченную вторую производную. Легко видеть, что $\varphi (x)$ будет удовлетворять условию определения 5 со множествами $\{A_n; \ n \geqslant 1\}$ и последовательностями случайных величин $\{\varphi (x_{nk}); \ k \geqslant 1, \ n \geqslant 1\}$. При этом $D\varphi (x) = \varphi' (x) Dx$. Теперь $x^{-1} (G) = \{y > 0\}$, где $y = \varphi (x)$. Пусть при каждом $n \geqslant 1$ последовательность случайных величин $\{\beta_{nm}; \ m \geqslant 1\}$ построена по A_n так, как при доказательстве леммы 4. Тогда

$$\forall n, \ m \geqslant 1 : \beta_{nm} \cdot y \in W^1.$$

Следовательно, $\{\beta_{nm} y > 0\} \in \mathcal{E}$. Так как

$$\{y > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{y > 0\} \cap A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \{\beta_{nm} y > 0\},$$

то из леммы 2 следует утверждение леммы 6.

Доказательство теоремы 2. По функции F построим последовательность финитных непрерывно дифференцируемых функций $\{\varphi_n; \ n \geqslant 1\}$, действующих из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}$, такую, что

$$\forall n \geqslant 1 : G_n = \operatorname{Int} (F = \varphi_n) \subset G_{n+1} = \operatorname{Int} (F = \varphi_{n+1}), \ \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = \mathbb{R}^m.$$

Поскольку $x_1, \ldots, x_m \in \widetilde{W}^1$, то существуют последовательность $\{A_l; \ l \geqslant 1\} \subset \mathcal{E}$ и последовательности $\{z_{lk}^i; \ k \geqslant 1, \ l \geqslant 1, \ i = 1, \ldots, m\} \subset W_b^1$ такие, что набор $\{A_l; \ l \geqslant 1\}$, $\{z_{lk}^i; \ k \geqslant 1, \ l \geqslant 1\}$ удовлетворяет требованиям определения 5 для x_i при каждом $i = 1, \ldots, m$. При фиксированных $n, \ l, \ k \geqslant 1$ случайная величина $\varphi_n (z_{lk}^1, \ldots, z_{lk}^m)$ имеет согласно [3] стохастическую производную

$$D\varphi_n (z_{lk}^1, \ldots, z_{lk}^m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} (z_{lk}^1, \ldots, z_{lk}^m) \cdot Dz_{lk}^i.$$

Выберем теперь при фиксированном l подпоследовательность $\{k(s); \ s \geqslant 1\}$

так, что

$$z^i_{lk(s)}|_{A_l} \to x^i|_{A_l}, \quad s \to \infty \ (\operatorname{mod} P), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Тогда

$$\int\limits_{A_l} \Big(D\varphi_n (z^1_{lk(s)}, \ldots, z^m_{lk(s)}) - \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} (x_1, \ldots, x_m) \cdot Dx_i\Big)^2 \, dP \to 0, \ s \to \infty.$$

Обозначим $\forall n \geqslant 1 : B_n = (x_1, \ldots, x_m)^{-1}(G_n)$. Согласно лемме 6 $\forall n \geqslant 1 : B_n \in \mathscr{E}$, $A_n \cap B_n \in \mathscr{E}$. При этом $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \cap B_n) = \Omega \ (\operatorname{mod} P)$. Так как на $A_n \cap B_n$

$$\varphi_n (x_1, \ldots, x_m) = F (x_1, \ldots, x_m),$$

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} (x_1, \ldots, x_m) = \frac{\partial F}{\partial x_i} (x_1, \ldots, x_m), \quad i = 1, \ldots, m,$$

то $F (x_1, \ldots, x_m) \in \widetilde{W}^1$ и $DF (x_1, \ldots, x_m) = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial F}{\partial x_i} (x_1, \ldots, x_m) \cdot Dx_i$. Теорема 2 доказана.

Доказательство леммы 7 следует из теоремы 1.

Доказательство теоремы 3. Пусть $x \in \widetilde{W}^1(H)$, $\{A_n; n \geqslant 1\}$ — соответствующая последовательность гладких открытых множеств. Рассмотрим множества $A_n' = A_n \cap \{\|x\| < n\} \in \mathscr{E}$, $n \geqslant 1$. Аналогично доказательству леммы 6 можно показать, что

$$\forall \beta \in W^1_{b,0}(A_n') : \beta x \in W^1(H) \subset \mathscr{D}_0.$$

Выбирая теперь подходящим образом последовательность случайных элементов $\{\beta_n x; n \geqslant 1\}$, убеждаемся в справедливости теоремы 3.

Доказательство утверждения примера 2. По случайной величине α можно построить последовательность случайных величин $\{\beta_n = \varphi_n(\alpha), \ \varphi_n \in C^{1,b}; \ n \geqslant 1\}$ такую, что

1) $\beta_n = \frac{1}{\alpha}$ при $\alpha > \frac{1}{n}$; $n \geqslant 1$;

2) $n + 1 \geqslant \beta_n > 0 \ (\operatorname{mod} P)$, $n \geqslant 1$;

3) $\beta_n \in W^1$, $\|D\beta_n\| \in L_\infty(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

Рассматривая последовательность $\{\beta_n \alpha x; n \geqslant 1\}$, получаем $x \in \mathscr{D}$. Кроме того, при каждом $n \geqslant 1$ с помощью формулы интегрирования по частям получаем

$$\langle \beta_n \alpha x; \xi \rangle = \beta_n \langle \alpha x; \xi \rangle + (\alpha x; D\beta_n).$$

На множестве $\left\{\alpha > \frac{1}{n}\right\} \in \mathscr{E} : D\beta_n = -\frac{1}{\alpha^2} D\alpha$. Следовательно,

$$\langle x; \xi \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle \beta_n \alpha x; \xi \rangle = \frac{1}{\alpha} \langle \alpha x; \xi \rangle - \frac{1}{\alpha} (x; D\alpha) \quad (\operatorname{mod} P).$$

1. *Скороход А. В.* Об одном обобщении стохастического интеграла // Теория вероятностей и применения.— 1975.— **20**, вып. 2.— С. 223—237.
2. *Далецкий Ю. Л., Фомин С. В.* Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.— М. : Наука, 1983.— 348 с.
3. *Sekiguchi T., Shiola Y.* L_2-theory of noncausal stochastic integrals // Math. Repts Toyama Univ.— 1985.— **8**.— P. 119—195.
4. *Pardoux E., Protter P.* A two-sided stochastic integrals and its calculus // Probab. Theory and Related Fields.— 1988.— **78**.— P. 535—581.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 07.05.88