УДК 517.5,513.8

П. М. Тамразов

Продолжение функций до плюрисубгармонических в топологическом векторном пространстве

1. Введение. Настоящая работа завершает доказательство теорем 4 и 5 из [1, 2] о стирании особенностей функций в топологическом векторном пространстве. В [2] эти теоремы доказаны при введенных после их формулировок дополнительных предположениях — условиях 1 и 2. Сформулированная в [2] лемма 3, доказанная там лишь частично, утверждает, что указанные условия 1 и 2 в ситуациях теорем 4 и 5 выполняются автоматически (выполнимость условия 1 применительно к теореме 4 очевидна). Ниже мы докажем оставшуюся (самую существенную) часть упомянутой леммы 3 из [2] и завершим доказательство теорем 4 и 5 из [1, 2] в полном объеме (без постулирования условий 1 и 2). Заметим, что случай бесконечномерного пространства оказался значительно сложнее конечномерного случая — теоремы 5_n из [1, 2], доказательство которой в основной своей части, выраженной в виде леммы 2 и связанных с нею рассуждений из [1, 2], не применимо к бесконечномерной ситуации. Приводимое ниже доказательство для общих топологических пространств основано на принципиально иных идеях по сравнению с полностью проведенным в [1, 2] доказательством конечномерной теоремы 5_n. План работы следующий. Формулируется лемма A и с ее помощью завершается доказательство теоремы 4 из [1, 2]; затем формулируется лемма B и на ее основании утверждение теоремы 5 сводится к теореме 4. Тем самым указанные теоремы (а попутно и лемма 3 из [2]) оказываются сведенными к леммам A и B. Далее приводятся доказательства лемм A и B.

Определения основных понятий, используемых ниже, даны в [1, 2].

Пусть X — комплексное векторное отделимое топологическое пространство, D — открытое подмножество X, E — произвольное локально X-полярное подмножество множества D, $u : D\setminus E \to [-\infty, +\infty)$ — полунепрерывная сверху функция. В теоремах 4 и 5 из [1, 2] при некоторых условиях устанавливается продолжимость функции u на множество E таким образом, что продолженная функция оказывается плюрисубгармонической в D. При этом условия теорем таковы, что множество E не предполагается относительно замкнутым в D, а на функцию u в $D\setminus E$ налагаются условия, которые в случае относительно замкнутого E превращаются в ослабленное условие плюрисубгармоничности в $D\setminus E$.

Одна из характерных черт теорем работ [1, 2] состоит в том, что контроль за возможной неограниченностью сверху функции u в окрестности каждой точки $c \in E$ задается в терминах сумм вида $u + \varepsilon v$, где $\varepsilon > 0$ — параметр, а v — функция, плюрисубгармоническая в некоторой окрестности точки c. Более жесткие ограничения в терминах сумм указанного вида ранее были предложены в [3] (конечномерный случай) и использованы в [4] (бесконечномерный случай). Но, как отмечено в [1, 2], соответствующие утверждения о стирании особенностей, сформулированные в терминах указанных сумм в работах [3, 4], по существу в них не были доказаны. С другой стороны, эти утверждения являются частными случаями теорем из [1, 2], и потому настоящая работа попутно впервые завершает обоснование теоремы 3.1 из [4] (а для утверждений, сформулированных в [3] в виде предложения 7 и теоремы 2, это сделано в работах [1, 2]).

Контроль за возможным ростом сверху функции u, задаваемый в терминах верхних оценок сумм $u + \varepsilon v$ при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ с неравномерной по ε и неограниченной с обеих сторон мажорантой, является существенным расширением постановки задачи по сравнению с требованием, которое применительно к евклидову пространству $\mathbb{R}^n$ имеет вид

$$u(x) \leqslant o(k_n(|x - c|)), \quad x \to c, \quad x \neq c, \tag{1}$$

где k_n — классическое ядро для $\mathbb{R}^n$ [1, 2]. Это расширение идет сразу в нескольких направлениях. Во-первых, вместо *изолированной* неограниченности сверху функции u, предписываемой условием (1), условие в терминах сумм $u + \varepsilon v$ априори допускает неизолированную («размазанную по множеству E») неограниченность сверху функции u. Во-вторых, вместо участвующего в (1) ядра k_n, являющегося конкретной и весьма «правильной» функцией, для контроля за возможной вблизи E неограниченностью сверху функции u в условиях на суммы $u + \varepsilon v$ участвует *любая* субгармоническая или плюрисубгармоническая функция v (от которой не требуется никакой «правильности»). В-третьих, условие (1) не имеет адекватного аналога в бесконечномерном пространстве, поскольку в последнем нет характерного ядра, и в то же время условие в терминах сумм $u + \varepsilon v$ осмысленно и в бесконечномерном случае. Если пространство X нормировано, то этим суммам разрешается в определенной мере быть неограниченными сверху вблизи E при каждом $\varepsilon > 0$.

Отметим, что методом, приведшим в [1, 2] к полному решению в конечномерном случае, бесконечномерную задачу не удалось решить даже в случае изолированной особенности функции u (когда последняя не предполагается ограниченной сверху вблизи особой точки). Таким образом, даже в этом частном случае бесконечномерная задача значительно труднее конечномерной.

2. Лемма A и завершение доказательства теоремы 4 из [1, 2]. Пусть X — комплексное векторное отделимое топологическое пространство.

Лемма A. *Пусть M — область в X, v — плюрисубгармоническая в M функция, $v \not\equiv -\infty$ в M, $V := \{x \in M : v(x) = -\infty\}$, при каждом фиксированном $\varepsilon \in (0, 1]$ задана плюрисубгармоническая в M функция w_ε такая, что на $M \setminus V$ верно $w_\varepsilon = w_1 - (1 - \varepsilon) v$, а функция $w_0 : M \to [-\infty, +\infty]$, определяемая формулой $w_0(x) := \overline{\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}} w_\varepsilon(x)$, в окрестности каждой точки $x \in M \setminus V$ ограничена сверху. Тогда w_0 локально ограничена сверху в M (и в M существует поточечный предел $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} w_\varepsilon$).*

С помощью этой леммы завершим доказательство теоремы 4 из [1, 2]. В [2] показано, что для этого достаточно установить справедливость условия 2 этой работы (применительно к теореме 4), ибо условие 1 этой работы в данном случае заведомо выполнено. Пусть закругленная [5, с. 22] окрестность M точки c имеет смысл, указанный в условии 1 из [2]. Рассмотрим в M функции v, w_ε, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, и w_0, введенные в [2] после формулировки условия 1. Функция v удовлетворяет всем предположениям леммы A и ограничена сверху в M. Напомним, что по определению

$$w_\varepsilon(x) := \overline{\lim_{y \to x,\ y \in M \setminus E}} [u(y) + \varepsilon v(y)], \quad x \in M.$$

Отсюда легко следует, что для $x \in M \setminus E$ верно $w_\varepsilon(x) \leqslant u(x) + \varepsilon v(x)$. Для установления противоположной оценки фиксируем произвольную точку $x_0 \in M \setminus E$, ее закругленную окрестность $U \subset M$ и произвольную точку $b \in U \setminus V$, $b \neq x_0$. Обозначим через P комплексную прямую, проходящую через точки x_0 и b. Множество $V \cap U \cap P$ C-полярно в P, и потому в соответствии с условием теоремы 4 существует числовая последовательность $\{r_j\}_{j=1}^{\infty}$, $r_j > 0$, $r_j \to 0$, $j \to +\infty$, для которой в обозначениях работы [2] верно $u(x_0) \leqslant \overline{\lim\limits_{j \to +\infty}} m(u, x_0, b - x_0, r_j)$. Поэтому

$$w_\varepsilon(x_0) \geqslant \overline{\lim_{j \to +\infty}} m(u + \varepsilon v, x_0, b - x_0, r_j) = \overline{\lim_{j \to +\infty}} [m(u, x_0, b - x_0, r_j) +$$

$$+\varepsilon m(v, x_0, b-x_0, r_j)] \geqslant \varliminf_{j\to+\infty} m(u, x_0, b-x_0, r_j) +$$

$$+\varepsilon \varlimsup_{j\to+\infty} m(v, x_0, b-x_0, r_j) \geqslant u(x_0) + \varepsilon v(x_0).$$

Тем самым доказано равенство $w_\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon v(x)\ \ \forall x \in M \setminus E$, которое в [2] было приведено без доказательства и затем существенно использовано. Пусть теперь $\tau > \varepsilon > 0$. Из последнего равенства видно, что $w_\tau(x) = u(x) + \tau v(x) = w_\varepsilon(x) + (\tau - \varepsilon) v(x)\ \ \forall x \in M \setminus E$. Так как $\sup\limits_{x\in M\setminus E} w_\varepsilon(x) = : \alpha_\varepsilon < +\infty$, то $w_\varepsilon \leqslant \alpha_\varepsilon$ в M, а потому $w_\tau(x) \leqslant \alpha_\varepsilon + (\tau - \varepsilon) v(x)\ \ \forall x \in M \setminus E$, $w_\tau(x) = -\infty\ \ \forall x \in V$, $w_\tau(x) \leqslant \alpha_\varepsilon + (\tau - \varepsilon) v(x)\ \ \forall x \in M$. Отсюда с учетом обоснованного выше для $M \setminus E$ равенства получаем на M соотношение $w_\tau = w_\varepsilon + (\tau - \varepsilon) v$. Это соотношение также было приведено в [2] без доказательства и использовано. В частности, при $1 > \varepsilon > 0$ в M верно $w_1 = w_\varepsilon + (1 - \varepsilon) v$, а на $M \setminus V$ также $w_\varepsilon = w_1 - (1 - \varepsilon) v$.

В [2] показано, что функции w_ε плюрисубгармоничны в M. На $M \setminus V$ функция w_0 совпадает с функцией u из формулировки теоремы 4 [2], а на V $w_0 = -\infty$. Поэтому w_0 ограничена сверху в окрестности каждой точки $x \in M \setminus V$. Следовательно, w_ε и w_0 удовлетворяют всем условиям леммы A. Применяя эту лемму, убеждаемся, что функция w_0 локально ограничена сверху в M. Следовательно, ее верхняя регуляризация w_0^* также локально ограничена сверху в M.

Таким образом, доказана справедливость условия 2 из [2] применительно к теореме 4. Как показано в [2], отсюда следует справедливость указанной теоремы. Попутно показано также, что верно утверждение леммы 3 из [2], относящееся к теореме 4.

3. Лемма B и завершение доказательства теоремы 5 из [1, 2]. Пусть комплексное векторное отделимое топологическое пространство X нормировано и $\|\cdot\|$ — заданная в нем норма.

Лемма B. *Пусть заданы точка $c \in X$, число $\delta > 0$, натуральное m, не большее комплексной размерности пространства X, шар $M := \{x \in X : \|x - c\| < 2\delta\}$ и плюрисубгармоническая функция $\omega : M \setminus \{c\} \to [-\infty, +\infty)$, подчиненная условию $\omega(x) \leqslant \alpha(\|x - c\|)\ \ \forall x \in M \setminus \{c\}$, где $\alpha : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ — непрерывная функция и $\alpha(r) = o(k_{2m}(r))$, $r \to 0$. Тогда $\omega(x) \leqslant \alpha(\delta)\ \forall x \in X : 0 < \|x - c\| \leqslant \delta$.*

С помощью этой леммы завершим доказательство теоремы 5 из [1, 2]. Для этого покажем, что указанная теорема сводится к теореме 4 из [1, 2]. В самом деле, при условиях теоремы 5 фиксируем точку $c \in E$. Рассмотрим окрестность M_c точки c, функции u, v_c, α_ε и число m, фигурирующие в формулировке теоремы 5. Фиксируем $\delta > 0$ такое, что $M := \{x \in X : \|x - c\| < 2\delta\} \subset M_c$. При каждом $\varepsilon \in (0, 1]$ введем на $M_c \setminus E$ функцию $u_\varepsilon := u + \varepsilon v_c$. Согласно оценке (5) из [2] каждая функция u_ε локально ограничена сверху в $M_c \setminus \{c\}$. Поэтому в $M_c \setminus \{c\}$ можно применить теорему 4, взяв в качестве u и v соответственно функции u_ε и 0. В результате получим, что в $M_c \setminus \{c\}$ функция

$$w_\varepsilon(x) := \varlimsup_{y\to x,\, y\in M_c\setminus E} u_\varepsilon(y)$$

плюрисубгармонична. Из соотношения (5) работы [2] видно, что функция $\omega := w_\varepsilon$ в M удовлетворяет условиям леммы B с α_ε в качестве α. Применяя леммму B, приходим к выводу, что $w_\varepsilon(x) \leqslant \alpha(\delta)\ \forall x \in X : 0 < \|x - c\| \leqslant \delta$. Таким образом, в области $B := \{x \in X : \|x - c\| < \delta\}$ условия теоремы 5 свелись к условиям теоремы 4, откуда следует справедливость утверждения теоремы 5 в B. В силу произвола в выборе точки c это означает, что теорема 5 доказана.

Заодно показано, что утверждение леммы 3 из [2], относящееся к теореме 5, верно. Таким образом, эта лемма полностью доказана.

4. Доказательство леммы A. Векторную сумму точки $x \in X$ и множества $A \subset X$ будем обозначать через $x + A$ или $A + x$, а векторную сумму множеств $A, B \subset X$ — через $A + B$ или $B + A$.

Пусть $A \subset X$, а s — натуральное. Векторную сумму $A + \ldots + As$ экземпляров множества A условимся обозначать через As (в отличие от множества $sA := \{sx : x \in A\}$). Имеет место включение $sA \subset As$. Для любых натуральных s_1 и s_2 верно $As_1 + As_2 = A(s_1 + s_2)$. Если множество A закруглено, то множества sA и As также закруглены.

Пусть выполнены условия леммы A. Если $1 \geqslant \tau > \varepsilon > 0$, то на $M \setminus V$ верно $w_\tau = w_\varepsilon + (\tau - \varepsilon) v$. Множество V локально X-полярно, а функции w_τ и $w_\varepsilon + (\tau - \varepsilon) v$ плюрисубгармоничны в M.

Применяя к ним рассуждение, использованное в конце работы [2] для доказательства единственности, убеждаемся, что эти функции совпадают в M. А так как вторая из них на V обращается в $-\infty$, то при всех $\tau \in (0, 1]$ $w_\tau = -\infty$ на V.

Отсюда и из условия леммы A видно, что в M существует поточечный предел $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} w_\varepsilon$, равный w_0, причем на V $w_0(x) = -\infty$.

Из условия леммы A видно, что в каждой точке $x \in M \setminus V$ верно $w_0^*(x) < +\infty$. Основное утверждение леммы состоит в том, что это неравенство справедливо в M. Доказательство этого соотношения будем вести от противного. Предположим, что оно не верно. Тогда в некоторой точке $c \in M$ имеет место равенство $w_0^*(c) = +\infty$. При этом $c \in V$, $v(c) = -\infty$, $(c) = -\infty$ $\forall \varepsilon \in (0, 1]$, $w_0(c) = -\infty$.

Существует закругленная окрестность $U \subset M$ точки c, в которой $v(x) < w_\varepsilon < 0$, $w_1(x) < 0$. Можно выбрать закругленную окрестность N нуля в X такую, что $c + N9 \subset U$ [5, с. 25].

Фиксируем точку $q \in c + N$ такую, что $v(q) \neq -\infty$.

Пусть m — натуральное. Так как $w_0^*(c) = +\infty$, $w_1(c) = -\infty$, $v(c) = -\infty$, а w_ε не убывает при $\varepsilon \downarrow 0$, то существуют последовательности $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^\infty$, $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ такие, что $1/2 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_m > \ldots > 0$, $x_m \in c + N$, $w_1(x_m) < -m$, $v(x_m) < -m$, $w_{\varepsilon_m}(x_m) > m$ $\forall m = 1, 2, \ldots$ и $x_m \to c$, $\varepsilon_m \to 0$ при $m \to +\infty$.

Теперь рассмотрим только те m, которые удовлетворяют условию $-m < v(q)$. Таких m бесконечно много.

Пусть P_m — комплексная прямая, проходящая через точки q и x_m. Через φ_m обозначим линейное отображение комплексной плоскости $\mathbb{C}$ в P_m, нормированное условиями $\varphi_m(0) = q$, $\varphi_m(1) = x_m$. Пусть ψ_m — обращение отображения φ_m.

Имеем $q + 4(N2) \subset U$, $x_m + 4(N2) \subset U$, $x_m \in q + N2$. Так как множество $s(N2)$ закруглено, то множество $K_m^s := \psi_m((q + s(N2)) \cap P_m)$ обязано быть либо кругом с центром в нуле, либо всей плоскостью $\mathbb{C}$. Последнее невозможно, ибо в этом случае ограниченная сверху субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция $z \mapsto v(\varphi_m(z))$ была бы постоянной [6, с. 147, 84], что противоречит совокупности условий $v(q) > -m$, $v(x_m) < -m$.

Для $t > 0$ обозначим $\{z \in \mathbb{C} : |z| < t\} =: G_t$. Множество $\psi_m(U \cap P_m)$ содержит в себе круг G_4, ибо $G_1 \subset K_m^1$, а $G_4 \subset K_m^4 \subset \psi_m(U \cap P_m)$.

Так как функция $z \mapsto w_{\varepsilon_m}(\varphi_m(z))$ субгармонична в G_4 и $w_{\varepsilon_m}(\varphi_m(1)) \geqslant m$, то всякая связная компонента относительно замкнутого в G_4 множества $\{z \in G_4 : w_{\varepsilon_m}(\varphi_m(z)) \geqslant m\}$ не компактна в G_4, а одна из компонент указанного множества содержит некоторый континуум $W_m \subset \overline{G}_2 \setminus G_1$ диаметра $d \in [1, 2)$, имеющий непустое пересечение с окружностью ∂G_2. Обозначим через S_m неограниченную связную компоненту открытого множества $\mathbb{C} \setminus W_m$. Очевидно, $\partial S_m \subset W_m$, причем ∂S_m связно и имеет диаметр, равный d. Поэтому $0 \in S_m$.

Для $z \in W_m$ верно $\varphi_m(z) \in M \setminus V$ и $m \leqslant w_{\varepsilon_m}(\varphi_m(z)) = w_1(\varphi_m(z)) + (\varepsilon_m - 1) v(\varphi_m(z)) < (\varepsilon_m - 1) v(\varphi_m(z)) < -v(\varphi_m(z))$. Поэтому $v(\varphi_m(z)) < -m < v(q)$ $\forall z \in W_m$ (в том числе и для $z \in \partial S_m$). При этом $\partial G_3 \subset S_m$, а множество $S_m \cap G_3 =: B_m$ содержит точку 0 и представляет собою двусвязную область с граничными компонентами ∂S_m и ∂G_3. Кроме того, расстояние между ∂S_m и ∂G_3 равно 1.

Пусть R_m есть произведение числа $-m$ на гармоническую меру множества ∂S_m относительно B_m. Эта гармоническая в B_m функция мажорирует на ∂B_m субгармоническую в окрестности множества $\overline{B}_m$ функцию $z \mapsto v(\varphi_m(z))$. Поэтому в B_m верно $v(\varphi_m(z)) \leqslant R_m(z)$. В частности, $v(q) \leqslant R_m(0)$.

Пусть Γ_m^0 — семейство всех жордановых кривых $\gamma \subset B_m$, разделяющих граничные компоненты B_m. Модуль [7, с. 26] mod Γ_m^0 этого семейства мажорируется числом $9\pi/4$, что легко следует из рассмотрения метрики

$$\rho(z) = \begin{cases} 1 & \forall z \in B_m, \\ 0 & \forall z \in \mathbb{C} \setminus B_m. \end{cases} \tag{2}$$

Введем следующие семейства линий: семейство Γ_m всех жордановых дуг $\gamma \subset B_m$ с концами на ∂S_m, отделяющих в B_m точку 0 от ∂G_3; семейство Γ_m' всех жордановых кривых $\gamma \subset B_m$, отделяющих ∂S_m от точки 0 и окружности ∂G_3; семейство Γ_m'' всех жордановых дуг $\gamma \subset B_m$ с концами на ∂G_3, отделяющих в B_m точку 0 от ∂S_m.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. $4 \operatorname{mod} \Gamma_m \cdot \operatorname{mod} (\Gamma_m' \cup \Gamma_m'') = 1$.

Доказательство. Существует (притом единственное) однолистное конформное отображение $g_m : z \mapsto w$ области B_m на кольцо $D_m := \{w \in \mathbb{C} : 1 < |w| < \exp(2\pi \operatorname{mod} \Gamma_m^0)\}$, переводящее граничные компоненты ∂S_m и ∂G_3 области B_m соответственно в окружности $\{w : |w| = 1\}$ и $\{w : |w| = \exp(2\pi \operatorname{mod} \Gamma_m^0)\}$ и нормированное условием $g_m(0) > 0$. Пусть $g_m(\Gamma_m)$, $g_m(\Gamma_m')$ и $g_m(\Gamma_m'')$ — семейства всех g_m-образов линий из семейств Γ_m, Γ_m' и Γ_m'' соответственно.

Пусть $A_m := \{w \in D_m : \operatorname{Im} w > 0\}$, l — главная ветвь функции $w \mapsto (1/\pi) \log w$ в A_m, $L_m := l(A_m)$. Очевидно, L_m представляет собою прямоугольник с вершинами 0, $\alpha_m := 2 \operatorname{mod} \Gamma_m^0$, $\alpha_m + i$, i. При этом $\alpha_m \leqslant 9\pi/2$, что следует из приведенной выше оценки величины $\operatorname{mod} \Gamma_m^0$.

Обозначим $l(g_m(0)) =: \beta_m$. В L_m рассмотрим следующие семейства линий: семейство Δ_m всех жордановых дуг $\gamma \subset L_m$, имеющих по одному концу на интервале (β_m, α_m) (действительной оси) и интервале $(0, i)$ (мнимой оси); семейство Δ_m' всех жордановых дуг $\gamma \subset L_m$, имеющих по одному концу на интервале $(0, \beta_m)$ (действительной оси) и интервале $(i, \alpha_m + i)$ (прямой $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w = 1\}$); семейство Δ_m'' всех жордановых дуг $\gamma \subset L_m$, имеющих по одному концу на интервале $(0, \beta_m)$ и полуинтервале $(\alpha_m, \alpha_m + i]$ (прямой $\{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w = \alpha_m\}$).

Если метрика $\rho(w)$ допустима [7, с. 27] для семейства $g_m(\Gamma_m)$, то метрики $\rho(\overline{w})$ и $(\rho(w) + \rho(\overline{w}))/2$ также допустимы для него (здесь $\overline{w}$ — точка, комплексно сопряженная с w). Поэтому в определении модуля семейства $g_m(\Gamma_m)$ можно ограничиться допустимыми метриками ρ, симметричными относительно вещественной оси. Фиксируем произвольную такую метрику ρ_1.

Модуль семейства Δ_m равен модулю семейства всех жордановых спрямляемых дуг $\gamma_1 \in \Delta_m$, и каждой такой дуге соответствует кривая $\gamma \in g_m(\Gamma_m)$, которая с точностью до конечного числа точек состоит из двух неналегающих дуг — дуги $l^{-1}(\gamma_1)$ и комплексно сопряженной с нею дуги. Поэтому в L_m метрика $2\rho_1(l^{-1}(\zeta)) |dl^{-1}(\zeta)/d\zeta|$ допустима для Δ_m, откуда следует неравенство $2 \operatorname{mod} g_m(\Gamma_m) \geqslant \operatorname{mod} \Delta_m$. Для получения противоположного неравенства фиксируем произвольную метрику ρ_2, допустимую для Δ_m. Каждая кривая $\gamma \in g_m(\Gamma_m)$ содержит две неналегающие дуги γ_1, γ_2 такие, что $\gamma_1 \subset A_m$, $\overline{\gamma}_2 \subset A_m$, а дуги $l(\gamma_1)$ и $l(\overline{\gamma}_2)$ принадлежат семейству Δ_m (здесь $\overline{\gamma}_2$ — дуга, комплексно сопряженная с γ_2). Поэтому метрика

$$\rho(w) := \begin{cases} \dfrac{1}{2} \rho_2(l(w)) \left| \dfrac{dl(w)}{dw} \right| & \text{при } \operatorname{Im} w > 0, \\[2ex] \dfrac{1}{2} \rho_2(l(\overline{w})) \left| \dfrac{dl(w)}{dw} \right| & \text{при } \operatorname{Im} w < 0 \end{cases}$$

допустима для $g_m(\Gamma_m)$ и $\operatorname{mod} g_m(\Gamma_m) \leqslant \operatorname{mod} \Delta_m$. Итак, доказано, что $2\operatorname{mod} g_m(\Gamma_m) = \operatorname{mod} \Delta_m$. Аналогичным образом устанавливается соотношение $2\operatorname{mod}(g_m(\Gamma_m') \cup g_m(\Gamma_m'')) = \operatorname{mod}(\Delta_m' \cup \Delta_m'')$. В силу конформной инвариантности модулей из приведенных оценок вытекает следующее утверждение.

Лемма 2. $2\operatorname{mod} \Gamma_m = \operatorname{mod} \Delta_m$, $2\operatorname{mod}(\Gamma_m' \cup \Gamma_m'') = \operatorname{mod}(\Delta_m' \cup \Delta_m'')$.

Хорошо известно, что

$$\operatorname{mod} \Delta_m . \operatorname{mod}(\Delta_m' \cup \Delta_m'') = 1. \tag{3}$$

Отсюда и из леммы 2 следует справедливость леммы 1.

Рассмотрим метрику (2). В ней длина каждой кривой $\gamma \in \Gamma_m$ не меньше, чем 4, а длина всякой кривой $\gamma \in \Gamma_m' \cup \Gamma_m''$ не меньше, чем 2. Поэтому

$$\operatorname{mod} \Gamma_m \leqslant 9\pi/16, \quad \operatorname{mod}(\Gamma_m' \cup \Gamma_m'') \leqslant 9\pi/4. \tag{4}$$

Из (3), (4) и леммы 2 получаем оценки $2/(9\pi) \leqslant \operatorname{mod} \Delta_m \leqslant 9\pi/8$, $8/(9\pi) \leqslant \operatorname{mod}(\Delta_m' \cup \Delta_m'') \leqslant 9\pi/2$.

Рассмотрим следующие случаи:

а) если $\alpha_m - \beta_m \geqslant \alpha_m/10$, то $\beta_m/\alpha_m \leqslant 9/10$;

б) если $\alpha_m - \beta_m \geqslant 1/10$, то $\beta_m \leqslant \alpha_m - 1/10$, $\beta_m/\alpha_m \leqslant 1 - (10\alpha_m)^{-1} \leqslant 1 - (45\pi)^{-1}$;

в) пусть теперь $\alpha_m - \beta_m \leqslant 10^{-1} \min\{1, \alpha_m\}$. Тогда рассмотрим усеченный сектор $H_m := \{\zeta \in L_m : \alpha_m - \beta_m \leqslant |\zeta_m - \alpha_m| \leqslant \min\{1, \alpha_m\}\}$ и семейство Ω_m всех жордановых дуг $\gamma \subset H_m$, соединяющих окружности $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \alpha_m| = \alpha_m - \beta_m\}$ и $\{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta - \alpha_m| = \min\{1, \alpha_m\}\}$.

Для каждой дуги $\gamma \in \Delta_m$ существует дуга $\tilde{\gamma} \in \Omega_m$ такая, что $\tilde{\gamma} \subset \gamma$. Поэтому $\operatorname{mod} \Omega_m \geqslant \operatorname{mod} \Delta_m \geqslant 2/(9\pi)$. При этом, очевидно,

$$\operatorname{mod} \Omega_m = \frac{\pi}{2\log(\min\{1, \alpha_m\}/(\alpha_m - \beta_m))}.$$

Следовательно,

$$\frac{2}{9\pi} \leqslant \frac{\pi}{2\log(\min\{1, \alpha_m\}/(\alpha_m - \beta_m))}. \tag{5}$$

Если $\alpha_m \leqslant 1$, то из (5) следует оценка

$$\beta_m/\alpha_m \leqslant 1 - \exp(-9\pi^2/4). \tag{6}$$

Если же $\alpha_m \geqslant 1$, то из (5) вытекает неравенство $\beta_m/\alpha_m \leqslant 1 - (1/\alpha_m) \times \exp(-9\pi^2/4)$, что вместе с полученной выше оценкой $\alpha_m \leqslant 9\pi/2$ приводит к соотношению

$$\beta_m/\alpha_m \leqslant 1 - (2/(9\pi)) \exp(-9\pi^2/4). \tag{7}$$

Отсюда и из (6) следует, что при любом соотношении между α_m и 1 в случае в) верна оценка (7).

Теперь введем обозначение $\delta := 1 - (2/(9\pi)) \exp(-9\pi^2/4)$ и заметим, что $9/10 < 1 - (45\pi)^{-1} < \delta < 1$. Поэтому во всех трех случаях а), б), в) справедлива оценка $\beta_m/\alpha_m \leqslant \delta$.

Пусть ω_m — гармоническая мера внешней граничной окружности кольца D_m относительно D_m. Ясно, что $\omega_m(g_m(0)) = \beta_m/\alpha_m \leqslant \delta$. Как видим, $\omega_m(g_m(0))$ оценивается сверху числом $\delta < 1$, не зависящим от m. Кроме того, $1 - \omega_m(g_m(0)) = -R_m(0)/m$. Следовательно, должно выполнятся неравенства $-R_m(0)/m \geqslant 1 - \delta$. Отсюда и из полученной выше оценки $v(q) \leqslant R_m(0)$ выводим соотношение $m \leqslant -v(q)/(1-\delta)$. Значит, взяв любое $m > -v(q)/(1-\delta)$, придем к противоречию с предположением, что $w_0^*(c) = +\infty$. Лемма A доказана.

5. Доказательство леммы *B*. Для натурального m в комплексном пространстве $\mathbb{C}^m$ через $|\cdot|$ будем обозначать евклидову норму.

Пусть X удовлетворяет условиям из п. 3. Всякое линейное отображение $\varphi : \mathbb{C}^m \to X$ непрерывно.

Пусть S_m — единичная сфера в $\mathbb{C}^m$, а $\varphi : \mathbb{C}^m \to X$ — линейное (однородное) вложение. Тогда величины

$$\rho := \inf_{z \in S_m} \| \varphi(z) \|, \quad \sigma := \sup_{z \in S_m} \| \varphi(z) \|$$

удовлетворяют соотношениям $0 < \rho \leqslant \sigma < +\infty$. Это следует из компактности S_m, непрерывности функции $z \mapsto \| \varphi(z) \|$ в $\mathbb{C}^m$ и условия $0 \notin \| \varphi(S_m) \|$. Пусть φ^{-1} — обращение отображения φ, а S_X — единичная сфера в X. Тогда величины

$$\mu := \inf_{x \in S_X \cap \varphi(\mathbb{C}^m)} |\varphi^{-1}(x)|, \quad \nu := \sup_{x \in S_X \cap \varphi(\mathbb{C}^m)} |\varphi^{-1}(x)|$$

удовлетворяют соотношениям $0 < \mu \leqslant \nu < +\infty$, устанавливаемым с использованием инъективности и линейности (а также непрерывности) отображения φ, причем неравенство $\mu > 0$ вытекает из оценки $\sigma < +\infty$, а неравенство $\nu < +\infty$ — из оценки $\rho > 0$. Кроме того, множество $S_X \cap \varphi(\mathbb{C}^m)$ компактно (в себе), что легко показать, используя оценку $\nu < +\infty$, локальную компактность $\mathbb{C}^m$ и непрерывность φ и $\|\cdot\|$. Далее, при каждом $r > 0$ множество $D_r := \{z \in \mathbb{C}^m : \| \varphi(z) \| < r\}$ открыто, ограничено, содержит точку $0 \in \mathbb{C}^m$, строго звездно относительно этой точки и $D_{tr} = tD_r$ $\forall t > 0$, $\forall r > 0$, $\partial D_r = \{z \in \mathbb{C}^m : \| \varphi(z) \| = r\}$. Открытость D_r видна из непрерывности функции $z \mapsto \| \varphi(z) \|$, а ограниченность D_r следует из оценки $\nu < +\infty$, линейности отображения φ и свойств нормы. Из тех же соображений вытекают остальные отмеченные факты. Справедливы оценки $\| \varphi(z) \| \geqslant \rho |z|$, $k_{2m}(\| \varphi(z) \|) \leqslant k_{2m}(\rho |z|)$ $\forall z \in \mathbb{C}^m$, $k_{2m}(\rho t) \leqslant k_{2m}(t) \varkappa_m$ $\forall t \in (0, \rho)$, где $\varkappa_1 = 2$, $\varkappa_m = \rho^{2-2m}$ при $m \geqslant 2$. Поэтому при всех $z \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$, достаточно близких к 0, верно

$$k_{2m}(\| \varphi(z) \|) \leqslant k_{2m}(|z|) \varkappa_m. \tag{8}$$

Пусть теперь выполнены условия леммы B и m — фигурирующее в ее формулировке натуральное число. Возьмем произвольную точку $x_0 \in M \setminus \{c\}$ такую, что $\| x_0 - c \| < \delta$. Существует линейное (однородное) вложение $\varphi : \mathbb{C}^m \to X$, для которого $x_0 - c \in \varphi(\mathbb{C}^m)$. Пусть $\varphi_c := \varphi + c$, $Y := \varphi_c(\mathbb{C}^m)$, а ψ_c — обращение отображения φ_c. В ограниченном открытом (см. выше) множестве $\psi_c((M \setminus \{c\}) \cap Y)$ функция $z \mapsto \omega(\varphi_c(z))$ плюрисубгармонична и ограничена сверху величиной $\alpha(\| \varphi(z) \|)$, которая согласно условию леммы B и соотношению (8) оценивается следующим образом: $\alpha(\| \varphi(z) \|) = o(k_{2m}(\| \varphi(z) \|)) = o(k_{2m}(|z|))$, $z \to 0$, $z \in \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$. Поэтому функция $z \mapsto \omega(\varphi_c(z))$ продолжается в точку $0 \in \mathbb{C}^m$ до функции, (плюри-)субгармонической в открытом множестве $\psi_c(M \cap Y)$, а согласно условию леммы B и приведенным выше свойствам множества D_r к этой функции применим принцип максимума в (ограниченной) области $\psi_c(\{x \in X : \| x - c \| < \delta\} \cap Y)$. Отсюда следует, что эта функция в указанной области мажорируется числом $\alpha(\delta)$. В частности, $\omega(x_0) \leqslant \alpha(\delta)$. Итак, при $\| x - c \| \leqslant \delta$ верно $\omega(x) \leqslant \alpha(\delta)$. Лемма B доказана.

1. *Тамразов П. М.* Почти субгармонические функции, их аналоги в комплексных пространствах и стирание особенностей.— Киев, 1987.— 23 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.32).
2. *Тамразов П. М.* Устранение особенностей субгармонических, плюрисубгармонических функций и их обобщений // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 6.— С. 683—694.
3. *Lelong P.* Ensembles singuliers impropres des fonctions plurisousharmoniques // J. Math. pures et appl.— 1957.— **36**, N 7.— P. 263—303.
4. *Noverraz Ph.* Fonctions plurisousharmoniques et analytiques dans les espaces vectoriels topologiques complexes // Ann. Inst. Fourier, Grenoble.— 1969.— **19**, N 2.— P. 419—493.
5. *Шефер X.* Топологические векторные пространства.— М. : Мир, 1971.— 359 с.
6. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции.— М. : Мир, 1980.— 304 с.
7. *Дженкинс Дж.* Однолистные функции и конформные отображения.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 265 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 13.10.88