УДК 512.546

И. В. Протасов, В. С. Стукотилов

Очановские топологии на пространстве замкнутых подгрупп

Пусть X — топологическое пространство, $P(X)$ — множество всех его подмножеств. Два семейства $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ подмножеств пространства X, замкнутые относительно конечных объединений, определяют на множестве $P(X)$ $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-топологию с базой из отрезков $[A, X\setminus B] = \{Y \in P(X) : A \subseteq Y \subseteq X\setminus B\}$, где $A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Впервые такие топологии рассматривал Ю. С. Очан [1], а затем Р. П. Кашуба [2], В. В. Попов [3]. Будем считать, что семейства $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, определяющие очановскую $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-топологию, содержат все конечные подмножества пространства X, что влечет хаусдорфовость пространства $P(X)$ [3]. Среди всевозможных очановских топологий выделим особо, упрощая обозначения работы [3], следующие три топологии:

O-топология: $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ — семейства всех конечных подмножеств пространства X;

O_1-топология: $\mathcal{A} = P(X)$, $\mathcal{B}$ — семейство всех конечных подмножеств пространства X;

O_2-топология: $\mathcal{A}$ — семейство всех конечных подмножеств пространства X, $\mathcal{B} = P(X)$.

Цель статьи — изучить связь между строением топологической группы G и топологическими свойствами пространства $\mathfrak{L}(G)$ всех ее замкнутых подгрупп, снабженного одной из отмеченных топологий. Из топологических свойств пространства $\mathfrak{L}(G)$ ограничимся двумя основными — компактностью и дискретностью. Заметим, что в определении O-, O_1- и O_2-топологий на пространстве $P(G)$ и его подпространстве $\mathfrak{L}(G)$ топология группы G непосредственного участия не принимает. Учет топологических особенностей группы G в свойствах пространства $\mathfrak{L}(G)$ происходит на элементной базе, поскольку элементы пространства $\mathfrak{L}(G)$ — замкнутые подгруппы.

1. *О-топология на пространстве* $\mathfrak{L}(G)$. Напомним, что направленность $\{H_\alpha\}$, $\alpha \in J$, подмножеств группы G называется неубывающей (невозрастающей), если $H_\alpha \subseteq H_\beta$ ($H_\beta \subseteq H_\alpha$), как только $\alpha > \beta$. Следующие свойства сходимости в O-топологии вытекают непосредственно из ее определения:

1) направленность $\{H_\alpha\}$, $\alpha \in J$, подмножеств группы G сходится в O-топологии к подмножеству Н тогда и только тогда, когда для любых $x \in H$, $y \notin H$ найдется такое $\beta \in J$, что $x \in H_\alpha$, $y \notin H_\alpha$ для всех $\alpha > \beta$;

2) неубывающая направленность $\{H_\alpha\}$, $\alpha \in J$, подмножеств группы G сходится в O-топологии к подмножеству $\bigcup\limits_{\alpha \in J} H_\alpha$;

3) невозрастающая направленность $\{H_\alpha\}$, $\alpha \in J$, подмножеств группы G сходится в O-топологии к подмножеству $\bigcap\limits_{\alpha \in J} H_\alpha$;

4) пространство $P(G)$, наделенное O-топологией, гомеоморфно канторову кубу $D^{|G|}$, D — дискретное двоеточие, $|G|$ — мощность группы G [3];

5) подпространство $l(G)$ всех подгрупп группы G замкнуто в $P(G)$ и, следовательно, компактно.

Топологическую группу G назовем Ind-группой, если для любой неубывающей направленности $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in J$, замкнутых подгрупп из G подгруппа $\bigcup\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$ замкнута.

Теорема 1. *Пространство* $\mathfrak{L}(G)$ *компактно в О-топологии тогда и только тогда, когда* G — Ind-*группа.*

Доказательство. Пусть пространство $\mathfrak{L}(G)$ компактно в O-топологии, $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in J$,— неубывающая направленность замкнутых подгрупп из G. По свойству 2 направленность $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in J$, сходится к подгруппе $A = UA_\alpha$. В силу компактности $\mathfrak{L}(G)$ замкнуто в пространстве всех подгрупп $l(G)$. Значит, подгруппа A замкнута.

Пусть G — Ind-группа, $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in J$,— произвольная направленность замкнутых подгрупп из G. Так как $l(G)$ — компакт по свойству 5, то, переходя к поднаправленностям, можно считать, что направленность $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in J$, сходится в O-топологии к некоторой подгруппе A. Покажем, что подгруппа A замкнута и, следовательно, $\mathfrak{L}(G)$ — компакт. Рассмотрим множество I пар (α, K), где $\alpha \in J$, K — конечное подмножество из A. Пусть $\beta_1 = (\alpha_1, K_1)$, $\beta_2 = (\alpha_2, K_2)$. Направим множество I, полагая $\beta_1 > \beta_2$, если $\alpha_1 > \alpha_2$, $K_2 \subseteq K_1$. Если $\beta = (\alpha, K)$, то через B_β обозначим наименьшую замкнутую подгруппу из G, содержащую подмножество K. Поскольку направленность $\{B_\beta\}$, $\beta \in I$, замкнутых подгрупп группы G неубывающая, а G — Ind-группа, то подгруппа $B = \bigcup\limits_{\beta \in I} B_\beta$ замкнута. Убедимся, что $B = A$.

Пусть $a \in A$, $\beta_0 = (\alpha_0, \{a\})$, где α_0 — фиксированный элемент из J. Тогда $a \in B_{\beta_0}$ и, следовательно, $a \in B$. Значит, $A \subseteq B$. Наоборот, пусть $b \in B$. Выберем такое $\beta_1 = (\alpha_1, K)$, что $b \in B_{\beta_1}$. Так как направленность $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in J$, замкнутых подгрупп из G сходится в O-топологии к подгруппе A, найдется такое $\alpha_2 \in J$, что $K \subseteq A_\alpha$ для всех $\alpha > \alpha_2$. В силу замкнутости подгруппы A_α $B_{\beta_1} \subseteq A_\alpha$ и $b \in A_\alpha$ для всех $\alpha > \alpha_2$. Но тогда $b \in A$ и, следовательно, $B \subseteq A$. Теорема доказана.

Будем говорить, следуя [4], что топологическая группа G удовлетворяет условию индуктивности, если для любой неубывающей последовательности $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ замкнутых подгрупп из G подгруппа $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ также замкнута. Очевидно, что всякая Ind-группа удовлетворяет условию индуктивности. Уточним соотношение между этими классами групп, а также классом топологических групп со счетно-компактным пространством $\mathfrak{L}(G)$.

Лемма 1. *Если топология группы* G *замкнута относительно счетных пересечений, то* G — *группа с условием индуктивности, а пространство* $\mathfrak{L}(G)$ *счетно-компактно.*

Доказательство. Первое утверждение леммы очевидно, докажем второе. Пусть $\{A_n\}$ — произвольная последовательность замкнутых подгрупп группы G. Так как $l(G)$ — компакт, то из последовательности $\{A_n\}$ можно выделить поднаправленность $\{A_\alpha\}, \alpha \in J$, сходящуюся к некоторой подгруппе A. Покажем, что подгруппа A замкнута и поэтому является предельной точной последовательности $\{A_n\}$ в пространстве $\mathfrak{L}(G)$. Допустим противное и возьмем некоторый элемент $a \in \overline{A} \setminus A$. По определению O-сходимости найдется такое $\beta \in J$, что $a \notin A_\alpha$ для всех $\alpha > \beta$. Так как множество подгрупп $\{A_\alpha, \alpha > \beta\}$ счетно, то $V = G \setminus (\bigcup A_\alpha)$ — окрестность элемента a. А это противоречит тому, что $V \cap A = \varnothing$. Действительно, если $x \in A$, то найдется такое $\beta \in J$, что $x \in A_\alpha$ для всех $\alpha > \gamma$, и тогда $x \notin V$.

Лемма 2. *Если пространство $\mathfrak{L}(G)$ счетно-компактно, то G — группа с условием индуктивности.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\}$ — неубывающая последовательность замкнутых подгрупп группы G, $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. В силу счетной компактности $\mathfrak{L}(G)$ последовательность $\{A_n\}$ имеет предельную точку. По свойству 2 предельной точкой последовательности $\{A_n\}$ может быть лишь подгруппа A. Значит, $A \in \mathfrak{L}(G)$, т. е. A — замкнутая подгруппа.

Пример 1. Построим группу с условием индуктивности, которая не является Ind-группой. Пусть ω_1 — первый несчетный ординал, $G = \prod\limits_{\alpha<\omega_1} G_\alpha$ — декартово произведение набора неединичных групп $\{G_\alpha, \alpha<\omega_1\}$. Топологизируем группу G, объявив базовыми окрестности единицы $U_\alpha = \{x \in G : pr_\beta x = e_\beta$ для всех $\beta \leqslant \alpha\}$, e_β — единица группы G_β, α пробегает все ординалы меньше ω_1. Так как конфинальность ординала ω_1 несчетна, то топология группы G замкнута относительно счетных пересечений. Значит, по лемме 1 группа G удовлетворяет условию индуктивности. Положим $A_\alpha = \{x \in G : pr_\beta x = e_\beta$ для всех $\beta > \alpha\}$, $\alpha < \omega_1$, $A = \bigcup\limits_{\alpha<\omega_1} A_\alpha$. Ясно, что каждая подгруппа A_α замкнута и $\overline{A} = G$. Покажем, что $A \neq G$ и, стало быть, G не является Ind-группой. Выберем в каждом сомножителе G_α неединичный элемент g_α и обозначим через g такой элемент группы G, что $pr_\alpha g = g_\alpha$ для всех $\alpha < \omega_1$. Очевидно, что $g \notin A_\alpha$, поскольку число неединичных координат элементов из A_α не более чем счетно. Значит, $g \notin A$ и $A \neq \overline{A}$.

Теорема 2. *Пусть G — группа с условием индуктивности. Если G секвенциальна или локально компактна, то G — Ind-группа.*

Доказательство. Пусть вначале G — секвенциальная группа с условием индуктивности, $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in J$, — неубывающая направленность замкнутых подгрупп из G. Допустим, что подгруппа $A = \bigcup\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$ незамкнута. Тогда по определению секвенциальности найдется последовательность $\{a_n\}$ элементов из A, сходящаяся к некоторому элементу $g \notin A$. Выберем такую возрастающую последовательность индексов $\{\alpha_n\}$ из J, что $a_n \in A_{\alpha_n}$ для всех натуральных n. Из условия индуктивности следует, что подгруппа $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n}$ замкнута. Так как $a_n \in B$ для любого n, то $g \in B$. Следовательно, $g \in A_{\alpha_m}$ для некоторого натурального m и $g \in A$, что противоречит выбору элемента g.

Пусть G — локально компактная группа с условием индуктивности, $\{A_\alpha\}$, $\alpha \in J$, — неубывающая направленность замкнутых подгрупп из G, $A = \bigcup\limits_{\alpha \in J} A_\alpha$. Предположим, что ни одна подгруппа A_α не является открытой в подгруппе A. Возьмем компактную окрестность V единицы группы G и положим $V' = V \cap A$. Так как $V' \subseteq A$ и $V' \not\subseteq A_\alpha$ для любого $\alpha \in J$, то найдется такая возрастающая последовательность индексов $\{\alpha_n\}$ из J, что $(A_{\alpha_{n+1}} \setminus A_{\alpha_n}) \cap V' = \varnothing$. Ввиду компактности подмножества V последовательность $\{a_n\}$ имеет предельную точку a. Поскольку группа G удовлетворяет условию индуктивности, подгруппа $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_{\alpha_n}$ замкнута в G и $a \in B$. Так как пространство локально компактной подгруппы B обладает свойством Бэра, то найдется такое натуральное m, что подгруппа A_{α_m} открыта в B. Поэтому в окрестности aA_{α_m} элемента a подгруппы B содержится бесконечное число членов последовательности $\{a_n\}$ Пусть a_k, $a_l \in aA_{\alpha_m}$, $k > l > m$. Тогда $a_l^{-1}a_k \in A_{\alpha_m}$ и $a_k \in a_lA_{\alpha_m} \subseteq A_{\alpha_l}A_{\alpha_m} = A_{\alpha_l}$, т. е. $a_k \in A_{\alpha_l}$. Поскольку $k > l$, последнее противоречит построению последовательности $\{a_n\}$. Значит, некоторая подгруппа A_γ, $\gamma \in J$, открыта в A. Отсюда следует, что подгруппа A локально компактна и замкнута в G.

Следствие. *Если группа G секвенциальна либо локально компактна, то счетная компактность пространства $\mathfrak{L}(G)$ равносильна компактности.*

Замечание 1. Пример 1, лемма 1 и теорема 1 показывают, что счетная компактность, вообще говоря, не равносильна компактности для пространств $\mathfrak{L}(G)$, снабженных O-топологией. Можно предположить, что счетная компактность пространства $\mathfrak{L}(G)$ равносильна условию индуктивности для группы G. Но доказать это не удалось.

Лемма 3. *Если пространство $\mathfrak{L}(G)$ дискретно в O-топологии, то группа G удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп. Если, сверх того, группа G с условием индуктивности, то G удовлетворяет условию максимальности для замкнутых подгрупп.*

Доказательство леммы вытекает непосредственно из свойств 3 и 2 сходимости в O-топологии.

Пример 2. Покажем, что условие индуктивности во втором утверждении леммы 3 существенно. Пусть T — окружность, p — фиксированное простое число, G — подгруппа из T, алгебраически порожденная p-элементами и некоторым элементом $g \in T$ бесконечного порядка. Очевидно, что любая замкнутая подгруппа из G конечна либо совпадает с G. Покажем, что любая замкнутая подгруппа H из G изолирована в $\mathfrak{L}(G)$. Рассмотрим два случая.

1. H — конечная подгруппа. Тогда H — циклическая подгруппа, порожденная некоторым элементом $y \in G$. Пусть $|y| = p^m$, z — такой элемент из G, что $|z| = p$. Ясно, что в окрестности $[y, G \setminus \{z\}]$ подгруппы H нет ни одной замкнутой подгруппы, отличной от H.

2. $H = G$. Окрестность $[a, G]$ подгруппы H одноэлементна.

Теорема 3. *Пространство $\mathfrak{L}(G)$ локально компактной группы дискретно в O-топологии тогда и только тогда, когда группа G конечна.*

Доказательство. Пусть пространство $\mathfrak{L}(G)$ дискретно. Из леммы 3 следует, что G — группа Ли. Если G недискретна, она содержит подгруппу H, топологически изоморфную окружности. Пусть $\{p_n\}$ — последовательность различных простых чисел. Очевидно, что последовательность циклических подгрупп из H порядков p_n сходится в O-топологии к единичной подгруппе группы G. Значит, G дискретна и по теореме 1 пространство $\mathfrak{L}(G)$ компактно. Поэтому пространство $\mathfrak{L}(G)$, а с ним и дискретная группа G, конечны.

Пример 2 показывает, что локальная компактность группы G в условиях теоремы 3 существенна.

2. O_1-топология на пространстве $\mathfrak{L}(G)$.

Теорема 4. *Пространство $\mathfrak{L}(G)$ компактно в O_1-топологии тогда и только тогда, когда группа G удовлетворяет условию максимальности для замкнутых подгрупп.*

Доказательство. Пусть пространство $\mathfrak{L}(G)$ компактно в O_1-топологии, однако группа G не удовлетворяет условию максимальности. Возьмем возрастающую цепочку замкнутых подгрупп $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset$ $\subset A_n \subset \ldots$

В силу компактности (достаточно даже счетной компактности) пространства $\mathfrak{L}(G)$ последовательность $\{A_n\}$ имеет некоторую точку прикосновения X. Поскольку O-топология слабее O_1-топологии, то X — точка прикосновения последовательности $\{A_n\}$ в O-топологии. По свойству 2 O-сходимости $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Однако в окрестности $[X, G]$ подгруппы X в O_1-топологии нет ни одной подгруппы A . Пришли к противоречию.

Пусть G — группа с условием максимальности для замкнутых подгрупп. Отсюда следует, что любая неубывающая направленность замкнутых подгрупп имеет наибольший элемент. Значит, G — Ind-группа, а по теореме 1 пространство $\mathfrak{L}(G)$ компактно в O-топологии. Из условия максимальности следует, что любая замкнутая подгруппа из G топологически конечно порождена. Следовательно, O_1-топология на пространстве $\mathfrak{L}(G)$ равносильна O-топологии и $\mathfrak{L}(G)$ — компакт в O_1-топологии.

З а м е ч а н и е 2. Из доказательства теоремы 4 следует, что для любой топологической группы G компактность пространства $\mathfrak{L}(G)$ в O_1-топологии эквивалентна счетной компактности.

Следуя С. Н. Черникову [5] периодическую группу G будем называть слойно конечной, если для любого натурального числа n множество всех элементов порядка n группы G конечно.

Т е о р е м а 5. *Пространство $\mathfrak{L}(G)$ локально компактной группы G дискретно в O_1-топологии тогда и только тогда, когда группа G дискретна, слойно конечна и множество $\pi(G)$ простых делителей порядков элементов группы G конечно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Так как единичная подгруппа $\langle e \rangle$ изолирована в пространстве $\mathfrak{L}(G)$, то группа G не имеет сколь угодно малых подгрупп, т. е. G — группа Ли. Допустим, что группа G содержит такой элемент g, что подгруппа $\langle g \rangle$, топологически порожденная элементом g, топологически изоморфна дискретной свободной группе. Тогда последовательность замкнутых подгрупп $\{\langle g^n \rangle\}$ сходится в O_1-топологии к подгруппе $\langle e \rangle$, что противоречит дискретности пространства $\mathfrak{L}(G)$. Если группа G недискретна, то G содержит замкнутую подгруппу S, топологически изоморфную T. Последовательность S_n циклических подгрупп из S попарно взаимно простых порядков также сходится к $\langle e \rangle$, что невозможно. Значит, G — дискретная периодическая группа. Предположим, что множество $\pi(G)$ бесконечно и $\{x_n\}$ — последовательность элементов попарно взаимно простых порядков. Последовательность подгрупп $\{\langle x_n \rangle\}$ сходится в O_1-топологии к подгруппе $\langle e \rangle$. Для доказательства слойной конечности G достаточно установить конечность множества $B_p(n) = \{x \in G : x^{p^n} = e\}$ для любого $p \in \pi(G)$ и натурального n. При $n = 0$ $B_p(n)$ содержит лишь единицу. Предположим, что $B_p(n)$ конечно для всех $n < k$. Если $B_p(k)$ бесконечно, то найдется такая последовательность $\{x_m\}$ элементов из $B_p(k)$ и элемент $x \in B_p(k-1)$, что $\langle x_i \rangle \cap \langle x_j \rangle = \langle x \rangle$ для любых $i \neq j$. Последовательность подгрупп $\{\langle x_m \rangle\}$ сходится в O_1-топологии к подгруппе $\langle x \rangle$, что противоречит дискретности $\mathfrak{L}(G)$. Значит, $B_p(k)$ конечно и необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. По теореме Черникова [5] $G = SK$, где S — центральная подгруппа, равная произведению квазициклических групп по некоторым $p \in \pi(G)$ с конечным числом сомножителей для каждого p, K — конечная группа. Пусть $H \in \mathfrak{L}(G)$, H_1 — максимальная делимая подгруппа из H. Ясно, что $S = H_1 \times S_1$ и $G = H_1(S_1K)$. Возьмем такую конечную подгруппу H_2 из $M = S_1K$, что $H = H_1H_2$. Для каждого $p \in \pi(G)$ обозначим через X_p совокупность таких p-элементов x из M, что $x \notin H_2$, $x^p \in H_2$. Заметим, что X_p конечно и положим $X = \bigcup_{p \in \pi(G)} X_p$. Ясно, что отрезок $[H, G \setminus X]$ является окрестностью подгруппы H в O_1-топологии. Если $Y \in [H, G \setminus X]$, то, очевидно, $H \subseteq Y$. Покажем обратное включение. Возьмем произвольный p-элемент $y \in Y$. Тогда $y = hm$, $h \in H_1$, $m \in M$. Поскольку $H \subseteq Y$, $m \in Y$. Если $m \notin H_2$, то для некоторого натурального числа $k\, m^{p^k} \in X_p$. Последнее противоречит тому, что $Y \cap X_p = \varnothing$. Значит, $m \in H_2$ и $y \in H$. Теорема доказана.

3. O_2-топология на пространстве $\mathfrak{L}(G)$. Лемма 4. *Если пространство $\mathfrak{L}(G)$ счетно компактно в O_2-топологии, то группа G удовлетворяет условию минимальности для замкнутых подгрупп.*

Доказательство. Допустим противное и возьмем убывающую цепочку $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset \ldots$ замкнутых подгрупп из G. Ввиду счетной компактности последовательность $\{A_n\}$ имеет предельную точку X. Так как O-топология слабее O_2-топологии, то X — предельная точка последовательности $\{A_n\}$ в O-топологии. По свойству 3 O-сходимости $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Однако в окрестности $[\{e\}, X]$ подгруппы X нет ни одной подгруппы A_n.

Теорема 6. *Пусть G — локально компактная группа. Пространство $\mathfrak{L}(G)$ компактно в O_2-топологии тогда и только тогда, когда группа G топологически изоморфна группе $C_{p_1^\infty} \times C_{p_2^\infty} \times \ldots \times C_{p_n^\infty} \times K$, где $C_{p_i^\infty}$ — дискретная квазициклическая p_i-группа, K — конечная группа, $p_1, \ldots, p_n$ — различные простые числа и порядок K не делится ни на одно из них.*

Доказательство. Пусть пространство $\mathfrak{L}(G)$ компактно в O_2-топологии. Из леммы 4 следует, что G — группа Ли. Допустим, что G недискретна. Тогда G содержит подгруппу H, топологически изоморфную окружности. Так как подпространство $\mathfrak{L}(H)$ замкнуто в $\mathfrak{L}(G)$, то $\mathfrak{L}(H)$ также компакт в O_2-топологии. Нетрудно заметить, что на пространстве $\mathfrak{L}(H)$ O_2-топология эквивалентна O-топологии. Однако H не является Ind-группой, что противоречит теореме 1. Значит, группа G дискретна. Но в этом случае O_2-топология на $\mathfrak{L}(G)$ совпадает с топологией Вьеториса и достаточно воспользоваться результатами работы [6].

Теорема 7. *Пространство $\mathfrak{L}(G)$ дискретно в O_2-топологии тогда и только тогда, когда любая замкнутая подгруппа из G топологически конечно порождена.*

Доказательство. Пусть пространство $\mathfrak{L}(G)$ дискретно, $H \in \mathfrak{L}(G)$, $[K, F]$ — одноэлементная окрестность подгруппы H в O_2-топологии. Рассмотрим замкнутую подгруппу X, топологически порожденную конечным подмножеством K. Ясно, что $X \in [K, F]$. Значит, $X = H$.

Наоборот, пусть замкнутая подгруппа H топологически порождается элементами $a_1, \ldots, a_n$. Положим $K = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Тогда $[K, H] = \{H\}$ и, следовательно, пространство $\mathfrak{L}(G)$ дискретно.

1. *Очан Ю. С.* Пространство подмножеств топологического пространства // Докл. АН СССР.— 1941.— **32**, № 2.— С. 107—109.
2. *Kasuba R.* The generalized Očan topology on sets of subsets and topological Boolean rings // Math. Nachr.— 1980.— **97**.— P. 47—56.
3. *Попов В. В.* О нормальности экспоненты в топологиях очановского типа // Мат. заметки.— 1982.— **32**, № 3.— С. 375—384.
4. *Полецких В. М.* Локально компактные группы с условием индуктивности для замкнутых подгрупп // Сиб. мат. журн.— 1973.— **14**, № 3.— С. 624—635.
5. *Черников С. Н.* Бесконечные слойно-конечные группы // Мат. сб.— 1948.— **22, № 1**.— С. 101—133.
6. *Протасов И. В.* Топологические группы с компактной решеткой замкнутых подгрупп // Сиб. мат. журн.— 1979.— **20, № 2**.— С. 378—385.

Киев. ун-т

Получено 21.12.87