УДК 517.927.4

М. Т. Терехин, М. О. Вансович

Существование ненулевого периодического решения сингулярно возмущенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Задача существования ненулевого периодического решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений рассматривалась ряде работ (см., например, [1—3]). В данной работе указанная задача изучается в случае, когда матрица линейного приближения вырожденной системы имеет нулевое собственное значение.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\varepsilon\dot{x} = A(t)x + f(t, x, y, \varepsilon), \tag{1}$$

$$\dot{y} = [B(\varepsilon) + g(t, x, y, \varepsilon)]\,y, \tag{2}$$

где ε — малый параметр, $A(t)$ и $B(\varepsilon)$, $g(t, x, y, \varepsilon)$ — соответственно $(n \times n)$ и $(m \times m)$-матрицы, x, f и y соответственно n и m-мерные вектор-функции.

Обозначим через C_ω^n пространство непрерывных на $[0, \omega]$ ω-периодических n-мерных вектор-функций аргумента t, $|x| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i(t)|$, $|A| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} \sum\limits_{k=1}^{n} |a_{ik}|$, $\|\cdot\| = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant\omega} |\cdot|$, $D_R^n = \{x \in C_\omega^n : \|x\| \leqslant R\}$, где R — положительное число, E — единичная матрица.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1) матрица $A(t) = \operatorname{diag}\{A_1(t), \ldots, A_r(t)\}$ непрерывна на $[0, \omega]$, ω-периодична, матрицы $A_i(t)$, $i = 1, \ldots, r$, имеют собственные значения со знакопостоянными (ненулевыми при всех $t \in [0, \omega]$) действительными частями;

2) вектор-функция $f: (t, x, y, \varepsilon) \to f(t, x, y, \varepsilon)$ непрерывна по $(t, x, y, \varepsilon) \in [0, \omega] \times D_R^n \times D_r^m \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, ω-периодична по t; $\exists h_0 > 0$ такое, что $\forall (x, y, \varepsilon) \in D_R^n \times D_r^m \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\ |f(t, x, y, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2 h_0 \|x\|$;

3) матрица $B(\varepsilon)$ — непрерывно дифференцируема на $[-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, $B(\varepsilon) = \operatorname{diag}(\bar{B}(\varepsilon), \beta(\varepsilon))$, где $(m-1) \times (m-1)$-матрица $\bar{B}(\varepsilon)$ не имеет собственных значений с нулевой действительной частью, $\beta(0) = 0$, $\beta'(0) \neq 0$, $\beta(\varepsilon) \neq 0$ при $\varepsilon \neq 0$;

4) матрица $g(t, x, y, \varepsilon)$ непрерывна по (t, x, y, ε) на $[0, \omega] \times D_R^n \times D_r^m \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$, ω-периодична по t и такова, что $\forall x \in D_R^n$ система (2) удовлетворяет условиям теорем единственности решений с начальными данными $y(0) = \alpha$, где $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, непрерывной зависимости решений от правой части системы и непрерывной дифференцируемости решений по начальным данным и по параметру ε, кроме того $g(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$;

5) $\forall x \in D_R^n$ система $\dot{y} = [B(0) + g(t, x, y, 0)]\, y$ имеет в D_r^m лишь тривиальное ω-периодическое решение.

Лемма. *Если выполнены условия* 3—5, *то* $\exists R_1 > 0$ *такое, что* $\forall x \in D_{R_1}^n$ $\exists \alpha \neq 0$ *и* $\exists \varepsilon\,(0 < |\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0)$, *зависящее от* α, *такие, что система* (2) *имеет единственное* ω-*периодическое решение* $y_\omega(t, x, \alpha, \varepsilon)$, *удовлетворяющее начальным данным* $y_\omega(0, x, \alpha, \varepsilon) = \alpha$, *причем* $\lim\limits_{\|x\|+|\alpha| \to 0} \| y_\omega(t, x, \alpha, \varepsilon) \| = 0$.

Доказательство. Рассмотрим систему

$$\dot{y} = [B(\varepsilon) + g(t, 0, y, \varepsilon)]\, y; \tag{3}$$

$y = 0$ — решение данной системы с начальными данными $y(0) = 0$. В силу непрерывной зависимости решений системы (3) от правой части и начальных данных при малом значении $\|x\| + |\alpha|$ существует решение системы (2) $\psi(t, x, \alpha, \varepsilon)$, определенное на $[0, \omega]$ такое, что $\psi(0, x, \alpha, \varepsilon) = \alpha$ и

$$\lim_{\|x\|+|\alpha| \to 0} \| \psi(t, x, \alpha, \varepsilon) \| = 0. \tag{4}$$

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{y} = [B(\varepsilon) + g(t, x, \psi(t, x, \alpha, \varepsilon), \varepsilon)]\, y. \tag{5}$$

Любое ее решение с начальными данными $y(0) = \alpha^*$ имеет вид

$$y(t, x, \alpha^*, \varepsilon) = Y(t, x, \alpha, \varepsilon)\, \alpha^*, \tag{6}$$

где $Y(t, x, \alpha, \varepsilon)$ — фундаментальная матрица системы (5), удовлетворяющая условию $Y(0, x, \alpha, \varepsilon) = E$.

Из равенства (6) видно, что решение системы (2) ω-периодическое тогда и только тогда, когда

$$[Y(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon) - E]\, \alpha^* = 0. \tag{7}$$

Данное равенство задает оператор $T_x : \alpha \to \alpha^*$. Будем считать, что оператор T определен в шаре $|\alpha| \leqslant \alpha_0$.

Для доказательства леммы достаточно показать, что $\exists \alpha_0^1$, $0 < \alpha_0^1 \leqslant \alpha_0$, такое, что оператор T_x имеет в шаре $|\alpha| \leqslant \alpha_0^1$ единственную отличную от нуля неподвижную точку.

Прежде всего заметим, что

$$Y(t, x, \alpha, \varepsilon) = \overline{Y}(t, \varepsilon) + H(t, x, \alpha, \varepsilon), \tag{8}$$

где $\overline{Y}(t, \varepsilon)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{y} = B(\varepsilon)\, y$ такая, что $\overline{Y}(0, \varepsilon) = E$, а матрица $H(t, x, \alpha, \varepsilon) = (\eta_{ij}(t, x, \alpha, \varepsilon))_{i,j=1}^m$ в силу условий 3, 4 и (4) такова, что

$$\lim_{\|x\|+|\alpha| \to 0} \| H(t, x, \alpha, \varepsilon) \| = 0, \tag{9}$$

причем стремление к нулю равномерно по ε. Тогда

$$Y(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon) - E =$$

$$= \begin{pmatrix} \exp(\overline{B}(\varepsilon)\,\omega) - E_{m-1} + H_{m-1}(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon) & \begin{matrix} \eta_{1m}(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \eta_{m-1,m}(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon) \end{matrix} \\ \eta_{m1}(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon), \ldots, \eta_{m,m-1}(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon) & e^{\beta(\varepsilon)\omega} - 1 + \eta_{mm} \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где E_{m-1} — единичная $(m-1) \times (m-1)$-матрица, $H_{m-1} = (\eta_{ij})_{i,j=1}^{m-1}$. Обозначим $\mathscr{L}(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon) = \exp(\overline{B}(\varepsilon)\,\omega) - E_{m-1} + H_{m-1}(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon) = (b_{ij})_{i,j=1}^{m-1}$.

В силу условия 3 $\exists \delta_0 > 0$ такое, что при $\|x\| + |\alpha| \leqslant \delta_0$ $\det \mathscr{L}(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon) \neq 0$. Далее будем считать, что $R + \alpha_0 \leqslant \delta_0$.

Рассмотрим матрицу

$$M(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon) = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & -c_1(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon) \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -c_2(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -c_{m-1}(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon), \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad (11)$$

где $c_i = \dfrac{1}{\det \mathscr{L}} \sum_{k=1}^{m-1} \mathscr{L}_{ki} \eta_{km}$, $\mathscr{L}_{ki}$ — алгебраическое дополнение элемента b_{ki} матрицы $\mathscr{L}$.

Заметим, что

$$\lim_{\|x\| + |\alpha| \to 0} |c_i(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon)| = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m-1, \quad (12)$$

причем стремление к нулю равномерно по ε.

В системе (7) α^* будем искать в виде

$$\alpha^* = M(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon)\bar{\alpha}, \quad \bar{\alpha} = \operatorname{colon}(0, \ldots, \alpha_m), \quad (13)$$

где $\alpha_m > 0$ — постоянное число.

Тогда в силу равенств (10), (11) система (7) примет вид

$$\begin{Vmatrix} \mathscr{L}(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon) & & 0 \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & \cdot \\ & & 0 \\ \eta_{m1}, \ldots, \eta_{m,m-1} & & e^{\beta(\varepsilon)\omega} - 1 + \eta^*_{mm}(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon) \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \alpha_m \end{Vmatrix} = 0, \quad (14)$$

где $\|\eta^*_{mm}\| = \left\| \eta_{mm} - \sum_{i=1}^{m-1} \eta_{mi} c_j \right\| \to 0$ при $\|x\| + |\alpha| \to 0$ равномерно по ε в силу (9), (12).

Обозначим $G(x(\omega), \alpha, \varepsilon) = e^{\beta(\varepsilon)\omega} - 1 + \eta^*_{mm}(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon)$. Функция $G : (x(\omega), \alpha, \varepsilon) \to G(x(\omega), \alpha, \varepsilon)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) определена и непрерывна по совокупности переменных при $|x(\omega)| \leqslant R$, $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$; 2) $G(0, 0, 0) = 0$; 3) $G'_\varepsilon(0, 0, 0) = \beta'(0) \neq 0$; 4) $G'_\alpha = \partial\eta^*_{mm}/\partial\alpha$ непрерывна по совокупности переменных при $|x(\omega)| \leqslant R$, $|\alpha| \leqslant \alpha_0$, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$.

Тогда по теореме о существовании неявно заданной функции равенство $G(x(\omega), \alpha, \varepsilon) = 0$ определяет в окрестности точки $(0, 0, 0)$ функцию $\varepsilon : (x(\omega), \alpha) \to \varepsilon(x(\omega), \alpha)$ — непрерывную по $(x(\omega), \alpha)$ при $|x(\omega)| \leqslant R_1 \leqslant R$, $|\alpha| \leqslant \alpha_0^1 \leqslant \alpha_0$, причем $\varepsilon(0, 0) = 0$ и ε'_α непрерывна по $(x(\omega), \alpha)$ при $|x(\omega)| \leqslant R_1$, $|\alpha| \leqslant \alpha_0^1$.

Подставив $\varepsilon = \varepsilon(x(\omega), \alpha)$ в систему (14), получим тождество $\forall (x(\omega), \alpha) : |x(\omega)| \leqslant R_1$, $|\alpha| \leqslant \alpha_0^1$.

Из (11) и (13) следует, что при $x \in D^n_{R_1}$ оператор

$$T_x : \alpha \to \alpha^* = \alpha_m \operatorname{colon}(-c_1(\omega, x(\omega), \alpha, \varepsilon(x(\omega), \alpha)), \ldots, -c_{m-1}, 1) \quad (15)$$

имеет в шаре $|\alpha| \leqslant \alpha_0^1$ неподвижную точку, если α_m выбрать достаточно малым.

Очевидно, что $\forall x \in D^n_{R_1}$ неподвижная точка оператора T_x $\alpha_0(x) \neq 0$. Легко убедиться, что при малых α_m неподвижная точка оператора T_x единственная.

Покажем, что $\forall x \in D^n_{R_1}$ $\varepsilon(x(\omega), \alpha_0(x)) \neq 0$, где $\alpha_0(x)$ — неподвижная точка оператора T_x. Предположим, что $\exists \bar{x} \in D^n_{R_1}$ такой, что $\varepsilon(\bar{x}(\omega),$

$\alpha_0(\bar{x})) = 0$ Тогда если y_ω — ω-периодическое решение системы $\dot{y} = [B(\varepsilon) + g(t, \bar{x}, y, \varepsilon)] y$ с начальными данными $y(0) = \alpha_0(\bar{x})$, то справедливо равенство $\dot{y}_\omega = [B(0) + g(t, \bar{x}, y_\omega, 0)] y_\omega$, которое противоречит условию 5.

Таким образом, $\forall x \in D^n_{R_1}$ соответствуют вектор α, $0 < |\alpha| \leqslant \alpha_0^1$, и число $\varepsilon = \varepsilon(x(\omega), \alpha)$ такие, что система (2) имеет единственное ω-периодическое решение $y_\omega(t, x, \alpha, \varepsilon(x, \alpha))$ с начальными данными α, причем в силу непрерывности построенной функции $\varepsilon : (x(\omega), \alpha) \to \varepsilon(x(\omega), \alpha)$ и условий 4, 5 $\lim\limits_{\|x\| + |\alpha| \to 0} \| y_\omega(t, x, \alpha, \varepsilon(x, \alpha)) \| = 0$. Лемма доказана.

Теорема. *Если выполнены условия 1—5, то в любой достаточно малой окрестности нуля пространства $D^n_R \times D^m_r$ существует нетривиальное ω-периодическое решение u_ω = colon (x_ω, y_ω) системы (1), (2), в которой значение параметра ε достаточно мало.*

Доказательство. В силу леммы каждому $x \in D^n_{R_1}$ соответствует единственное ω-периодическое решение y_ω системы (2) с начальными данными α, $0 < |\alpha| \leqslant \alpha_0^1$, в которой $\varepsilon = \varepsilon(x(\omega), \alpha)$. Это соответствие задает оператор $Q : x \in D^n_{R_1} \to y_\omega = Qx \in D^m_r$ и функционал $\varepsilon : (x, \alpha) \to \varepsilon(x, \alpha)$, обладающие следующими свойствами:

$$\lim_{\|x\| + |\alpha| \to 0} \| Qx \| = 0, \qquad \lim_{\|x\| + |\alpha| \to 0} \varepsilon(x, \alpha) = 0, \tag{16}$$

где α — неподвижная точка оператора T_x.

Пользуясь равенством (15) и непрерывностью построенной в лемме функции $\varepsilon : (x(\omega), \alpha) \to \varepsilon(x(\omega), \alpha)$ по $(x(\omega), \alpha)$, убеждаемся, что неподвижная точка рассмотренного в лемме оператора T_x непрерывно зависит от x. Значит, оператор Q непрерывен в $D^n_{R_1}$.

Рассмотрим вспомогательную систему

$$\varepsilon(z) \dot{x} = A(t) x + f(t, z, Qz, \varepsilon(z)), \tag{17}$$

где $z \in D^n_{R_1}$.

Из условия 1 следует [4], что для любой непрерывной по t на $[0, \omega]$ ω-периодической вектор-функции $r : (t, \varepsilon) \to r(t, \varepsilon)$ при $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_1$ система $\varepsilon \dot{x} = A(t) x + r(t, \varepsilon)$ имеет единственное ω-периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, причем

$$\| x(t, \varepsilon) \| \leqslant N \| r(t, \varepsilon) \|, \tag{18}$$

где числа N и ε_1 зависят только от выбора матрицы $A(t)$.

Из (15) и (16) следует, что найдутся числа α_m и R_0, $0 < R_0 \leqslant R_1$, такие, что $\forall z \in D^n_{R_0}$ $Qz \in D^m_r$ и $|\varepsilon(z)| \leqslant \varepsilon_1$ (причем $\varepsilon(z) \neq 0$, если $\alpha_m \neq 0$).

Введем оператор $\Gamma : z \in D^n_{R_0} \to x = \Gamma z$, где x — ω-периодическое решение системы (17).

Из условия 2, непрерывности оператора Q и функционала ε по x следует непрерывность оператора Г. Докажем, что оператор Г вполне непрерывен. Во-первых, оператор Г отображает всякое ограниченное множество $D^n_a = \{z \in D^n_{R_0} : \|z\| \leqslant a \leqslant R_0\}$ в ограниченное множество пространства C^n_ω, так как в силу условия 2, неравенства (18) и непрерывности $\varepsilon \|x\| \leqslant N \varepsilon_1^2 h_0 a$. Далее покажем, что оператор Г преобразует всякое ограниченное подмножество D^n_a множества $D^n_{R_0}$ во множество равностепенно непрерывных на $[0, \omega]$ вектор-функций.

Для простоты ограничимся случаем, когда матрица $A(t)$ состоит из одного блока, собственные значения которого имеют отрицательные действительные части $\forall t \in [0, \omega]$, не превышающие число $-\nu < 0$. Тогда

$$x(t, \varepsilon) = X(t, 0, \varepsilon) [E - X(\omega, 0, \varepsilon)]^{-1} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\omega X(\omega, s, \varepsilon) f(s, z(s), Qz(s), \varepsilon) \, ds + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t X(t, s, \varepsilon) f(s, z(s), Qz(s), \varepsilon) \, ds, \tag{19}$$

где ε зависит от z и выбора α_m в (15), $X(t, s, \varepsilon)$ — фундаментальная матрица системы $\varepsilon\dot{x} = A(t)x$ такая, что $X(s, s, \varepsilon) = E$.

Справедливы следующие оценки:

$$|X(t, s, \varepsilon)| \leqslant K\exp\{-\nu(t-s)/(2\varepsilon)\}, \quad s \leqslant t, \tag{20}$$

$$|[E - X(\omega, 0, \varepsilon)]^{-1}| \leqslant C,$$

где постоянные K и C не зависят от ε [5]. $\forall t_1, t_2 \in [0, \omega]$ и $s \leqslant t_1, t_2$ имеем $|X(t_1, s, \varepsilon) - X(t_2, s, \varepsilon)| \leqslant A_0K|t_1 - t_2|/\varepsilon_1$. Отсюда с учетом соотношений (19), (20) получим $|x(t_1, \varepsilon(z, \alpha)) - x(t_2, \varepsilon(z, \alpha))| \leqslant (2A_0K^2C\nu^{-1}h_0\varepsilon_1 a + A_0K\omega h_0 a + Kh_0 a\varepsilon_1)|t_1 - t_2|$.

Таким образом, оператор Γ вполне непрерывен. В силу условия 2 и неравенства (18) выполняется неравенство

$$\|\Gamma z\| \leqslant N\varepsilon^2 h_0 \|z\|.$$

Из (16) следует, что существуют R^*, $0 < R^* \leqslant R_0$, и $\alpha_m > 0$ такие, что $\forall z \in D^n_{R^*}$ $\varepsilon^2(z, \alpha) \leqslant \dfrac{1}{Nh_0}$, т. е. $\|\Gamma z\| \leqslant R^*$. Значит, $\Gamma : D^n_{R^*} \to D^n_{R^*}$ и, следовательно, по принципу Шаудера вполне непрерывный оператор Γ имеет в замкнутом выпуклом ограниченном подмножестве $D^n_{R^*}$ банахова пространства C^n_ω неподвижную точку, а система (1), (2) — ненулевое ω-периодическое решение $u_\omega = (x_\omega, y_\omega) = (x_\omega, Qx_\omega)$, причем $Qx_\omega \neq 0$ в силу выбора α_m. Теорема доказана.

Замечание. Теорема останется справедливой, если неравенство в условии 2 заменить следующим: $|f(t, x, y, \varepsilon)| \leqslant \varepsilon^2 h_0(\|x\| + \|y\|)$.

1. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1966.— 331 с.
2. *Айзенгендлер П. Г., Алексеев А. Ф.* Ветвление периодических решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений // Диф. уравнения (качеств. теория).— Рязань : Рязан. пед. ин-т., 1984.— С. 8—23.
3. *Терехин М. Т.* Бифуркация периодического решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 3.— С. 390—393.
4. *Рожков В. И.* Периодические решения линейных систем с малым параметром при производной // Докл. АН СССР. Сер. мат.— 1975.— **224**, № 6.— С. 1268—1271.
5. *Флэтто Л., Левинсон Н.* Периодические решения сингулярно возмущенных систем // Сб. переводов : Математика.— 1958.— **2**, № 2.— С. 61—68.

Рязан. пед. ин-т Получено 21.04.87