УДК 513.88

*В. И. Горбачук, М. Л. Горбачук, А. Н. Кочубей*

# Теория расширений симметрических операторов и граничные задачи для дифференциальных уравнений

Теория расширений симметрических операторов — обширный раздел современного функционального анализа, имеющий разнообразные выходы в другие области математики. Первые основополагающие результаты здесь были получены фон Нейманом в 1929 г., хотя истоки, по-видимому, следует искать в известных работах Г. Вейля 1909—1910 гг., в которых основные ее моменты в случае индекса дефекта (1,1) были замечены на конкретном дифференциальном операторе, а также в многочисленных исследованиях по классической проблеме моментов. Существенное влияние на развитие теории расширений как в абстрактной постановке, так и в плане ее приложений, оказали работы М. Г. Крейна, после которых эта теория приобрела самостоятельное значение.

Цель статьи — дать обзор результатов, полученных за последние двадцать лет. Наблюдающееся в этот период возрастание интереса к данной тематике вызвано в основном применением теории к граничным задачам для дифференциальных уравнений и так называемым задачам продолжения в теории функций. Мы коснемся лишь первого из этих аспектов (относительно второго см., например, монографии [1, 2]).

1. Классическая теория расширений. 1. Замкнутый линейный оператор $A$ в гильбертовом пространстве $H$ называется симметрическим, если для любых векторов $f$, $g$ из его области определения $\mathcal{D}(A)$

$$(Af, g) = (f, Ag) \tag{1}$$

($(.,.)$— скалярное произведение в $H$). Ниже все симметрические операторы, если не указано обратное, предполагаются плотно заданными; в этом случае условие (1) эквивалентно включению $A \subset A^*$.

Оператор $\tilde{A} = \tilde{A}^* \supset A$ называется самосопряженным расширением $A$. Очевидно, что $A \subset \tilde{A} \subset A^*$. Естественно спросить, какие условия на оператор $A$ гарантируют существование самосопряженных расширений, и при наличии таковых, как их описать. Эта задача была решена еще фон Нейманом [3] следующим образом. Для любого невещественного числа $\lambda$ обозначим $\mathfrak{N}_\lambda = H \ominus (A - \lambda I)\mathcal{D}(A)$ ($I$ — единичный оператор). Подпространства $\mathfrak{N}_i$ и $\mathfrak{N}_{-i}$ называются дефектными, их размерности — дефектными числами, а пара чисел $(\dim \mathfrak{N}_i, \dim \mathfrak{N}_{-i})$ — индексом дефекта оператора $A$. Имеет место соотношение $\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_i \dotplus \mathfrak{N}_{-i}$, которое показывает, что симметрический оператор самосопряжен тогда и только тогда, когда его индекс дефекта равен нулю.

Для существования у оператора $A$ самосопряженных расширений необходимо и достаточно равенство его дефектных чисел; при этом произвольное самосопряженное расширение $\tilde{A}$ задается формулой

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_{-i} \dotplus U\mathfrak{N}_{-i}, \tag{2}$$

где $U$ — изометрия из $\mathfrak{N}_{-i}$ на $\mathfrak{N}_i$. Таким образом, описание самосопряженных расширений симметрического оператора сводится к нахождению изометрий из $\mathfrak{N}_{-i}$ на $\mathfrak{N}_i$ (подробно об этом см., например, в [4]).

В случае, когда дефектные числа оператора $A$ не равны, то, как показал М. А. Наймарк [5], существуют самосопряженные расширения, однако не в $H$, а в более широком гильбертовом пространстве $\tilde{H} \supset H$. Исследованию таких расширений и их спектральных функций посвящены работы М. А. Наймарка, А. И. Плеснера, М. Г. Крейна, А. В. Штрауса и др. (см. обзоры [6—8]). К этому кругу вопросов относится также исследование обобщенных резольвент — оператор-функций вида $R(z) = P(\tilde{A} - zI)^{-1}|_H$, где $P$ — ортопроектор $\tilde{H}$ на $H$, $\tilde{A}$ — самосопряженное расширение с выходом в $\tilde{H}$.

Аналог представления (2) имеет место и для некоторых других классов расширений, в частности для максимальных диссипативных расширений симметрического оператора. Напомним, что линейный оператор $T$ называется диссипативным, если $\operatorname{Im}(Tf, f) \geqslant 0$ $\forall f \in \mathcal{D}(T)$, и максимальным диссипативным, если он диссипативен и не имеет нетривиальных (т. е. отличных от самого $T$) диссипативных расширений. Как и самосопряженные, максимальные диссипативные расширения оператора $A$ являются сужениями $A^*$ [9] (см. также [10, 11]). Их описание дается формулой (2), где $U : \mathfrak{N}_{-i} \to \mathfrak{N}_i$ — сжатие [10].

Много публикаций посвящено распространению изложенных выше результатов на неплотно заданные операторы (как правило, такие операторы мы не будем рассматривать). В самостоятельную теорию выросла изучавшаяся Э. Р. Цекановским и Ю. Л. Шмульяном задача о расширении симметрического оператора в оснащенном гильбертовом пространстве (по этому поводу см. [12]). Один естественный класс несамосопряженных расширений («правильные» расширения) рассмотрен в серии работ А. В. Кужеля и его учеников (см., например, [13]).

2. Значительное место в теории расширений занимает исследование полуограниченных операторов. Пусть симметрический оператор $A$ таков, что $(Af, f) \geqslant \gamma(f, f)$ $\forall f \in \mathcal{D}(A)$; не ограничивая общности, считаем $\gamma > 0$. В [3] фон Нейман доказал существование для любого $\nu < \gamma$ самосопряженного расширения с нижней гранью $\nu$ и высказал предположение, что существует и самосопряженное расширение, имеющее нижнюю грань $\gamma$. Такое расширение построено М. Стоуном и К. Фридрихсом (конструкция расширения $A_\infty$, называемого расширением по Фридрихсу, имеется во многих книгах по теории операторов, например в [14]). Еще одно полуограниченное самосопряженное расширение $A_0 \supset A$ было указано в [3]. Его область определения имеет вид $\mathcal{D}(A_0) = \mathcal{D}(A) \dot{+} \operatorname{Ker} A^*$.

Значения $A_0$ и $A_\infty$ для классификации полуограниченных расширений выяснено М. Г. Крейном [15]. Оказывается, для произвольного полуограниченного самосопряженного расширения $\tilde{A} \supset A$ имеет место неравенство $A_0 \leqslant \tilde{A} \leqslant A_\infty$ (понимаемое в смысле квадратичных форм). Для обыкновенных дифференциальных операторов и эллиптических операторов в частных производных расширение $A_\infty$ соответствует, как показано в [15, 16], граничной задаче Дирихле.

В работах М. И. Вишика [17] и М. Ш. Бирмана [18] (по поводу работ М. Г. Крейна, М. И. Вишика и М. Ш. Бирмана см. также обзор [19]) различным классам расширений положительно определенного оператора ставятся в соответствие некоторые операторы в подпространстве $\operatorname{Ker} A^*$ (в приложениях к дифференциальным уравнениям их в некоторых случаях удается преобразовать в операторы, определяющие граничные условия; о последующем развитии этих идей речь будет идти в п. 2). Так, произвольное самосопряженное расширение $\tilde{A} \supset A$ имеет область определения $\mathcal{D}(\tilde{A}) = \mathcal{D}(A) \dot{+} (A_\infty^{-1} + B)\tilde{U}_1 \dot{+} U_0$, где $B$ — самосопряженный оператор в подпространстве $U_1 \subset \operatorname{Ker} A^*$, $\mathscr{D}(B) = \tilde{U}_1$ плотно в $U_1$, $U_0 = (\operatorname{Ker} A^*) \ominus U_1$ (см. [17]).

В [18] получены критерии положительности и положительной определенности расширения $\tilde{A}$ и характеристика отрицательной части его спектра (если $\tilde{A}$ не положительно), формулируемые в терминах оператора $B$. В этой же работе приведены необходимые условия полуограниченности $\tilde{A}$; в [20] доказано, что в случае, когда спектр $A_\infty$ дискретный, эти условия являются также достаточными. Позже доказательство последнего факта было дано также в работе [21], содержащей, кроме того, признаки сходимости (в равномерном резольвентном смысле) к $A_\infty$ заданной последовательности самосопряженных расширений оператора $A$. В дальнейшем теория расширений полуограниченных операторов развивалась Ю. М. Арлинским, А. В. Кужелем, Э. Р. Цекановским и другими авторами в направлении исследования их несамосопряженных расширений (аккретивных, секториальных и т. п.).

3. Пусть $J$ — инволюция в гильбертовом пространстве $H$, $A$ — замкнутый плотно заданный линейный оператор в $H$. Оператор $A$ называется $J$-симметрическим, если $A \subset JA^*J$, и $J$-самосопряженным, если $A = JA^*J$. Как показано в [22], всякий $J$-симметрический оператор допускает $J$-самосопряженное расширение (доказательство этого факта приведено в [23]). Различные способы описания $J$-самосопряженных расширений (всех или некоторых из подклассов), в той или иной мере напоминающие результаты теории симметрических операторов, изложены в [24—27].

4. Естественным обобщением линейного оператора в гильбертовом пространстве $H$ является линейное отношение, т. е. линейное подмножество $\theta \subset H \oplus H$. Замкнутое отношение назовем просто подпространством. Линейное отношение $\theta$ называется симметрическим, если $\operatorname{Im}(g, f) = 0$ для любых $\{f, g\} \in \theta$. Определив сопряженное подпространство к $\theta$ как $\theta^* = \{\{h, k\} \in H \oplus H \mid (g, h) = (f, k)\ \forall \{f, g\} \in \theta\}$, условие симметрии $\theta$ можно записать в виде $\theta \subset \theta^*$. Если $\theta = \theta^*$, подпространство $\theta$ называется самосопряженным (или эрмитовым). Отношение $\theta$ называется диссипативным, если для произвольных $\{f, g\} \in \theta$ $\operatorname{Im}(g, f) \geqslant 0$, и максимальным диссипативным, если, кроме того, оно не имеет нетривиальных диссипативных расширений (под расширением $\theta$ понимается отношение $\tilde{\theta} \supset \theta$). В случае, когда $\theta$ представляет собой график линейного оператора в $H$, введенные выше понятия совпадают с соответствующими понятиями для операторов. Как обобщения $J$-симметрических операторов рассматриваются и $J$-симметрические отношения. Роль сопряженного подпространства здесь играет $\theta^{[*]} = \{\{h, k\} \in H \oplus H \mid (g, Jh) = (f, Jk)\quad \forall \{f, g\} \in \theta\}$.

Теория линейных отношений развивалась в двух направлениях. С одной стороны, переносились факты, известные для операторов, в том числе большинство описанных выше результатов теории симметрических и $J$-симметрических операторов. Заметим, что для неплотно заданного оператора $A$ $A^*$ не имеет смысла; но если отождествить $A$ с его графиком, то $A^*$ определено как подпространство в $H \oplus H$ и совершенно естественным становится исследование отношений-расширений $\tilde{A}$, $A \subset \tilde{A} \subset A^*$.

С другой стороны, для описания различных классов расширений симметрических операторов (см. п. 2) оказались полезными теоремы о представлении линейных отношений в виде множества решений операторных уравнений. Первый результат такого типа принадлежит Ф. С. Рофе-Бекетову [28], доказавшему, что для любого самосопряженного отношения $\theta \subset H \oplus H$ существует единственный унитарный в $H$ оператор $U$ такой, что $\{f, g\} \in \theta$ тогда и только тогда, когда

$$(U - I) g + i (U + I) f = 0. \tag{3}$$

Максимальные диссипативные расширения описываются, как показано в [29] (см. также [11]), уравнением вида (3), где $U$ — сжатие в $H$. Для характеризации $J$-самосопряженных подпространств (т. е. подпространств $\theta =$

$= \theta^{[*]} \subset H \oplus H$) удобно указать ортопроекторы на такие подпространства Согласно [30], область значений ортопроектора $P = \| P_{ik} \|_{i,k=1}^{2}$ в $H \oplus H$ является $J$-самосопряженным подпространством в том и только том случае, когда: 1) $I - P_{11} = JP_{22} J$; 2) операторы $P_{12}$, $P_{21}$ $J$-самосопряженные.

Ряд других результатов по представлению линейных отношений имеется в [31—35]. Заметим, что мы не касались линейных отношений и операторов в пространствах с индефинитной метрикой.

**2.** Метод абстрактных граничных условий. 1. В спектральной теории дифференциальных операторов и ее приложениях симметрические операторы, как правило, появляются следующим образом. Пусть $l$ — формально самосопряженное дифференциальное выражение в области $G \subset \mathbb{R}^n$. Определим оператор $A$ в $L_2(G)$ как замыкание оператора, заданного выражением $l$ на функциях из $\overset{\circ}{C}{}_0^{\infty}(G)$. Симметрический оператор $A$ называется минимальным оператором, порожденным $l$. Оказывается, что оператор $\tilde{A} : \tilde{A}u = l[u]$, заданный на функциях, удовлетворяющих однородным граничным условиям,— расширение $A$ и сужение $A^*$ Поэтому возникли задачи: а) выделить те граничные условия, которые определяют самосопряженные расширения $\tilde{A}$; б) выяснить, все ли самосопряженные расширения оператора $A$ определяются граничными условиями. Ответ на эти вопросы представляет значительный интерес в теории краевых задач и впервые был дан М. Г. Крейном [15] для обыкновенного формально самосопряженного $l$, исходя из изложенной выше общей теории расширений симметрических операторов. Применение же этой теории к дифференциальным с частными производными или дифференциально-операторным выражениям в бесконечномерном гильбертовом пространстве $H$ затруднено в связи с бесконечностью дефектных чисел оператора $A$, вследствие чего описание самосопряженных расширений формулой (2) не удалось переформулировать в терминах граничных условий.

Существенным скачком в преодолении выявленных затруднений явилась работа Ф. С. Рофе-Бекетова [36] (см. также [28]), в которой в компактной форме, содержащей граничные условия, были описаны все самосопряженные расширения минимального оператора (индекс дефекта $(\infty, \infty)$), порожденного общим обыкновенным дифференциальным самосопряженным выражением порядка $m$ на конечном интервале $[0, b]$ с непрерывными операторными коэффициентами. Основную роль при этом сыграли формула Грина

$$\langle l[x], y\rangle - \langle x, l[y]\rangle = (\hat{x}', \hat{y})_m - (\hat{x}, \hat{y}')_m, \tag{4}$$

установленная для любых вектор-функций $x(t)$, $y(t)$ из области определения максимального оператора $A^*$ (здесь $\langle .,. \rangle$ — скалярное произведение в пространстве $L_2((0, b), H)$, $\hat{x}$ и $\hat{x}'$ — $m$-мерные векторы, компонентами которых служат значения $x(t)$ и ее производных в концах интервала, $(.,.)_m$— скалярное произведение в $H^m = H \oplus \ldots \oplus H$ ($m$ слагаемых)), и впервые примененное для указанных целей представление (3) линейного самосопряженного отношения. Сам результат состоит в том, что между самосопряженными расширениями $\tilde{A}$ минимального оператора и самосопряженными отношениями $\theta$ в $H^m$ существует взаимно однозначное соответствие, в силу которого всякое $\tilde{A}$ порождается операцией $l[y]$ и краевыми условиями любого из видов

$$\cos C\,\hat{y}' - \sin C\hat{y} = 0, \quad (K - I)\,\hat{y}' + i\,(K + I)\,\hat{y} = 0, \tag{5}$$

где $C$ и $K$ — соответственно самосопряженный и унитарный операторы в $H^m$. Обратно, любым из таких краевых условий определяется некоторое самосопряженное расширение оператора $A$.

Затем техника линейных отношений была использована М. Л. Горбачуком [37] при решении поставленных выше задач в том случае, когда $l$ — выражение Штурма—Лиувилля $-y''(t) + qy(t)$ с неограниченным операторным потенциалом $q \geqslant 0$. Заметим, что наличие неограниченного операторного коэффициента существенно меняет дело: принадлежащая области определения максимального оператора функция является достаточно гладкой лишь внутри интервала, ее граничные значения, равно как и граничные значения ее производной, могут не существовать в $H$ — они существуют в более широком по сравнению с $H$ пространстве обобщенных элементов. Поэтому формула Грина в виде (4) уже не имеет смысла. Однако в [37] подобраны такие линейные комбинации обобщенных граничных значений вектор-функции $x(t)$ из $\mathcal{D}(A^*)$ и ее производной, которые все же принадлежат $H$ и, будучи взятыми в роли компонент векторов $\hat{x}$ и $\hat{x}'$, снова приводят к формуле (4). А это, опять же благодаря представлению (3), позволило получить все самосопряженные расширения минимального оператора с помощью условий вида (5), в которых векторы $\hat{x}$ и $\hat{x}'$, $\hat{y}$ и $\hat{y}'$ построены по новому образцу.

Если спектр оператора-коэффициента $q$ дискретен, то, как показано в [38, 39], у оператора $A$ всегда имеются самосопряженные расширения с дискретным спектром и все они описываются условиями (5) с вполне непрерывными $\cos C$ и $K-I$. Зная асимптотическое распределение собственных значений оператора $q$, удалось найти самосопряженные расширения $\tilde{A}$ с таким же, как у задачи Дирихле, главным членом асимптотики спектра, а также выделить расширения с более густым, чем в этой задачи, спектром. Далее был описан целый ряд других расширений — гладкие, с конечным квадратичным функционалом, с резольвентой из класса Неймана—Шаттена [39], с определенной асимптотикой не только главного, но и других членов, а также остатка [40], резольвентно сравнимые [41] и др. В работе [29] получено представление для диссипативных линейных отношений, на основании чего изучены максимальные диссипативные, в том числе самосопряженные расширения минимального оператора, порожденного двучленным дифференциальным выражением $2n$-го порядка $(-1)^n y^{(2n)}(t)+qy(t)$, а вскоре аналогичные исследования были проведены и для уравнения Штурма — Лиувилля с переменным коэффициентом, значениями которого служат неограниченные операторы [42, 43], а также с $q<0$ [44]. Оказалось, что разработанная в [36—39] методика описания и классификации расширений минимального оператора, порожденного дифференциальными выражениями, носит универсальный характер и, как показали в дальнейшем независимо друг от друга А. Н. Кочубей [45] и В. М. Брук [46], может быть распространена на произвольные симметрические операторы. Заметим, что попытка построения теории расширений в терминах абстрактных граничных условий, приводящих в случае дифференциального оператора непосредственно к краевым задачам, предпринимались и ранее [14, 47—49]. Однако законченные результаты удавалось получать лишь для операторов с конечными дефектными числами. Остановимся на этом более подробно.

Пусть $A$ — замкнутый плотно заданный симметрический оператор с равными, конечными или бесконечными, дефектными числами в гильбертовом пространстве $H$ Тройка $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ — линейные отображения из $\mathcal{D}(A^*)$ в $\mathcal{H}$, называется пространством граничных значений (ПГЗ) оператора $A$, если:

1) для любых $f, g \in \mathcal{D}(A^*)$

$$(A^*f, g)-(f, A^*g)=(\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}}-(\Gamma_2 f, \Gamma_1 g)_{\mathcal{H}};$$

2) для любых $F_1, F_2 \in \mathcal{H}$ существует такой вектор $f \in \mathcal{D}(A^*)$, что $\Gamma_1 f = F_1$, $\Gamma_2 f = F_2$. Из определения следует, что $f \in \mathcal{D}(A)$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1 f = \Gamma_2 f = 0$.

Термин «ПГЗ» оправдывается тем, что широкие классы дифференциальных операторов обладают ПГЗ, непосредственно связанными с краевыми задачами. Так, если $H = L_2(a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, $A$ — минимальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $-d^2/dt^2$, то можно взять

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}^2, \quad \Gamma_1 f = \{f'(a), f'(b)\}, \Gamma_2 f = \{f(a), -f(b)\}.$$

Если $H$ — пространство вектор-функций $L_2((a, b), H_1)$, где $H_1$ — бесконечномерное гильбертово пространство, и $A$ — минимальный оператор, порожденный выражением $l = -d^2/dt^2 + A_1$ ($A_1$—положительно определенный самосопряженный оператор в $H_1$), то [37] ПГЗ можно построить, используя регуляризованные граничные значения:

$$\mathcal{H} = H_1 \oplus H_1, \quad \Gamma_1 f = \{\hat{A}_1^{1/4}(f'(a) + \hat{A}_1^{1/2} f(a)), \quad \hat{A}_1^{1/4}(f'(b) - \hat{A}_1^{1/2} f(b))\},$$

$$\Gamma_2 f = \{\hat{A}_1^{-1/4} f(a), -\hat{A}_1^{-1/4} f(b)\},$$

где $\hat{A}_1$ — расширение по непрерывности оператора $A_1$ в пространстве обобщенных векторов, в котором существуют граничные значения функции $f \in \mathcal{D}(A^*)$ и ее производной. Такого рода конструкции ПГЗ известны в настоящее время для многих дифференциальных операторов (см. [11] и указанную там литературу).

Если для оператора $A$ задано ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, то каково бы ни было сжатие $K$ в $\mathcal{H}$, сужение $A^*$ на множество векторов $f \in \mathcal{D}(A^*)$, удовлетворяющих уравнению

$$(K - I)\Gamma_1 f + i(K + I)\Gamma_2 f = 0, \tag{6}$$

представляет собой максимальное диссипативное расширение оператора $A$. Обратно, всякое максимальное диссипативное расширение $\tilde{A}$ оператора $A$ является сужением $A^*$ на множество $f \in \mathcal{D}(A^*)$, удовлетворяющих (6), причем сжатие $K$ определяется по расширению однозначно. Самосопряженные расширения отвечают условиям (6), в которых $K$— унитарный оператор в $\mathcal{H}$. Подобным же образом можно описать и некоторые другие классы расширений (симметрические, максимальные симметрические и др.) [11, 45, 46]. Доказательство всех этих результатов сводится к изучению отношения $\{\{\Gamma_1 f, \Gamma_2 f\} \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \mid f \in \mathcal{D}(\tilde{A})\}$. Остается лишь отметить [45, 46], что для любого симметрического оператора с индексом дефекта $(n, n)$, $n \leqslant \infty$, существует ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ с $\dim \mathcal{H} = n$. В частности, ПГЗ можно выбрать так:

$$\mathcal{H} = \mathfrak{N}_{-i}, \quad \Gamma_1 = P_{-i} + UP_i, \quad \Gamma_2 = -iP_{-i} + iUP_i, \tag{7}$$

где $U$ — изометрия $\mathfrak{N}_i$ на $\mathfrak{N}_{-i}$, $\mathfrak{N}_{-i}$ рассматривается как гильбертово пространство со скалярным произведением, индуцированным из $H$, $P_{\pm i}$ — проектор $\mathcal{D}(A^*)$ на $\mathfrak{N}_{\pm i}$ параллельно $\mathcal{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_{\mp i}$.

В приложениях целесообразно выбирать ПГЗ, связанные с краевыми задачами; выбор ПГЗ в виде (7) соответствует конструкции классической теории расширений.

Наряду с приведенным выше описанием расширений в [46] получено описание обобщенных резольвент симметрического оператора с помощью абстрактного граничного условия вида (6), в котором сжатие зависит от спектрального параметра; для ПГЗ вида (7) этот результат эквивалентен теореме А. В. Штрауса [50]. Назовем еще работу О. Г. Сторожа [51], посвященную нахождению в терминах абстрактных граничных условий максимальных диссипативных расширений симметрического оператора с, вообще говоря, не равными дефектными числами.

2. Пусть оператор $A$ положительно определен. Зафиксируем некоторое положительно определенное самосопряженное расширение $\tilde{A} \supset A$. Тогда

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(\tilde{A}) \dotplus \operatorname{Ker} A^*. \tag{8}$$

Обозначим через $\tilde{P}$ и $P_0$ проекторы $\mathcal{D}(A^*)$ на $\mathcal{D}(\tilde{A})$ и $\operatorname{Ker} A^*$, соответствующие разложению (8). ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ оператора $A$ называется позитивным, ассоциированным с разложением (8), если для любых $f, g \in \mathcal{D}(A^*)$

$$(A^* f, g) = (\tilde{A}\tilde{P} f, \tilde{P} g) + (\Gamma_1 f, \Gamma_2 g)_{\mathcal{H}}.$$

Если задано позитивное ПГЗ, то, как установлено в [52] (см. также [11]), собственные разрешимые расширения (т. е. операторы $A' : A \subset A' \subset A^*$, имеющие ограниченный обратный, определенный на всем $H$) описываются с помощью абстрактного граничного условия

$$\Gamma_2 f = B\Gamma_1 f, \tag{9}$$

где $B$ — произвольный ограниченный оператор в $\mathscr{H}$. Далее [11] доказано, что условие (9) с неотрицательным $B$ задает положительно определенное расширение; если $\tilde{A}$ — расширение по Фридрихсу, то всякое положительно определенное самосопряженное расширение может быть получено с помощью граничного условия вида (9) с $B > 0$. Подобным образом можно описать и максимальные секториальные расширения [33, 52]; более сложный случай, когда оператор $A$ неотрицателен, рассмотрен в [53—55]. В [56] изучаются симметрические операторы со спектральными лакунами; найдены все самосопряженные расширения, для которых лакуны сохраняются, либо в каждую из лакун вносится конечное число собственных значений. Описаны обобщенные резольвенты расширений такого типа.

Всякий положительно определенный симметрический оператор обладает позитивным ПГЗ. Достаточно положить [52]

$$\mathscr{H} = \operatorname{Ker} A^*, \quad \Gamma_1 = P\tilde{A}\tilde{P}, \quad \Gamma_2 = P_0, \tag{10}$$

где $P$ — ортопроектор на $\operatorname{Ker} A^*$ в $H$. Для ПГЗ вида (10) описание расширений условием (9) эквивалентно соответствующим результатам классической теории расширений [17, 18]. С другой стороны, для многих дифференциальных операторов известны позитивные ПГЗ, связанные с краевыми задачами [31, 57, 58]. Отметим класс задач, в которых расширения в терминах граничных условий получаются уже с помощью ПГЗ (10). Таковы эллиптические операторы на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$, где $\Omega$ — замкнутое подмножество меры нуль (подробности и библиографию см. в [59]). Например, в изучавшемся многими авторами, начиная с Ф. А. Березина и Л. Д. Фаддеева [60], случае $n = 3$, $\Omega = \{0\}$, $\mathscr{D}(A) = \{u \in H^2(\mathbb{R}^3) \mid u(0) = 0\}$, $Au = -\Delta u + \alpha u$, $\alpha > 0$, использование ПГЗ (10) приводит к весьма компактному описанию всех самосопряженных расширений (справедливому и при $\alpha = 0$). Именно,

$$\mathscr{D}(A^*) = \left\{ u(x) + c\,\frac{e^{-|x|}}{|x|} \,\middle|\, u \in H^2(\mathbb{R}^3),\ c \in \mathbb{C}^1 \right\};$$

самосопряженные расширения выделяются одним из условий: $c = 0$ или $u(0) + \gamma c = 0$, $\gamma \in \mathbb{R}^1$. Еще одна конструкция ПГЗ для полигармонического оператора в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ имеется в [61]. По поводу задач теории расширений, относящихся к подобным операторам, см. также обзоры [62, 63].

Понятие позитивного ПГЗ и связанные с ним результаты, сформулированные выше, допускают распространение в различных направлениях. Вместо положительно определенного $A$ можно рассматривать оператор, у которого 0 — точка регулярного типа [33], а также некоторые несимметрические операторы [32]. В работах Л. И. Вайнермана [32] и В. А. Михайлеца [33] изучен ряд других классов расширений (сужений $A^*$) — замкнутые, нормально разрешимые, фредгольмовы и др.

3. Основной целью при стремлении описывать расширения граничными условиями в [15—18, 39] было получение в их терминах теорем о спектральных свойствах различных краевых задач для рассматриваемых дифференциальных уравнений. Аналогичную цель в общей ситуации преследует и метод абстрактных граничных условий: налагая разного рода ограничения на $K$ и $B$ в (6) и (9) (в приложениях это соответствует выбору определенных классов граничных задач), исследовать свойства соответствующих им расширений. Приведем несколько результатов такого сорта.

Пусть задано ПГЗ $(\mathscr{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ симметрического оператора $A$. Обозначим через $A_K$ максимальное диссипативное расширение, отвечающее абстрактному граничному условию (6). Предположим, что задано еще одно расширение $A_L$, $L$ — сжатие в $\mathcal{H}$. Следующая теорема о резольвентной сравнимости, различные доказательства которой можно найти в [11, 64], принадлежит в основном В. М. Бруку [65] (для операторов специального вида подобные результаты см. также в [41]). Пусть $\lambda$ — регулярная точка операторов $A_K$ и $A_L$. Для того чтобы разность резольвент $R_\lambda(A_K) - R_\lambda(A_L)$ принадлежала идеалу Неймана—Шаттена $\gamma_p$ в $H$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, необходимо и достаточно, чтобы $K - L \in \gamma_p$ в $\mathcal{H}$. Если операторы $K$, $L$ унитарные (т. е. $A_K$, $A_L$ — самосопряженные расширения) и $K - L \in \gamma_\infty$, то существенные спектры $A_K$ и $A_L$ совпадают. В общем случае диссипативных расширений для исследования спектра используется другая методика, которую мы опишем ниже. В предположении, что оператор $A_K$ имеет дискретный спектр со степенной асимптотикой $s$-чисел резольвенты $R_\lambda(A_K)$ и известна асимптотика $s$-чисел $s_n(K - L)$, в [65] (см. также [11, 64]) вычислена асимптотика $s$-чисел $R_\lambda(A_L)$. Подобные теоремы о «возмущении граничного условия» доказаны в [52] (см. также [11]) и для собственных разрешимых расширений положительно определенного оператора $A$.

4. На основании приведенного выше описания максимальных диссипативных расширений в [66] развит подход к понятию характеристической функции симметрического оператора, ориентированный на применение к исследованию спектров граничных задач.

Характеристическая функция симметрического оператора была впервые построена М. С. Лившицем [67] (в случае конечных дефектных чисел) и А. В. Штраусом [10, 68] (в общем случае) на базе классической теории расширений. Из приводимого ниже определения характеристическая функция в смысле А. В. Штрауса получается в частности, если ПГЗ имеет вид (7).

Пусть $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — произвольное ПГЗ симметрического оператора $A$. Обозначим через $A_\lambda$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$, расширение $A$, заданное равенствами

$$\mathcal{D}(A_\lambda) = \mathcal{D}(A) \dotplus \mathfrak{N}_{\bar\lambda},\ A_\lambda(f + \varphi) = Af + \lambda\varphi, \quad f \in \mathcal{D}(A), \quad \varphi \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}.$$

Известно [10], что оператор $A_\lambda$ максимально диссипативен, так что $\mathcal{D}(A_\lambda)$ описывается абстрактным граничным условием

$$(C(\lambda) - I)\,\Gamma_1 f + i\,(C(\lambda) + I)\,\Gamma_2 f = 0,$$

где $C(\lambda)$ — сжатие в $\mathcal{H}$. Оператор-функция $C(\lambda)$, $\operatorname{Im}\lambda > 0$, называется характеристической функцией оператора $A$. В [66] показано, что $C(\lambda)$ голоморфна, причем $\| C(\lambda) \|_{\mathcal{H}} < 1$. Характеристические функции, построенные по разным ПГЗ, связаны дробно-линейным преобразованием с операторными коэффициентами интерсферического типа [69].

Термин «характеристическая функция» оправдывается следующим результатом [66]. Для того чтобы простые симметрические операторы $A_1$ и $A_2$ в пространстве $H$ были унитарно эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы для $A_1$ и $A_2$ существовали соответственно ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1^1, \Gamma_2^1)$ и $(\mathcal{H}, \Gamma_1^2, \Gamma_2^2)$ ($\mathcal{H}$ одно и то же) такие, что соответствующие характеристические функции совпадают: $C^1(\lambda) = C^2(\lambda)$. Это утверждение можно трактовать как теорему единственности для абстрактной обратной задачи. Вычислив $C(\lambda)$ для оператора Штурма — Лиувилля на полуоси с естественным ПГЗ, нетрудно убедиться, что речь идет фактически об абстрактном аналоге теорем А. Н. Тихонова [70, 71] о единственности решения обратной задачи с заданием импеданса.

Пусть $\Pi(A)$ — множество вещественных точек регулярного типа оператора $A$. Определение оператора $A_\lambda$ имеет смысл и при $\lambda \in \Pi(A)$; в этом случае $A_\lambda$ самосопряжен [72], а соответствующий оператор $C(\lambda)$ унитарен и совпадает с аналитическим продолжением оператор-функции $C(\lambda)$ из верхней полуплоскости (аналитическое продолжение характеристической по Штраусу функции изучалось в [73]).

Приведем описание спектра расширения $A_K$, отвечающего условию (6), в терминах характеристической функции [66, 72]. Для любого замкнутого оператора $T$ обозначим его непрерывный и остаточный спектры соответственно через $\sigma_c(T)$ и $\sigma_r(T)$. Пусть число $\lambda$ принадлежит либо $\Pi(A)$, либо открытой верхней полуплоскости. Число $\lambda$ является собственным значением кратности $\nu \leqslant \infty$ оператора $A_K$ тогда и только тогда, когда 0 — собственное значение кратности $\nu$ оператора $C(\lambda) - K$. Для того чтобы $\lambda \in \sigma_r(A_K)$ ($\lambda \in \sigma_c(A_K)$), необходимо и достаточно, чтобы $0 \in \sigma_r(C(\lambda) - K)$ (соответственно $0 \in \sigma_c(C(\lambda) - K)$). Полезность этой характеризации спектра для приложений обусловлена как голоморфностью $C(\lambda)$, так и простотой вхождения оператора $K$ в выражение для голоморфной функции $C(\lambda) - K$, в «нулях» которой лежат точки спектра. Применяя теорию возмущений, нетрудно получить теоремы об устойчивости тех или иных свойств спектра [66]. Например, если сжатие $K$ таково, что для некоторого унитарного в $\mathcal{H}$ оператора $U$ оператор $K - U$ вполне непрерывен, то невещественная часть спектра оператора $A_K$ может состоять только из собственных значений конечной кратности, причем для любого $\lambda$ ($\operatorname{Im} \lambda > 0$)

$$\operatorname{ind}(A_K - \lambda I) \equiv \dim \operatorname{Ker}(A_K - \lambda I) - \dim \operatorname{Ker}(A_K^* - \bar{\lambda} I) = 0.$$

Наряду с характеристической функцией $C(\lambda)$ удобно рассматривать ее дробно-линейное преобразование

$$M(\lambda) = -i(C(\lambda) - I)^{-1}(C(\lambda) + I),$$

называемое функцией Вейля оператора $A$. Как показано в [64], $M(\lambda)$ является $Q$-функцией оператора $A$. Результаты теории $Q$-функций [74, 75] позволяют получить ее полную аналитическую характеристику. В [64] вычислены функции Вейля различных конкретных операторов.

5. В. А. Деркач и М. М. Маламуд [64] изучили класс почти разрешимых расширений симметрического оператора $A$, т. е. расширений $\tilde{A} : A \subset \tilde{A} \subset A^*$, для которых существуют такие ПГЗ ($\mathcal{H}$, $\Gamma_1$, $\Gamma_2$) и ограниченный оператор $B$ в пространстве $\mathcal{H}$, что

$$\mathcal{D}(\tilde{A}) = \{f \in \mathcal{D}(A^*) \mid \Gamma_1 f = B\Gamma_2 f\}.$$

Получено внутреннее описание этого класса. Приведем простое достаточное условие. Расширение $\tilde{A} \subset A^*$ почти разрешимо, если оно имеет две регулярные точки $z_1$, $z_2$ со свойством $\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2 < 0$. Результаты пп. 3, 4 о спектре диссипативных расширений распространены на почти разрешимые (а также более общие) расширения. Построена теория их характеристических функций.

6. В исследовании уравнений математической физики значительную роль играют вопросы групповой инвариантности уравнений и многообразий их решений. Групповые свойства краевых задач пока изучены мало. В [76] этот вопрос рассматривается в контексте теории расширений симметрических операторов.

Пусть $A$ — симметрический оператор в гильбертовом пространстве $H$, $\mathfrak{A}$ — некоторое множество унитарных в $H$ операторов, обладающее тем свойством, что из $U \in \mathfrak{A}$ следует $U^{-1} \in \mathfrak{A}$. Предположим, что для $U \in \mathfrak{A}$

$$UA = AU. \tag{11}$$

Такой оператор $A$ называется $\mathfrak{A}$-инвариантным. Рассмотрим вопрос о существовании у него $\mathfrak{A}$-инвариантных самосопряженных расширений. Р. Филлипс [77] показал, что расширение по Фридрихсу $\mathfrak{A}$-инвариантного полуограниченного оператора $\mathfrak{A}$-инвариантно. С другой стороны, им же был построен симметрический оператор $A_0$ с индексом дефекта (1,1), инвариантный относительно некоторого коммутативного семейства и не имеющий инвариантных самосопряженных расширений.

Пусть $C(\lambda)$, $\operatorname{Im} \lambda > 0$,— характеристическая по Штраусу функция оператора $A$. В [76] получена следующая теорема. Для того чтобы из $\mathfrak{A}$-инвариантности оператора $A$ следовало (каково бы ни было семейство $\mathfrak{A}$) существование $\mathfrak{A}$-инвариантного самосопряженного расширения $\tilde{A} \supset A$, необходимо, чтобы $C(\lambda) \not\equiv 0$, и достаточно, чтобы при некотором $\lambda_0$ оператор $C(\lambda_0)$ имел ограниченный обратный. Отсюда и из свойств характеристической функции получается, в частности, что $\mathfrak{A}$-инвариантный оператор, имеющий вещественную точку регулярного типа, обладает $\mathfrak{A}$-инвариантным самосопряженным расширением. С другой стороны, существует лишь один (с точностью до унитарной эквивалентности) простой симметрический оператор с индексом дефекта (1,1), $\mathfrak{A}$-инвариантный и не имеющий $\mathfrak{A}$-инвариантных самосопряженных расширений — оператор Филлипса $A_0$.

Укажем эквивалентную форму условия $\mathfrak{A}$-инвариантности: $BA \subset AB$ для любого оператора $B$ из $C^*$-алгебры операторов $\mathcal{B}$ с единицей ($\mathfrak{A}$ — множество всех унитарных операторов из $\mathcal{B}$). Условие (11) нельзя заменить более слабым условием $UA \subset A^*U$. Как утверждается в [78], в этом случае существование $\mathfrak{A}$-инвариантных самосопряженных расширений имеет место лишь при некоторых более жестких ограничениях. Здесь же изучены расширения, коммутирующие (в указанном слабом смысле) с операторами из некоторой $W^*$-алгебры; случай полуограниченных операторов исследован в [79]. Заметим еще, что $\mathfrak{A}$-инвариантный симметрический оператор всегда имеет $\mathfrak{A}$-инвариантное максимальное диссипативное расширение: таково, например, использованное в п. 4. расширение $A^\lambda$.

Далее [76] рассматривается задача описания инвариантных расширений. Пусть $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — ПГЗ $\mathfrak{A}$-инвариантного симметрического оператора $A$. Отображение $\gamma$ множества $\mathfrak{A}$ в множество всех унитарных операторов в $\mathcal{H}$ называется граничным представлением $\mathfrak{A}$, если для всех $U \in \mathfrak{A}$ $\gamma(U)\Gamma_i = \Gamma_i U$, $i = 1, 2$. Если $\gamma$ — такое представление $\mathfrak{A}$, то расширение $A_K$, соответствующее абстрактному граничному условию (6), $\mathfrak{A}$-инвариантно тогда и только тогда, когда $K$ коммутирует со всеми операторами $\gamma(U)$, $U \in \mathfrak{A}$. Следует подчеркнуть, что для любого симметрического оператора, $\mathfrak{A}$-инвариантного и имеющего $\mathfrak{A}$-инвариантное самосопряженное расширение $\tilde{A}$, существует ПГЗ, в котором $\mathfrak{A}$ имеет граничное представление. Таково, например, ПГЗ (7), где в качестве $U$ выбрана изометрия $\mathfrak{N}_i$ на $\mathfrak{N}_{-i}$, определяющая $\tilde{A}$ в теории фон Неймана (см. п. 1).

В конкретных примерах граничное представление (в ПГЗ, связанном с краевыми задачами) часто удается найти в явном виде. Так, пусть $A$ — минимальный оператор, порожденный выражением Лапласа в $H = L_2(\Omega)$, $\Omega = \{(t, x) \mid a \leqslant t \leqslant b, -\infty < x < \infty\}, -\infty < a < b < \infty$, и пусть $\mathfrak{A}$ — группа операторов вида $(U_s f)(t, x) = f(t, x + s)$, $s \in \mathbb{R}^1$. Представим выражение Лапласа в виде выражения Штурма — Лиувилля с операторным коэффициентом и возьмем ПГЗ, указанное в п. 1, в частности $\mathcal{H} = L_2(-\infty, \infty) \oplus L_2(-\infty, \infty)$. Граничное представление можно задать так: $\gamma(U_s)\{y, z\}(x) = \{y(x+s), z(x+s)\}$.

7. В спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов все большее внимание уделяется неклассическим краевым задачам: многоточечным, задачам с интегральными условиями, дифференциально-граничным операторам и т. п. (см. [80, 81] и имеющуюся там библиографию). В ряде публикаций последнего времени указаны теоретико-операторные построения, естественно приводящие к задачам такого типа и применимые также к дифференциальным операторам с частными производными или с операторными коэффициентами.

Пусть $S_0$ — замкнутый плотно заданный симметрический оператор в гильбертовом пространстве $H$ с равными (конечными или бесконечными) дефектными числами, а $B$ — конечномерное подпространство в $H \oplus H$. Определим симметрический (вообще говоря, неплотно заданный) оператор $S$ как сужение $S_0$ на множество $f \in \mathcal{D}(S_0)$ таких, что $\{f, S_0 f\} \perp B$, и поставим задачу о нахождении всех максимальных диссипативных, в частности самосопряженных подпространств-расширений (см. п. 4 из п. 1) оператора $S$. В случае, когда дефектные числа оператора $S$ конечны, самосопряженные подпространства-расширения описаны в [82, 83] в рамках классической теории. В [84, 85] описание различных классов подпространств-расширений получено в общей ситуации в терминах абстрактных граничных условий. Случай, когда оператор $S_0$ дифференциальный, приводит к операторам, соответствующим некоторым многоточечным задачам, задачам с интегральными условиями и др.

Несколько иной подход к теоретико-операторному построению неклассических краевых задач развивается в работах В. Э. Лянце и О. Г. Сторожа [86, 87]. Здесь изучаются абстрактные дифференциально-граничные операторы, получаемые из исходного симметрического оператора одновременным возмущением его действия и граничных условий, задающих область определения. Из класса полученных таким образом операторов затем выделяются самосопряженные, максимальные диссипативные и др. В целом результаты из [86] выходят за рамки теории расширений симметрических операторов.

Естественный способ рассмотрения некоторых многоточечных задач состоит в изучении расширений ортогональной суммы $S = S_1 \oplus \ldots \oplus S_n$ симметрических операторов ($S_j$ — оператор в гильбертовом пространстве $H_j$, $j = 1, \ldots, n$). При $n = 2$ случай конечных дефектных чисел в рамках классической теории расширений изучался в [88]. В методе абстрактных граничных условий описание различных классов расширений оператора $S$ получается совершенно элементарно в общей ситуации. Именно, пусть $(\mathcal{H}^j, \Gamma_1^j, \Gamma_2^j)$ — некоторое ПГЗ оператора $S_j$, $j = 1, \ldots, n$. Тогда ПГЗ оператора $S$ может быть построено как

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}^n, \ \Gamma_1 \{f_1, \ldots, f_n\} = \{\Gamma_1^1 f_1, \Gamma_1^2 f_2, \ldots, \Gamma_1^n f_n\}, \quad \Gamma_2 \{f_1, \ldots, f_n\} = \\ = \{\Gamma_2^1 f_1, \Gamma_2^2 f_2, \ldots, \Gamma_2^n f_n\}.$$

Тем самым оператор $S$ включается в обсуждаемую схему теории расширений. Если задан счетный набор операторов $\{S_j\}_{j=1}^{\infty}$, непосредственный аналог последнего результата (находящий применение в теории одномерных точечных взаимодействий [81]) удается получить в предположении, что операторы $S_j$ попарно унитарно эквивалентны [85] или, более общо, что существует последовательность операторов $\{U_j\}$, изометрически отображающих $H_j$ на $H_1$, $j = 1, \ldots, n, \ldots$, и последовательность $a_j \in \mathbb{R}^1$, $0 < \inf |a_j| \leqslant \leqslant \sup |a_j| < \infty$ такие, что $S_j = a_j U_j^{-1} S_1 U_j$; при этом построен пример, показывающий, что отказаться от каких-либо дополнительных ограничений на $S_j$ здесь нельзя. Согласно [89], аналогичные результаты имеют место и в задаче о построении позитивного ПГЗ ортогональной суммы по позитивным ПГЗ слагаемых.

8. В работе [30] предложен вариант метода абстрактных граничных условий, относящийся к $J$-симметрическим операторам.

Пусть $J$ — инволюция в гильбертовом пространстве $H$, $A$ — $J$-симметрический оператор. Четверка $(\mathcal{H}, \hat{J}, \Gamma_1, \Gamma_2)$, где $\mathcal{H}$ — гильбертово пространсво, $\hat{J}$ — инволюция в $\mathcal{H}$, $\Gamma_1$ и $\Gamma_2$ — линейные отображения $\mathcal{D}(JA^*J)$ в $\mathcal{H}$, называется ПГЗ оператора $A$, если:

1) для любых $f, g \in \mathcal{D}(JA^*J)$

$$(g, A^*Jf) - (f, A^*Jg) = (\Gamma_1 f, \hat{J}\Gamma_2 g)_{\mathcal{H}} - (\Gamma_1 g, \hat{J}\Gamma_2 f)_{\mathcal{H}};$$

2) для любых $F_1, F_2 \in \mathcal{H}$ существует такой вектор $f \in \mathcal{D}(JA^*J)$, что $\Gamma_1 f = F_1$, $\Gamma_2 f = F_2$.

Если задано произвольное ПГЗ $J$-симметрического оператора $A$, то все его $J$-самосопряженные расширения можно описать следующим образом. Каково бы ни было $\hat{J}$-самосопряженное подпространство $S \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, сужение оператора $JA^*J$ на множество всех векторов $f \in \mathcal{D}(JA^*J)$, удовлетворяющих условию

$$\{\Gamma_1 f, \Gamma_2 f\} \in S, \tag{12}$$

представляет собой $J$-самосопряженное расширение оператора $A$. Обратно, если $\tilde{A}$ — $J$-самосопряженное расширение оператора $A$, то подпространство $S = \{\{\Gamma_1 f, \ \Gamma_2 f\} \mid f \in \mathcal{D}(\tilde{A})\} \subset \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$ $J$-самосопряжено. В [30] доказано, что всякий $J$-симметрический оператор с непустым множеством точек регулярного типа обладает ПГЗ.

Условие (12) можно записать в более привычном виде

$$(Q-I)\{\Gamma_1 f, \Gamma_2 f\} = 0,$$

где $Q$ — ортопроектор на $\hat{J}$-самосопряженное подпространство в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$; описание таких проекторов дано в п. 1.

Особый интерес представляет класс $J$-вещественных симметрических операторов (т. е. симметрических операторов, коммутирующих с инволюцией: $AJ = JA$). Такие операторы являются, очевидно, и $J$-симметрическими. Пусть $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — его ПГЗ (как симметрического оператора). Предположим, что в $\mathcal{H}$ задана такая инволюция $\hat{J}$, что

$$\Gamma_i J = \hat{J}\Gamma_i, \quad i = 1, 2. \tag{13}$$

Пусть, далее, $A_K$ — максимальное диссипативное расширение оператора $A$, соответствующее абстрактному граничному условию (6), $K$ — сжатие в $\mathcal{H}$. Расширение $A_K$ является $J$-самосопряженным тогда и только тогда, когда оператор $K$ $\hat{J}$-самосопряжен. В частности, этот результат дает описание всех $J$-вещественных самосопряженных расширений $A$. Существование таких расширений доказано еще М. Стоуном.

Классу $J$-вещественных симметрических операторов принадлежат, например, минимальные операторы, порожденные формально самосопряженными дифференциальными выражениями с вещественными коэффициентами. Для таких операторов при естественном выборе ПГЗ, связанных с краевыми задачами, условия (13) автоматически выполняются. С другой стороны [30], для любого плотно заданного $J$-вещественного замкнутого симметрического оператора существуют такое ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ и такая инволюция $\hat{J}$ в $\mathcal{H}$, что выполнены соотношения (13).

Еще один естественный класс $J$-симметрических операторов — операторы вида $A = B + C$, где $B$ — симметрический $J$-вещественный, а $C$ — ограниченный $J$-самосопряженный операторы. Если задано ПГЗ $(\mathcal{H}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ оператора $B$ и инволюция $\hat{J}$, удовлетворяющие (13), то $(\mathcal{H}, \hat{J}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ — ПГЗ $J$-симметрического оператора $A$.

В [30] для $J$-симметрических операторов строится аналог характеристической функции, применяемый для исследования спектров $J$-самосопряженных расширений. Отметим следующий результат. Обозначим через $A_S$ $J$-самосопряженное расширение оператора $A$, отвечающее абстрактному граничному условию (12). Пусть $S_1$, $S_2$ — $\hat{J}$-самосопряженные подпространства в $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$, $Q_1$ и $Q_2$ — ортопроекторы на $S_1$ и $S_2$. Если оператор $Q_1 - Q_2$ вполне непрерывен, то существенные спектры расширений $A_{S_1}$ и $A_{S_2}$ совпадают.


1. *Березанский Ю. М.* Разложения по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
2. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М. : Наука, 1973.— 551 с.
3. *Neumann J. von.* Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren // Math. Ann,—1929.—**102**. — S. 49—131.
4. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы.— М. : Наука, 1969.— 526 с.
5. *Наймарк М. А.* О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1940.— **4**, № 1.— С. 53—104.
6. *Крейн М. Г., Люстерник Л. А.* Функциональный анализ // Математика в СССР за тридцать лет.— М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.— С. 608—700.
7. *Красносельский М. А., Наймарк М. А., Шилов Г. Е.* Функциональный анализ // Математика в СССР за сорок лет : В 2-х т. I.— М. : Физматгиз, 1959.— Т. 1.— С. 675—780.
8. *Березанский Ю. М.* Обзор по спектральной теории самосопряженных и разностных операторов в пространстве $L_2$ // Тр. сем. по функцион. анализу.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1970.— Вып. 2.— С. 3—135.
9. *Филлипс Р. С.* Диссипативные операторы и гиперболические системы дифференциальных уравнений в частных производных // Математика.— 1962.— **6**, № 4.— С. 11—70.
10. *Штраус А. В.* О расширениях и характеристической функции симметрического оператора // Изв. АН СССР.— 1968.— **32**, № 1.— С. 186—207.
11. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1984.— 284 с.

12. *Цекановский Э. Р., Шмульян Ю. Л.* Теория бирасширений операторов в оснащ ых гильбертовых пространствах. Неограниченные операторные узлы и характеристические функции // Успехи мат. наук.— 1977.— **32**, № 5.— С. 69—124.
13. *Кужель А. В., Руденко Л. И.* Описание правильных расширений эрмитовых операторов // Функцион. анализ и его прил.— 1982.— **16**, № 1.— С. 74—75.
14. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Спектральная теория.— М. : Мир, 1966.— 1063 с.
15. *Крейн М. Г.* Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения. I, II // Мат. сб.— 1947.— **20**, № 3.— С. 431—495; **21**, № 3.— С. 365—404.
16. *Бирман М. Ш.* К теории общих краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений // Докл. АН СССР.— 1953.— **92**, № 2.— С. 205—208.
17. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Тр. Моск. мат. о-ва. — 1952.— **1**.— С. 187—246.
18. *Бирман М. Ш.* К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов // Мат. сб.— 1956.— **38**, № 4.— С. 431—450.
19. *Alonso A., Simon B.* The Birman — Krein — Vishik theory of self-adjoint extensions of semibounded operators // J. Oper. Theory.— 1980.— **4**.— P. 251—270.
20. *Горбачук М. Л., Михайлец В. А.* Полуограниченные самосопряженные расширения симметрических операторов // Докл. АН СССР.— 1976.— **226**, № 4.— С. 765—768.
21. *Nenciu G.* Applications of the Krein resolvent formula to the theory of self-adjoint extensions of positive symmetric operators // J. Oper. Theory.— 1983.— **10**, N 2.— P. 209—218.
22. *Galindo A.* On the existence of $J$-self-adjoint extensions of $J$-symmetric operators with adjoint // Communs Pure and Appl. Math.— 1962.— **15**, N 4.— P. 423—425.
23. *Knowles I. W.* On $J$-self-adjoint extensions of $J$-symmetric operators // Proc. Amer. Math. Soc.— 1980.— **79**, N 1.— P. 42—44.
24. *Жихарь Н. А.* К теории расширений $J$-симметрических операторов // Укр. мат. журн.— 1959.— **11**, № 4.— С. 352—364.
25. *Knowles I. W.* On the boundary conditions characterising $J$-self-adjoint extensions of $J$-symmetric operators // J. Different. Equat.— 1981.— **40**, N 2.— P. 193—216.
26. *Райх Л. М., Цекановский Э. Р.* Биинволютивно самосопряженные бирасширения $J$-эрмитовых операторов // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1975.— Вып. 23.— С. 79—93.
27. *Race D.* The theory of $J$-self-adjoint extensions of $J$-symmetric operators // J. Different. Equat.— 1985.— **57**, N 2.— P. 258—274.
28. *Рофе-Бекетов Ф. С.* О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций //Теория функций, функцион. анализ и их прил.—1969. — Вып. 8.— С. 3—24.
29. *Горбачук М. Л., Кочубей А. Н., Рыбак М. А.* Диссипативные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Докл. АН СССР.— 1972.— **205**, № 5.— С. 1029—1032.
30. *Кочубей А. Н.* О расширениях $J$-симметрических операторов // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1979.— Вып. 31.— С. 74—80.
31. *Михайлец В. А.* О разрешимых и секториальных граничных задачах для операторного уравнения Штурма—Лиувилля // Укр. мат. журн.— 1974.— **26**, № 4.— С. 447—455.
32. *Вайнерман Л. И.* О расширениях замкнутых операторов в гильбертовом пространстве // Мат. заметки.— 1980.— **28**, № 6.— С. 833—841.
33. *Михайлец В. А.* Спектры операторов и граничные задачи // Спектральный анализ дифференц. операторов.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980.— С. 106—131.
34. *Rofe-Beketov F. S.* Square integrable solutions, self-adjoint extensions and spectrum of differential systems // Different. Equat. : Proc. Int. Conf. Different. Equat., Upsala, 1977.— P. 169—178.
35. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Числовая область линейного отношения и максимальные отношения // Теория функций, функцион. анализ и их прил.—1985.— Вып. 44.— С. 103—112.
36. *Рофе-Бекетов Ф. С.* Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций // Докл. АН СССР.— 1969.— **184**, № 5.— С. 1034—1037.
37. *Горбачук М. Л.* Самосопряженные граничные задачи для дифференциального уравнения второго порядка с неограниченным операторным коэффициентом // Функцион. анализ и его прил.— 1971.— **5**, № 1.— С. 10—21.
38. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* О спектре самосопряженных расширений минимального оператора, порожденного выражением Штурма—Лиувилля с операторным потенциалом // Укр. мат. журн — 1972.— **24**, № 6.— С. 726—734.
39. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* О некоторых классах граничных задач для уравнения Штурма—Лиувилля с операторным потенциалом // Там же.— № 3.— С. 291—304.
40. *Михайлец В. А.* О распределении собственных значений операторного уравнения Штурма—Лиувилля // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1977.— **41**, № 3.— С. 607—619.
41. *Горбачук М. Л., Кутовой В. А.* О резольвентной сравнимости граничных задач для операторного уравнения Штурма—Лиувилля // Функцион. анализ и его прил.— 1978.— **12**, № 1.— С. 68—69.
42. *Вайнерман Л. И.* Самосопряженные граничные задачи для сильно эллиптических и гиперболических уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР.— 1974.— **218**, № 4.— С. 345—348.
43. *Брук В. М.* Диссипативные расширения дифференциального оператора эллиптического типа // Функцион. анализ.— 1974.— Вып. 3.— С. 35—43.

44. *Вайнерман Л. И., Горбачук М. Л.* О граничных задачах для дифференциального уравнения второго порядка гиперболического типа в гильбертовом пространстве // Докл. АН СССР.— 1975.— **221**, № 4.— С. 763—766.
45. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений // Мат. заметки.— 1975.— **17**, № 1.— С. 41—48.
46. *Брук В. М.* Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии // Мат. сб.— 1976.— **100**, № 2.— С. 210—216.
47. *Calkin J. W.* Abstract symmetric boundary conditions // Trans. Amer. Math. Soc.— 1939. — **45**, N 3.— P. 369—442.
48. *Штраус А. В.* Некоторые вопросы теории расширения симметрических несамосопряженных операторов // Тр. II науч. конф. мат. кафедр пед. ин-тов Поволжья. — 1962.—Вып. 1.— С. 121—124.
49. *Камерина Л. А.* Самосопряженные расширения симметрического оператора в пространстве с инволюцией // Функцион. анализ.—1974.— Вып. 2.— С. 16—26.
50. *Штраус А. В.* Обобщенные резольвенты симметрических операторов // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1954.— **18**, № 1.— С. 51—86.
51. *Сторож О. Г.* О расширениях симметрических операторов с неравными дефектными числами // Мат. заметки.— 1984.— **36**, № 5.— С. 791—796.
52. *Кочубей А. Н.* О расширениях положительно определенного симметрического оператора // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1979.— № 3.— С. 168—171.
53. *Деркач В. А., Маламуд М. М., Цекановский Э. Р.* Секториальные расширения положительного оператора и характеристическая функция // Докл. АН СССР.— 1988.— **298**, № 3.— С. 537—541.
54. *Сторож О. Г.* Описание некоторых классов расширений неотрицательного оператора // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1987.— № 10.— С. 15—17.
55. *Арлинский Ю. М.* Позитивные пространства граничных значений и секториальные расширения неотрицательного симметрического оператора // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 1.— С. 8—14.
56. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Эрмитовы операторы с лакунами и функция Вейля // Докл. АН СССР.— 1987.— **293**, № 5.— С. 1041—1046.
57. *Grubb G.* A characterization of non-local boundary value problems associated with an elliptic operator // Ann. Norm. Sup. Pisa.— 1968.— **22** — P. 425—523.
58. *Горбачук В. И.* О граничных задачах для эллиптических дифференциальных уравнений // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1981.— № 1.— С. 7—11.
59. *Кочубей А. Н.* Эллиптические операторы с граничными условиями на подмножестве меры нуль // Функцион. анализ и его прил.— 1982.— **16**, № 2.— С. 78—79.
60. *Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д.* Замечание об операторе Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР.— 1961.— **137**, № 5.— С. 1011—1014.
61. *Карпешина Ю. Е., Павлов Б. С.* Взаимодействие нулевого радиуса для бигармонического и полигармонического уравнений // Мат. заметки.— 1986.— **40**, № 1.— С. 49—59.
62. *Павлов Б. С.* Теория расширений и явно решаемые модели // Успехи мат. наук.— 1987.— **42**, № 6.— С. 99—131.
63. *Кошманенко В. Д.* Возмущения самосопряженных операторов сингулярными билинейными формами // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 1.— С. 3—18.
64. *Деркач В. А., Маламуд М. М.* Функция Вейля эрмитова оператора и ее связь с характеристической функцией.— Донецк, 1985.— 52 с.— (Препринт / АН УССР. Дон. физ.-тех. ин-т; 85.9).
65. *Брук В. М.* О расширениях симметрических отношений // Мат. заметки.— 1977.— **22**, № 6.— С. 825—834.
66. *Кочубей А. Н.* О характеристических функциях симметрических операторов и их расширений // Изв. АН АрмССР. Математика.— 1980.— **15**, № 3.—С. 219—232.
67. *Лившиц М. С.* Об одном классе линейных операторов в гильбертовом пространстве // Мат. сб.— 1946.— **19**, № 2.— С. 239—260.
68. *Штраус А. В.* К теории эрмитовых операторов // Докл. АН СССР.— 1949.— **67**, № 4.— С. 611—614.
69. *Крейн М. Г., Шмульян Ю. Л.* О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами // Мат. исслед.— 1967.— **2**, № 3.— С. 64—96.
70. *Тихонов А. Н.* О единственности решения задачи электроразведки // Докл. АН СССР.— 1949.— **69**, № 6.— С. 797—800.
71. *Тихонов А. Н.* К математическому обоснованию теории электромагнитных зондирований // Журн. вычислит. математики и мат. физики.— 1965.— 5, № 3.— С. 545—547.
72. *Кочубей А. Н.* О спектре самосопряженных расширений симметрического оператора // Мат. заметки.— 1976.— **19**, № 3.— С. 429—434.
73. *Штраус А. В.* О спектральных разложениях регулярного симметрического оператора / Докл. АН СССР.— 1972.— **204**, № 1.— С. 52—55.
74. *Крейн М. Г., Лангер Г. К.* О дефектных подпространствах и обобщенных резольвентах эрмитова оператора в пространстве $\Pi_\varkappa$ // Функцион. анализ и его прил.— 1971.— 5, № 2.— С. 61—73.
75. *Krein M. G., Langer H.* Uber die *Q*-funktion eines $\pi$-hermitischen Operatoren in Raume $\Pi_\varkappa$ // Acta Sci. Math. (Szeged).— 1973.— **34**.— S. 191—230.
76. *Кочубей А. Н.* О симметрических операторах, коммутирующих с семейством унитарных операторов // Функцион. анализ. и его прил.— 1979.— 13, № 4.— С. 77—78.
77. *Филлипс Р. С.* Расширение дуальных подпространств, инвариантных относительно алгебры // Математика.— 1964.— 8, № 6.— С. 81—108.
78. *Jorgensen P. E. T.* Self-adjoint extension operators commuting with an algebra // Math. Z.— 1979.— **169**, N 1.— P. 41—62.

79. *Sćau C. F.* Positive self-adjoint extensions of operators affiliated with a von. Neuman algebra // Math. scand.— 1979.— **44**, N 1.— P. 171—195.
80. *Krall A. M.* The development of general differential and differential-boundary systems // Rocky Mountain J. Math.— 1975.— **5**, N 4.— P. 493—542.
81. *Gesztesy F., Kirch W.* One-dimensional Schrödinger operators with interactions singular on a discrete set // J. reine und angew. Math.— 1985.— **362**.— P. 28—50.
82. *Coddington E. A.* Self-adjoint subspace extensions of nondensely defined symmetric operators // Adv. Math.— 1974.— **14**, N 3.— P. 309—332.
83. *Coddington E. A., Dijksma A.* Self-adjoint subspaces and eigenfunction expansions for ordinary differential subspaces // J. Different. Equat.— 1976.— **20**, N 2.— P. 473—526.
84. *Кочубей А. Н.* О расширениях неплотно заданного симметрического оператора // Сиб. мат. журн.— 1977.— **18**, № 2.— С. 314—320.
85. *Кочубей А. Н.* Симметрические операторы и неклассические спектральные задачи // Мат. заметки.— 1979.— **25**, № 3.— С. 425—434.
86. *Лянце В. Э., Сторож О. Г.* Методы теории неограниченных операторов.— Киев : Наук. думка, 1983.— 210 с.
87. *Сторож О. Г.* Диссипативные возмущения с изменением области определения // Функцион. анализ.— 1986.— Вып. 26.— С. 136—140.
88. *Штраус А. В.* О самосопряженных операторах в ортогональной сумме гильбертовых пространств // Докл. АН СССР.— 1962.— **144**, № 3.— С. 512—515.
89. *Михайлец В. А.* Об общих краевых задачах для дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Спектральная теория дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1986.— С. 15—24.


Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 06.09.88