УДК 518:517.948

А. А. Бойчук

Построение решений двухточечных краевых задач для слабовозмущенных нелинейных систем в критических случаях

В настоящей статье получены условия существования и итерационный алгоритм построения решений двухточечных краевых задач для слабовозмущенных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений в критических случаях.

1. Линейные краевые задачи. Рассматривается краевая задача вида

$$\dot{y} = A(t)\,y, \tag{1}$$

$$s(y) = My(a) + Ny(b) = 0, \tag{2}$$

где $A(t)$ — непрерывная на $[a, b]$ $(n \times n)$-матрица ($A(t) \in C[a, b]$), M, N — $(n \times n)$-матрицы, такие, что $\operatorname{rang}[M, N] = n$; $y = y(t)$ — n-мерный вектор-столбец. Здесь и далее рассмотрение проводится в вещественной области.

По определению [1, 2] сопряженная к (1), (2) краевая задача имеет вид

$$\dot{z} = -zA(t), \tag{3}$$

$$l(z) = z(a)P + z(b)Q = 0, \tag{4}$$

где $(n \times n)$-матрицы P, Q таковы, что $\operatorname{rang}[P, Q] = n$ и $MP - NQ = 0$; $z = z(t)$ — n-вектор-строка.

Рассмотрим задачу о существовании и виде общего решения соответствующей (1) неоднородной системы

$$\dot{y} = A(t)\,y + \varphi(t), \quad \varphi(t) \in C[a, b] \tag{5}$$

с краевыми условиями (2). Не уменьшая общности краевые условия берем однородными.

При решении поставленной задачи существенным является вопрос: имеет ли соответствующая (5), (2) однородная краевая задача (1), (2) нетривиальные решения (критический случай) или не имеет (некритический случай)?

Введем обозначения $D = MY(a) + NY(b)$, $\Delta = MY(a) - NY(b)$, где $Y(t)$ $(Z(t))$ — нормальная фундаментальная $(n \times n)$-матрица системы (1) ((3)). Тогда справедлива следующая

Теорема 1. *Если* $\operatorname{rang} D = n - r$, $1 \leqslant r \leqslant n$, *то краевая задача* (1), (2) *и сопряженная к ней краевая задача* (3), (4) *имеют* r *и только* r *ли-*

нейно-независимых решений. Неоднородная краевая задача (5), (2) *разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие ортогональности*

$$\int_a^b Z_r(t)\,\varphi(t)\,dt = 0. \tag{6}$$

При условии (6) краевая задача (5), (2) имеет r-параметрическое семейство решений

$$y_0(t, c_0) = Y_r(t)\,c_0 + y_0(t), \tag{7}$$

где $Y_r(t)$ $(Z_r(t))$ — $n \times r$ $(r \times n)$-матрица, столбцы (строки) которой есть полная система r линейно-независимых решений краевой задачи (1), (2) ((3), (4)); $y_0(t)$ — единственное, ортогональное к любому решению краевой задачи (1), (2), частное решение краевой задачи (5), (2), представимое в виде

$$y_0(t) = \int_a^b G(t, \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau \qquad \left(\int_a^b Y_r^T(t)\,y_0(t)\,dt = 0\right). \tag{8}$$

При этом $G(t, \tau)$ — обобщенная матрица Грина краевой задачи (5), (2), имеющая вид

$$G(t, \tau) = G_0(t, \tau) - Y_r(t)\,\mathscr{D}^{-1}\int_a^b Y_r^T(t)\,G_0(t, \tau)\,dt, \tag{9}$$

где $G_0(t, \tau) = \frac{1}{2}\,Y(t)\left\{\operatorname{sign}(t-\tau)\,I + D^{+}\Delta\right\}Z(\tau)$, $\mathscr{D} = \int_a^b Y_r^T(t)\,Y_r(t)\,dt$ — $(r \times$ $\times\, r)$-неособенная матрица; D^{+} — единственная псевдообратная к D матрица [4, 5]; I — единичная матрица; c_0 — r-мерный вектор констант, принадлежащий r-мерному вещественному евклидову пространству E_r.

Теорема доказана с использованием результатов работ [1—3, 6, 7].

З а м е ч а н и е. В некритическом случае $r = 0$ краевая задача (5), (2) имеет единственное решение в виде (8). При этом $Y_r(t) = 0$, $Z_r(t) = 0$, $D^{+} = D^{-1}$, $G(t, \tau) = G_0(t, \tau)$.

2. О с н о в н о й р е з у л ь т а т. Рассматривается краевая задача

$$\dot{y} = A(t)\,y + \varepsilon Z(y, t, \varepsilon) + \varphi(t), \tag{10}$$

$$s(y) = 0, \tag{11}$$

где $A(t)$, $Z(y, t, \varepsilon)$, $\varphi(t) \in C[t]$, $t \in [a, b]$; $Z(y, t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$; $Z(y, t, \varepsilon) \in C^1[y]$.

Предполагается, что имеет место критический случай [7], т. е. что порождающая ($\varepsilon = 0$) для (10), (11) краевая задача (5), (2) имеет r-параметрическое ($1 \leqslant r \leqslant n$) семейство порождающих решений $y_0(t, c_0)$ (7), указанных в теореме 1.

Ставится задача: найти условия существования и итерационный алгоритм построения решения краевой задачи (10), (11), обращающееся при $\varepsilon = 0$ в соответствующее порождающее решение.

Выполняя в (10) замену переменных $y(t, \varepsilon) = y_0(t, c_0) + x(t, \varepsilon)$, приходим к задаче нахождения условий существования и построения решения $x(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, обращающегося в нулевое при $\varepsilon = 0$, для следующей краевой задачи:

$$\dot{x} = A(t)\,x + \varepsilon Z(y_0 + x, t, \varepsilon), \qquad s(x) = 0. \tag{12}$$

При сделанных предположениях в окрестности порождающего решения справедливо разложение

$$Z(y_0 + x, t, \varepsilon) = f_0(t, c_0) + P(t)\,x + R(x, t, \varepsilon),$$

где

$$f_0(t, c_0) = Z(y_0(t, c_0), t, 0) \in C[t], \quad R(x, t, \varepsilon) \in C^1[x], \quad C[t], \quad C[\varepsilon],$$
$$t \in [a, b], \ \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]; \quad P(t) = \partial Z(y, t, 0)/\partial y\,|_{y=y_0(t, c_0^*)},$$
$$R(0, t, 0) = \partial R(0, t, 0)/\partial x = 0.$$

Известно [7], что если уравнение, которое по аналогии с периодической задачей будем называть уравнением для порождающих амплитуд

$$\int_a^b Z_r(t) Z(y_0(t, c_0), t, 0)\, dt = 0, \tag{13}$$

имеет решение $c_0 = c_0^*$ и это решение является простым, т. е. выполнено условие

$$\det B_0 \neq 0 \qquad \left(B_0 = \int_a^b Z_r(t) P(t) Y_r(t)\, dt - (r \times r)\text{-матрица}\right),$$

то при каждом таком $c_0 = c_0^*$ существует единственное решение краевой задачи (12) $x(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, $x(t, 0) = 0$. Это решение находится с помощью сходящегося на $[0, \varepsilon_0]$ метода простых итераций [8] из следующей операторной системы:

$$x(t, \varepsilon) = Y_r(t) c + x^{(1)}(t, \varepsilon), \tag{14}$$

$$B_0 c = -\int_a^b Z_r(t) \{P(t) x^{(1)}(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\}\, dt,$$

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \int_a^b G(t, \tau) \{f_0(\tau, c_0^*) + P(\tau)[Y_r(\tau) c + x^{(1)}(\tau, \varepsilon)] +$$
$$+ R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)\}\, d\tau.$$

Операторная система (14) получается применением теоремы 1 к краевой задаче (13), в которой нелинейность $Z(y_0 + x, t, \varepsilon)$ формально рассматривается как неоднородность.

Рассмотрим случай кратных корней уравнения (14) для порождающих амплитуд ($\det B_0 = 0$). Обозначим через P_0, $P_0^{(*)}$ ортопроекторы (матрицы), проектирующие E_r на нуль-пространство $N(B_0)$ матрицы B_0 и E_r на нуль-пространство $N(B_0)$ сопряженной к B_0 матрицы $B_0^* = B_0^T$; B_0^+ — псевдообратная к B_0 матрица [4, 5]. Для разрешимости второго из уравнений (14) относительно $c \in E_r$ необходимо и достаточно, чтобы правая часть этого уравнения принадлежала ортогональному дополнению $E_r \ominus N(B_0^*)$ подпространства $N(B_0^*)$, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$P_0^{(*)} \int_a^b Z_r(t) \{P(t) x^{(1)}(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\}\, dt = 0. \tag{15}$$

При выполнении условия (15) из (14) определяем c:

$$c = -B_0^+ \int_a^b Z_r(t) \{P(t) x^{(1)}(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\}\, dt + c^{(1)} = c^{(0)} + c^{(1)},$$

где $c^{(1)}$ — произвольный постоянный вектор из $N(B_0)$, $c^{(1)} = P_0 c \in N(B_0)$, $c^{(0)} = (I - P_0) c \in E_r \ominus N(B_0)$. Учитывая представление $c = c^{(0)} + c^{(1)}$ из третьего уравнения (14), имеем

$$x^{(1)}(t, \varepsilon) = \varepsilon G_1(t) c^{(1)} + x^{(2)}(t, \varepsilon), \quad G_1(t) = \int_a^b G(t, \tau) P(\tau) Y_r(\tau)\, d\tau,$$

$$x^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \int_a^b G(t, \tau) \{f_0(\tau, c_0^*) + P(\tau)[Y_r(\tau) c^{(0)} + x^{(1)}(\tau, \varepsilon)] +$$
$$+ R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)\}\, d\tau.$$

Из (15) с учетом представления для $x^{(1)}(t, \varepsilon)$ получаем систему для определения $c^{(1)} = P_0 c \in N(B_0)$:

$$\varepsilon B_1 c^{(1)} = -P_0^{(*)} \int_a^b Z_r(t) \{P(t) x^{(2)}(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt, \tag{16}$$

где $B_1 = \int_a^b P_0^{(*)} Z_r(t) P(t) G_1(t) P_0 dt$ — $(r \times r)$-матрица. Для разрешимости этой алгебраической системы относительно $\varepsilon c^{(1)} \in N(B_0)$ необходимо и достаточно, чтобы ее правая часть принадлежала ортогональному дополнению подпространства $N(B_1^*)$, т. е. чтобы выполнялось условие

$$P_1^{(*)} P_0^{(*)} \int_a^b Z_r(t) \{P(t) x^{(2)}(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt = 0.$$

Так как на искомое решение $x(t, \varepsilon)$ не налагаются дополнительные ограничения, то последнее условие имеет место, если $P_1^{(*)} P_0^{(*)} = 0$, т. е. пересечение нуль-пространств $N(B_0^*)$ и $N(B_1^*)$ имеет только нулевой элемент. Можно показать, что это условие эквивалентно условию $P_0 P_1 = 0$, где P_1, $P_1^{(*)}$ — ортопроекторы, проектирующие E_r на $N(B_1)$ и $N(B_1^*)$ соответственно.

Таким образом, при условии $P_0 \neq 0$, $P_0 P_1 = 0$ система (16) однозначно разрешима относительно $\varepsilon c^{(1)} \in N(B_0)$ и от операторной системы (14) приходим к следующей системе:

$$x(t, \varepsilon) = Y_r(t)(I - P_0) c^{(0)} + \varepsilon G_1(t) P_0 c^{(1)} + x^{(2)}(t, \varepsilon), \tag{17}$$

$$c^{(0)} = -B_0^+ \int_a^b Z_r(t) \{P(t) [\varepsilon G_1(t) P_0 c^{(1)} + x^{(2)}(t, \varepsilon)] + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt,$$

$$\varepsilon c^{(1)} = -B_1^+ P_0^{(*)} \int_a^b Z_r(t) \{P(t) x^{(2)}(t, \varepsilon) + R(x(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt,$$

$$x^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \int_a^b G(t, \tau) \{f_0(\tau, c_0^*) + P(\tau) [Y_r(\tau)(I - P_0) c^{(0)} +$$

$$+ \varepsilon G_1(\tau) P_0 c^{(1)} + x^{(2)}] + R(x(\tau, \varepsilon), \tau, \varepsilon)\} d\tau,$$

принадлежащей к классу операторных систем вида (5.11) из [8], для которых доказана сходимость метода простых итераций и дана оценка области сходимости по ε. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $P_0 \neq 0$, $P_0 P_1 = 0$. Тогда при условии*

$$P_0^{(*)} \int_a^b Z_r(t) \{P(t) x_1^{(2)}(t, \varepsilon) + R(x_1^{(2)}(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt = 0$$

$$\left(x_1^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \int_a^b G(t, \tau) f_0(\tau, c_0^*) d\tau \right), \tag{18}$$

для каждого $c_0 = c_0^*$, удовлетворяющего уравнению для порождающих амплитуд (13), *краевая задача* (12) *имеет единственное решение $x(t, \varepsilon) \in C[\varepsilon]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, обращающееся в нулевое при $\varepsilon = 0$. Это решение можно найти с помощью сходящегося на $[0, \varepsilon_0]$ итерационного процесса*

$$\varepsilon c_k^{(1)} = -B_1^+ P_0^{(*)} \int_a^b Z_r(t) \{P(t) x_k^{(2)}(t, \varepsilon) + R(x_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt, \tag{19}$$

$$c_k^{(0)} = -B_0^+ \int_a^b Z_r(t) \{P(t) [\varepsilon G_1(t) P_0 c_k^{(1)} + x_k^{(2)}] + R(x_k(t, \varepsilon), t, \varepsilon)\} dt,$$

$$x_{k+1}^{(2)}(t, \varepsilon) = \varepsilon \int\limits_a^b G(t, \tau)\{f_0(\tau, c_0^*) + P(\tau)[Y_r(\tau)(I - P_0)c_k^{(0)} +$$

$$+ \varepsilon G_1(\tau) P_0 c_k^{(1)} + x_k^{(2)}] + R(x_k, \tau, \varepsilon)\} d\tau,$$

$$x_{k+1}(t, \varepsilon) = Y_r(t)(I - P_0)c_k^{(0)} + \varepsilon G_1(t) P_0 c_k^{(1)} + x_{k+1}^{(2)}(t, \varepsilon),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, \qquad x_0(t, \varepsilon) = x_0^{(2)}(t, \varepsilon) = 0.$$

Если $\det B_0 \neq 0$ ($B_0^+ = B_0^{-1}$, $P_0 = P_0^{(*)} = 0$), то итерационный процесс (19) переходит в соответствующий процесс из [7]. Для периодической краевой задачи ($M = -N$) итерационный процесс (19) переходит в ранее известные итерационные процессы, разработанные в [8], — для случая $\det B_0 \neq 0$, и в [9] — для случая $\det B_0 = 0$.

3. Пример. Рассмотрим вопрос об условиях существования решения краевой задачи (10), (11), для которой кроме указанных предположений выполнены условия $A(t) = 0$, $M = \mathrm{diag}\{m, M_1\}$, $N = \mathrm{diag}\{-m, N_1\}$, где m-произвольная вещественная постоянная, M_1, N_1 — $(n-1)\times(n-1)$-мерные матрицы такие, что $\mathrm{rang}[M_1 + N_1] = n - 1$.

Легко заметить, что $Y(t) = Z(t) = E$, $D = \mathrm{diag}\{0, M_1 + N_1\}$, $\mathrm{rang}\, D = n - 1$, $r = 1$, $Y_r(t) = \mathrm{col}(1, 0, \ldots, 0)$, $Z_r(t) = (1, 0, \ldots, 0)$.

Матрица B_0 в этом случае будет скаляром

$$B_0 = \int\limits_a^b p_{11}(t)\, dt, \quad P(t) = \{p_{ij}(t)\},$$

и условие существования решения краевой задачи (10), (11) имеет вид $B_0 \neq 0$. В случае $B_0 = 0$ ($P_0 = P_0^{(*)} = E = 1$) вопрос о существовании решения краевой задачи решается согласно теореме 2 с помощью условия (18) и неравенства

$$B_1 = \int\limits_a^b [p_{11}(t), \ldots, p_{1n}(t)] \int\limits_a^b G(t, \tau)\, \mathrm{col}\,[p_{11}(\tau), \ldots, p_{1n}(\tau)]\, d\tau dt \neq 0,$$

где $G(t, \tau)$ определяется из (9).

1 *Bliss G. A.* A boundary value problems // Trans. Amer. Math. Soc.— 1926.— **28**.— P. 561—584.
2. *Elliott W. W.* Generalized Green's function for compatible differential system // Amer. J. Math.— 1928.— **50**.— P. 243—258.
3. *Reid T.* Generalized Creen's matrices for compatible systems of dif. equations // Ibid.— 1931.— **51**, N 2.— P. 433—459.
4. *Penrose R.* A generalized inverse for matrices // Pros. Cambridge Phil. Soc.— 1955.— **51**.— P. 406—413.
5. *Кублановская В. Н.* О вычислении обобщенной обратной матрицы и проекторов // Журн. вычислит. математики и мат. физики.— 1966.— **6**, № 2.— С. 326—332.
6. *Vejvoda O.* On perturbed nonlinear boundary value problems // Чехосл. мат. журн.— 1961.— **11**.— С. 323—362.
7. *Бойчук А. А.* Построение решений краевых задач для нелинейных систем в критических случаях // Некоторые вопросы теории асимптотических методов нелинейной механики.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1986.— С. 39—43.
8. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем.— М. : Наука, 1979.— 432 с.
9. *Лыкова О. Б., Бойчук А. А.* Построение периодических решений нелинейных систем в критических случаях // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 1.— С. 62—69.

Ин-т геофизики АН УССР, Киев

Получено 28.05.87