УДК 519.21

*Ю. П. Филонов*

# Критерий эргодичности однородных дискретных марковских цепей

В данной статье доказывается обобщение одного из основополагающих утверждений работы [1, с. 10—13]. Доказательство обобщения меньше по объему и проводится без ограничений на величины скачков.

Пусть $\{\xi_n\}$, $n = 0, 1, \ldots,$ — однородная марковская цепь со счетным множеством $E$ сообщающихся состояний и переходными вероятностями $p(x, y)$, $\mathcal{F}_n = \sigma\{\xi_0, \ldots, \xi_n\}$, $\tau$ — произвольный марковский момент (м. м.) (относительно $\{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^{\infty}$), $p(\tau, x, y) = P_x(\xi_\tau = y)$, $\tau_A$ — время достижения множества $A$, $m_{x,A} = \mathrm{M}_x\tau_A$. Сформулируем результат.

Теорема. *Если существует неотрицательная функция $f$ на $E$, м. м. $\tau$ такой, что для некоторого $\varepsilon > 0$ и конечного множества $A$ выполняются неравенства*

$$\sum_y p(\tau, x, y) f(y) \leqslant f(x) - \varepsilon \mathrm{M}_x \tau \qquad (x \notin A) \tag{1}$$

$$\sum_y p(\tau, x, y) f(y) + \mathrm{M}_x \tau < \infty \qquad (x \in A), \tag{1'}$$

*то цепь эргодична,* $\liminf\limits_{x\to\infty} f(x) > \inf\limits_E f(x)$ *и* $m_{x,B} = \mathcal{O}(f(x))$, $x \to \infty$, *для любого конечного множества $B$. Обратно, если цепь эргодична, для неотрицательной функции $f$* $\liminf\limits_{x\to\infty} f(x) > \inf\limits_E f(x)$, $m_{x,B} = \mathcal{O}(f(x))$, $x \to \infty$, *для некоторого конечного множества $B$, то существуют м. м. $\tau \geqslant 1$, число $\varepsilon > 0$ и конечное множество $A$, для которых выполняются условия* (1), (1′).

В доказательстве используются общие свойства условных математических ожиданий и марковских моментов [2] (гл. III, IV).

Доказательство. а). Докажем прямое утверждение. Пусть $\xi_0 = x \notin A$, $t_0 = 0$, $t_k = t_{k-1} + \tau^k$, где значение $\tau^k$ на произвольной траектории $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ равно значению $\tau$ на траектории $\{x_{t_{k-1}+n}\}_{n=0}^{\infty}$, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$ — последовательность м. м.. Далее $n' = \min\{t_i : t_i \geqslant n\}$ и $\tau' = \min\{t_i : \xi_{t_i} \in A\}$ тоже м. м.. Введем величины $\theta_n = \mathrm{M}\{f(\xi_{n'}) + (n' - n)\varepsilon \mid \mathcal{F}_n\}$, $\theta'_n = \theta_{n\wedge\tau'}$. Они $\mathcal{F}_n$-измеримы. Можно написать ($\chi$ — индикатор):

$$\mathrm{M}\{\theta'_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} = \chi\{\tau' \leqslant n\}\mathrm{M}\{\theta'_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} + \chi\{\tau' > n\}\mathrm{M}\{\theta'_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} =$$
$$= \chi\{\tau' \leqslant n\}\theta'_n + \chi\{\tau' > n\}\mathrm{M}\{\theta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\}. \tag{2}$$

Поскольку $\chi\mathrm{M}\{\xi \mid \mathcal{F}\} = \chi\mathrm{M}\{\chi\xi \mid \mathcal{F}\}$, если индикатор $\chi$ $\mathcal{F}$-измерим и $\mathrm{M}\{\mathrm{M}\{\xi \mid \mathcal{F}_m\} \mid \mathcal{F}_n\} = \mathrm{M}\{\xi \mid \mathcal{F}_n\}$ при $\mathcal{F}_m \supset \mathcal{F}_n$, то

$$\chi\{\tau' > n\}\chi\{n' > n\}\mathrm{M}\{\theta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} = \chi\{\tau' > n,\ n' > n\}\mathrm{M}\{f(\xi_{(n+1)'}) +$$
$$+ ((n+1)' - n - 1)\varepsilon \mid \mathcal{F}_n\} = \chi\{\tau' > n,\ n' > n\}\mathrm{M}\{f(\xi_{n'}) +$$
$$+ (n' - n)\varepsilon - \varepsilon \mid \mathcal{F}_n\} = \chi\{\tau' > n,\ n' > n\} \quad (\theta'_n - \varepsilon) \tag{3}$$

и (с учетом неравенства (1)):

$$\chi\{\tau' > n,\ n' = n\}\mathrm{M}\{\theta_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} = \chi\{\tau' > n,\ n' = n\}\mathrm{M}\{f(\xi_{(n+1)'}) +$$
$$+ ((n+1)' - n - 1)\varepsilon \mid \mathcal{F}_n\} = \chi\{\tau' > n,\ n' = n\}(\mathrm{M}_{\xi_n} f(\xi_\tau) + \mathrm{M}_{\xi_n}\tau\varepsilon -$$
$$- \varepsilon) \leqslant \chi\{\tau' > n,\ n' = n\}(f(\xi_n) - \varepsilon) = \chi\{\tau' > n,\ n' = n\}(\mathrm{M}\{f(\xi_{n'}) +$$
$$+ (n' - n)\varepsilon \mid \mathcal{F}_n\} - \varepsilon) = \chi\{\tau' > n,\ n' = n\} \quad (\theta_n - \varepsilon). \tag{4}$$

Из (2) — (4) получаем $M\{\theta'_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\} \leqslant \chi\{\tau' \leqslant n\}\theta'_n + \chi\{\tau' > n, n' > n\} \times \times (\theta'_n - \varepsilon) + \chi\{\tau' > n, n' = n\}(\theta'_n - \varepsilon) = \theta'_n - \chi\{\tau' > n\}\varepsilon$. Поэтому $M\theta'_{n+1} \leqslant M\theta'_n - P\{\tau' > n\}\varepsilon$, $n = 0, 1, \ldots$, и по индукции (учитывая неотрицательность $\theta'_{n+1}$) получаем $\varepsilon M\tau' = \varepsilon \sum_n P\{\tau' > n\} \leqslant M\theta'_0 = f(x)$. Так как $\tau_A \leqslant \tau'$, то $m_{x,A} \leqslant \varepsilon^{-1} f(x)$. Пусть $x \in A$, $\nu$ — первый после $\tau - 1$ момент попадания цепи в $A$. Тогда из полученной оценки сверху для $m_{y,A}$ и неравенства (1′) следует $M_x\nu \leqslant M_x\tau + \sum_y \chi\{y \notin A\} p(\tau, x, y)\varepsilon^{-1} f(y) < \infty$.

Из рассмотрения соответствующего полумарковского процесса с конечным множеством состояний $A$ следует эргодичность цепи. Из неравенства (1) с учетом того, что $\tau \geqslant 1$, получаем $\inf_E f(x) + \varepsilon \leqslant \sum_y p(\tau, x, y) f(y) + \varepsilon \leqslant f(x)$, $x \notin A$, т. е. $\liminf_{x\to\infty} f(x) > \inf_E f(x)$. Из оценки сверху для $m_{x,A}$ и очевидного неравенства

$$m_{x,B} \leqslant m_{x,A} + \sum_{y\in A} m_{y,B} \tag{5}$$

следует $m_{x,B} = \mathcal{O}(f(x))$, $x \to \infty$ (так как $A$ конечно).

б). Докажем обратное утверждение. По условию $\liminf_{x\to\infty} f(x) > \alpha = \inf f(x)$, поэтому $A = \{x : f(x) = \alpha\}$ конечно и $f(x) > \alpha + \varepsilon'$ на $E \setminus A$ для некоторого $\varepsilon' > 0$. Пусть $\tau$ — первый «после нуля» момент попадания цепи в $A$ ($\tau \geqslant 1$). Условие (1′) следует из определения $A$, $\tau$ и эргодичности цепи. Меняя местами $A$ и $B$ в неравенстве (5), из условия теоремы и неравенства $f(x) > \varepsilon'$, $x \notin A$, получаем $m_{x,A} \leqslant cf(x)$. При $\varepsilon < \varepsilon' c^{-1}(\alpha + \varepsilon')^{-1}$ имеем ($x \notin A$) $\sum_y p(\tau, x, y) f(y) + \varepsilon M_x\tau \leqslant \alpha + \varepsilon' c^{-1}(\alpha + \varepsilon')^{-1} cf(x) \leqslant f(x)$. Теорема доказана.


1. *Малышев В. А., Меньшов М. В.* Эргодичность, непрерывность и аналитичность счетных цепей Маркова // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1979.— 39.— С. 2—48.
2. *Неве Ж.* Математические основы теории вероятностей.— М. : Мир, 1969.— 310 с.


Киев. инж.-строит. ин-т

Получено 23.04.87