УДК 519.21

Ю. П. Филонов

Средние времена достижения множеств для марковских цепей

В настоящей статье приведены достаточные условия конечности средних времен достижения подмножеств пространства состояний однородных марковских цепей (м. ц.), учитывающие счетное разбиение пространства состояний. Такие разбиения естественным образом возникают при исследованиях многих стохастических систем (геометрическая многомерность фазового пространства, многоканальность системы и т. п.). В изложении используются пробные функции (см., например, [1, 2]). Основной результат сформулирован в теореме 1.

Пусть $L=\{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ — однородная м.ц. со счетным множеством E сообщающихся состояний; $V=V(x)$ — ограниченная снизу функция на E со значениями в R; $E=\bigcup\limits_{i\in\omega} E_i$, $\omega=\{0,1,\ldots\}$, $E_i\cap E_j=\varnothing$ при $i\neq j$; $A\subset E$, $B\subset E$, $A\cap B=\varnothing$, $B\cap E_i\neq\varnothing$ для конечного множества N_B индексов i; $E(A)=\Pi(E_i\setminus A)$ и непусто; для любого $\bar{x}=(x_0,x_1,\ldots)\in E(A)$ $L(\bar{x})=\{\tilde{\xi}_n\}_{n=0}^{\infty}$ — м.ц. с переходной матрицей $P(\bar{x})$ $(P(\bar{x},j,k)=\mathrm{P}_{xj}(\xi_1\in E_k)$ — ее элементы). При этом считаем, что состояния из ω сообщаются для любой цепи $L(\bar{x})$ и эти цепи возвратны. Тогда существует строка $\pi(\bar{x})=(\pi_0(\bar{x}),\pi_1(\bar{x}),\ldots)$ — единственное (с точностью до пропорциональности) положительное решение уравнения $\bar{\pi}(x)\bar{P}(x)=\bar{\pi}(x)$ (см. § 33 [3]). Обозначим $\pi(\bar{x},B)=\sum\limits_i\chi(x_i\in B)\pi_i(\bar{x})$ (χ — индикатор). Пусть $a(x)=M_x(V(\xi_1)-V(\xi_0))$; N — конечное подмножество множества ω; $E_N=\bigcup\limits_{i\in N}E_i$; $\varepsilon,c>0$. Функцию $a'(x)=\chi(x\in E_N)\max(a(x)+\varepsilon,-c)+\chi(x\notin E_N)\times\max(a(x)+\varepsilon,0)$ назовем приближением сверху функции $a(x)$. Далее $a'(\bar{x})$ — вектор-столбец (функция на ω) с элементами $a'(x_j)$ (подобным образом определяется $g(\bar{x})$ для любой функции $g(x)$ на E); ${}_ip_{jj}(\bar{x})$ — среднее количество попаданий в j цепи $L(\bar{x})$ до первого попадания в i при условии $\tilde{\xi}_0=j$ (см. § 9 [4]); τ_A — время достижения множества A цепью L. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:* 1) $\pi(\bar{x})a'\times(\bar{x})\leqslant k\pi(\bar{x},B)$, $\bar{x}\in E(A)$, $k=\mathrm{const}$; 2) ${}_ip_{jj}(\bar{x})$ *ограничены сверху на* $E(A)$ *при некотором* i *и фиксированных* $j\in N\cup N_B$. *Тогда* $\mathrm{M}_x\tau_{A\cup B}<\infty$, $x\in E$.

Замечание. Для выполнения условия 2 достаточно, например, легко проверяемого условия (считаем $i=0$) $\min\limits_{0<k\leqslant\bar{k}}\ \inf\limits_{x\in E_k\setminus A}P_x(\xi_1\in E_0\cup\ldots\cup E_{k-1})>0$, где $\bar{k}=\max(i;\ i\in N\cup N_B)$, или ему подобного.

Пусть для $\tilde{L}$ — одной из цепей $L(\bar{x})$ — с соответствующими переходной матрицей $\tilde{P}=(\tilde{P}(j;k))$ и инвариантной мерой π $b=b(i)$ — некоторая функция на ω (вектор-столбец), δ_j — столбец с элементами $\delta_j(i)=\chi(i=j)$, $\tau_D=\min(n;\ \tilde{\xi}_n\in D)$, $\tau_D^1=\min(n>0;\ \tilde{\xi}_n\in D)$ (будем писать $i,j\ldots$ вместо $D=\{i,j\ldots\}$ при использовании D в качестве индекса), ${}_Dm_i(b)=\mathrm{M}_i\sum\limits_n\chi(n<\tau_D)b(\tilde{\xi}_n)$ (условия существования вводимых величин будут приведены далее). ${}_Dp_{ij}={}_Dm_i(\delta_j)$, ${}_Df_{ij}=\mathrm{P}_i(\tau_j<\tau_D)$, ${}_Dm_i^1(b)=\mathrm{M}_i\sum\limits_n\chi(0<$

$< n \leqslant \tau_D^1)\ b(\tilde{\xi}_n)$, ${}_Dp_{ij}^1 = {}_Dm_i^1(\delta_j)$, ${}_Df_{ij}^1 = \mathrm{P}_i(\tau_D^1 > \tau_j^1)$. Из общих сведений о м. ц. (см. 4. I [4]) следует 1.1) ${}_ip_{ij}^1 = \pi_j/\pi_i$; 1.2) ${}_im_k(b) = {}_{ij}m_k(b) + {}_if_{kj}\ {}_im_j(b)$; 1.3) ${}_im_i^1(b) = {}_{ij}m_i^1(b) + {}_if_{ij}^1\ {}_im_j^1(b)$; 1.4) ${}_im_j^1(b) + b(j) = {}_im_j \times (b) + b(i)$, $i \neq j$; 1.5) ${}_Dm_i(b) = \sum_j b(j)\ {}_Dp_{ij}$, ${}_Dm_i^1(b) = \sum_j b(j)\ {}_Dp_{ij}^1$ (из определения); 1.6) ${}_im_i^1(b) = \pi b/\pi_i$ (из 1.5) и 1.1)); 1.7) ${}_im_j(b) = \sum_k \tilde{P}(j, k) \times {}_im_k(b) + b(j)$, $j \neq i$; 1.8) ${}_im_i^1(b) = \sum_k \tilde{P}(i, k)\ {}_im_k(b) + b(i)$.

1. Для истинности написанных выше равенств достаточно условия $\pi\,|b| < \infty$ ($|b|$ — столбец с элементами $|b(i)|$). Это следует из сообщаемости состояний и последовательного применения к функции $|b|$ равенств 1.6), 1.3), 1.4).

2. Столбец (функция на ω) h_i с элементами $h_i(j) = {}_im_j(b)$ не зависит от величин $b(i)$, $\tilde{p}(i, k)$, $k = 0, 1, \ldots$. Как следует из соотношений 1.6)—1.8), он удовлетворяет равенству (I — единичная матрица)

$$(I - \tilde{P})\,h_i = b - {}_im_i^1(b)\,\delta_i = b - (\pi b)\,\pi_i^{-1}\delta_i. \tag{1}$$

3. Если $\pi b = 0$, то функция $\Delta = h_i - h_j$ постоянна. Докажем это. Поменяем i и j местами в равенстве 1.2) и возьмем разность ${}_im_k(b) - {}_jm_k \times (b) = {}_if_{kj}\ {}_im_j(b) - {}_jf_{ki}\ {}_jm_i(b)$. Значит Δ — ограниченная функция по k, удовлетворяющая равенству $(I - \tilde{P})\,\Delta = 0$ (из равенств (1) и $\pi b = 0$). Но такие функции для возвратных цепей постоянны [3, с. 428].

4. Пусть наряду с цепью $\tilde{L} = L(\bar{x})$ рассматривается цепь $L' = L(\bar{x}')$. Величины для цепи L', аналогичные введенным для цепи $\tilde{L}$, обозначим штрихом (P', π', b' и т. д.) Зафиксируем i и предположим, что $x_j' = x_j$ и $b_j' = b_j$, $j \neq i$, $\pi b = 0$. Тогда последовательно из условий 3, 2, (1) получим равенства $(I - P')\,h_j = (I - P')\,h_i = (I - P')\,h_i' = b' - (\pi' b') \times (\pi_i')^{-1}\delta_i$ При $x = x_i'$ будем иметь

$$h_j(i) = \sum_k p_x(k)\,h_j(k) + b'(i) - \pi' b'\,(\pi_i')^{-1}, \tag{2}$$

где $p_x(k) = \mathrm{P}_x(\xi_1 \in E_k)$.

Доказательство теоремы 1. Положим $i = 0$ в условии 2 теоремы и $\pi_0(\bar{x}) = 1$ для любого $\bar{x} \in E(A)$. Введем множества $E_{i,m}$, $m \in \omega$, такие, что $E_{i,m} = E_i$ при $i > m$, а при $m \geqslant i$ $E_{i,m} \setminus A$ конечны, непусты и $E_{i,m}$, возрастая по $m, m \geqslant i$, $m \to \infty$, стремится к E_i. Очевидно, существует элемент $\bar{x}'$, принадлежащий всем множествам $E^m = \prod_i (E_{i,m} \setminus A)$.

Множество $\tilde{E} = \{\bar{x} \in E^m\colon x_i = x_i',\ i > m\}$ конечно при любом m, поэтому из условия 1 теоремы следует существование такой неотрицательной функции $\varepsilon(x, m)$, что для функции $a(x, m) = a'(x) - k\chi(x \in B) + \varepsilon(x, m)$ наибольшее значение произведения $\pi(\bar{x})\,a(\bar{x}, m)$ на множестве $\tilde{E}$ равно 0 и достигается при некотором $\bar{x}^m$ Столбец (функцию) h^m определяем как столбец h_0 (см. 2) по цепи $L(\bar{x}^m)$ при $b = a(\bar{x}^m, m)$, значит, $\pi b = 0$. При любых $i \in \omega$, $x \in E_i \setminus A$ и достаточно большом m $x \in E_{i,m} \setminus A$ и из формулы (2) получаем ($b'(i) = a(x\ m)$, $\pi' b' \leqslant 0$ по выбору $\bar{x}^m$)

$$h^m(i) \geqslant \sum_k p_x(k)\,h^m(k) + (a(x, m). \tag{3}$$

Из определения h^m имеем $(\alpha^- = \max(-\alpha, 0))\colon (h^m(i))^- \leqslant {}_0m_i(a^-(\bar{x}^m, m)) \leqslant \sum_{j \in N \cup N_B} {}_0p_{ij}(\bar{x}^m)\,a^-(x_j^m, m)$. Поскольку ${}_Dp_{ij} \leqslant {}_Dp_{jj}$, $a^-(x, m) \leqslant c + \varepsilon$ множество $N \cup N_B$ конечно и выполняется условие теоремы, то функции h^m равномерно ограничены снизу. Из этого с учетом соотношений $h^m(0) = 0$, $a^-(x, m) \leqslant c + k$ и неравенства (3) (при $i = 0$) получаем ограниченность сверху множества $\{h^m(k): m \in \omega\}$ при таком k, что $p_x(k) > 0$. Заменяем i в формуле (3) на такое k и повторяем рассуждение. Из сообщаемости состояний делаем вывод, что функция $f = \varliminf_{m \to \infty} h^m$ — конечная, ограниченная снизу. По лемме Фату из неравенства (3) получаем

$$f(i) \geqslant \sum_k p_x(k) f(k) + a'(x) - k\chi(x \in B) \quad x \in E_i \setminus A. \tag{4}$$

Обозначим $\varphi(x) = V(x) + f(i)$, $x \in E_i$, $i \in \omega$. Функция φ на E ограничена снизу и, как видно из (4), удовлетворяет неравенству $\mathrm{M}_x(\varphi(\xi_1) - \varphi(x)) = a(x) + \sum_k p_x(k) f(k) - f(i) \leqslant a(x) - a'(x) + k\chi(x \in B) \leqslant -\varepsilon + k\chi(x \in B)$, $x \notin A$. Отсюда имеем (следуя выводу критерия эргодичности Фостера) $\mathrm{M}_x \tau_{A \cup B} < \infty$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Если цепи $L(\bar{x})$ эргодичны и инфинум стационарных вероятностей $\pi_0(\bar{x})$ положителен, то $\mathrm{M}_x \tau_{A \cup E_0} < \infty$, $x \in E$.*

Следствие 2. *Пусть выполняются условия теоремы и множество B конечно. Тогда: а) если $A \neq \varnothing$, то $\mathrm{M}_x \tau_A < \infty$; б) если $A = \varnothing$, $B \neq \varnothing$, то цепь L эргодична; в) если A конечно, для любого $x \in A$ $a(x) < \infty$ и множество $\{i : \mathrm{P}_x(\xi_1 \in E_i) > 0\}$ ограничено, то цепь L эргодична.*

Следствие 3. *Пусть множества E_i бесконечны, функция $a(x)$ ограничена сверху на E, меры $\pi(\bar{x})$ вероятностны (т. е. цепи $L(\bar{x})$ эргодичны), при поточечной сходимости $\bar{x} \to \infty$ $\pi(\bar{x})$ сходится к вероятностной мере $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ (здесь $\infty = (\infty_0, \infty_1, \ldots)$, где для любого i ∞_i — элемент, компактифицирующий дискретное пространство E_i). Обозначим $a_i = \varlimsup_{x \to \infty} a(x)$, $x \in E_i$, $i \in \omega$. Тогда цепь L эргодична, если выполняются условия: а) $\Sigma a_i \alpha_i < 0$; б) для любого x: или $\{i : \mathrm{P}_x(\xi_1 \in E_i) > 0\}$ ограничено или $\inf(\pi_i(\bar{x});\ x_i = x) > 0$; в) $\inf {}_j f^1_{ji}(\bar{x}) > 0$ для некоторого i и любого фиксированного $j \neq i$, $\bar{x} \in \Pi E_i$.*

Условия сходимости стационарных вероятностей приведены в [1].

Следствие 4. *Пусть E (в терминах теории графов) — дерево с корнем O. Цепь за один шаг с вероятностью $\beta(x)$ возвращается в соседнюю вершину по направлению к корню и, с общей вероятностью $\alpha(x) = 1 - \beta(x)$, попадает в одну из соседних вершин по направлению от корня. Предположим, что выполняется неравенство $\sup \sum_i [\alpha(x_i) \rho_i]^{-1} < \infty$, где $\rho_i = \prod_{k=1}^{i} \beta(x_k) \times \alpha^{-1}(x_k)$, а супремум берется по всем последовательностям $\bar{x} = (x_0, x_1, \ldots)$ таким, что кратчайшее расстояние (по количеству ребер) от вершины x_j до корня равно j, $j = 0, 1, \ldots$. Тогда цепь эргодична.*

1. *Калашников В. В.* Качественный анализ поведения сложных систем методом пробных функций.— М. : Наука, 1978.— 247 с.
2. *Малышев В. А., Меньшов М. В.* Эргодичность, непрерывность и аналитичность счетных цепей Маркова // Тр. моск. мат. о-ва.— 1979.— 39.— С. 2—48.
3. *Хеннекен П., Тортра А.* Теория вероятностей и некоторые ее применения.— М. : Наука, 1974.— 472 с.
4. *Чжун К. Л.* Однородные цепи Маркова.— М. : Мир, 1967.— 425 с.

Киев. инж.-строит. ин-т. Получено 23.04.87