УДК 517.956

В. А. Маловичко

О краевых задачах для одной системы дифференциальных уравнений четвертого порядка

В настоящей статье изучается разрешимость краевых задач для системы

$$LU(x, y, z) \equiv M^*MU(x, y, z) + C(x, y, z)U = F(x, y, z), \tag{1}$$

где $MU(x, y, z) \equiv xU_{xx} - U_{yy} + U_{zz}$, M^* — оператор, формально сопряженный с оператором M, C — положительно определенная симметричная матрица размерности $N \times N$, U, F — N-мерные вектор-функции.

Систему (1) будем рассматривать в ограниченной односвязной области $\Omega \subset R^3$, граница Γ которой состоит из четырех характеристических для оператора M поверхностей:

$$\Gamma_1 : 1 + y = \sqrt{4x + z^2}, \quad x \geqslant 0, \quad y \leqslant 0,$$

$$\Gamma_2 : 1 - y = \sqrt{4x + z^2}, \quad x \geqslant 0, \quad y \geqslant 0,$$

$$\Gamma_3 : 1 + z = \sqrt{-4x + y^2}, \quad x \leqslant 0, \quad z \leqslant 0,$$

$$\Gamma_4 : 1 - z = \sqrt{-4x + y^2}, \quad x \leqslant 0, \quad z \geqslant 0.$$

Задача 1. В области Ω найти решение системы (1), удовлетворяющее краевому условию

$$U(x, y, z) = 0, \quad (x, y, z) \in \Gamma. \tag{2}$$

Введем обозначения: $(l_1(x, y, z), l_2(x, y, z), l_3(x, y, z))$ — вектор единичной внешней нормали к границе Γ в точке $(x, y, z) \in \Gamma$; $C_0^k(\overline{\Omega})$ — множество вектор-функций из $C^k(\overline{\Omega})$, равных нулю на Γ; H_+ — гильбертово пространство, полученное замыканием множества $C_0^4(\overline{\Omega})$ по норме $\|U\|_+^2 = \int\limits_\Omega [(MU)(MU) + UU]\, d\Omega$; H_- — гильбертово пространство с негативной нормой $\|\cdot\|_-$ [1], построенное по $L_2(\Omega)$ и H_+.

Лемма 1. *Задача* 1 *является самосопряженной.*

Доказательство. Интегрируя по частям выражение $(LU)V$, где $U, V \in C_0^4(\overline{\Omega})$, приходим к равенству

$$\int\limits_\Omega (LU)\, V d\Omega = -\int\limits_\Gamma MU \cdot (xV_x l_1 - V_y l_2 + V_z l_3)\, d\Gamma + \int\limits_\Gamma (xU_x l_1 - U_y l_2 + U_z l_3) \times \times MV d\Gamma + \int\limits_\Omega ULV d\Omega. \tag{3}$$

Так как операторы $l_2\partial/\partial x - l_1\partial/\partial y$, $l_2\partial/\partial z - l_3\partial/\partial y$ являются внутренними дифференциальными операторами на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, то из условия (2) следует, что на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$

$$l_2U_x - l_1U_y = 0, \quad l_2U_z - l_3U_y = 0. \tag{4}$$

Из соотношений (4) на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ получаем равенство

$$l_1 x (l_2 U_x - l_1 U_y) + l_3 (l_2 U_z - l_3 U_y) = (x U_x l_1 + U_z l_3) l_2 - (x l_1^2 + l_3^2) U_y = 0. \quad (5)$$

Поскольку на границе Γ выполняется соотношение

$$x l_1^2 - l_2^2 + l_3^2 = 0, \quad (6)$$

то из (5), (6) на $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ имеем равенство

$$x U_x l_1 - U_y l_2 + U_z l_3 = 0, \quad (7)$$

из которого следует, что интегралы по $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ в (3) равны нулю. Аналогично можно доказать, что на $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$ также выполняется равенство (7) и, следовательно, интегралы $\Gamma_3 \cup \Gamma_4$ в (3) равны нулю. Лемма доказана.

Лемма 2. *Для любой вектор-функции $U \in \overset{\circ}{C}{}_0^4 (\overline{\Omega})$ справедливы энергетические неравенства*

$$\| LU \|_- \geqslant \gamma_1 \| U \|_+, \quad (8)$$

$$\| LU \|_- \leqslant \gamma_2 \| U \|_+, \quad (9)$$

где γ_1, γ_2 — положительные постоянные, не зависящие от U.

Доказательство. Интегрируя по частям выражение $(LU)\, U$, $U \in C_0^4\ (\overline{\Omega})$ и учитывая, что интегралы по Γ при этом будут равны нулю, имеем

$$\int_\Omega (LU)\, U d\Omega = \int_\Omega [(MU)(MU) + CUU]\, d\Omega. \quad (10)$$

Поскольку матрица C положительно определена, то применяя к левой части равенства (10) неравенство Шварца, получаем неравенство (8).

Неравенство (9) докажем так:

$$\| LU \|_- = \sup_{V \in H_+} \frac{\int_\Omega (LU)\, V d\Omega}{\| V \|_+} = \sup_{V \in C_0^4(\overline{\Omega})} \frac{\int_\Omega (LU)\, V d\Omega}{\| V \|_+} =$$

$$= \sup_{V \in C_0^4(\overline{\Omega})} \frac{\int_\Omega [(MU)(MV) + CUV]\, d\Omega}{\| V \|_+} \leqslant \sup_{V \in C_0^4(\overline{\Omega})} \frac{\gamma_2 \| U \|_+ \| V \|_+}{\| V \|_+} = \gamma_2 \| U \|_+.$$

Лемма доказана.

Определение. *Пусть $F \in L_2(\Omega)$. Вектор-функцию $U \in \overset{\circ}{H}_+$ назовем сильным решением задачи* 1, *если существует последовательность вектор-функций $U_k \in C_0^4 (\overline{\Omega})$ такая, что* $\lim\limits_{k \to \infty} \| U_k - U \|_+ = \lim\limits_{k \to \infty} \| LU_k - F \|_- = 0.$

Следствием лемм 1, 2 является следующая теорема.

Теорема. *Для любой вектор-функции $F \in L_2(\Omega)$ существует единственное сильное решение задачи* 1.

Замечание. Аналогичные результаты можно получить для других краевых задач для системы (1). Краевые условия в этих задачах надо задавать так, чтобы выполнялось условие $(MU)\, U|_\Gamma = 0$. В качестве примера сформулируем одну такую задачу.

Задача 2. В области Ω найти решение $U = U_1 + U_2$ системы (1), удовлетворяющее краевым условиям $MU_1|_{\Gamma_1} = U_2|_{\Gamma_1} = MU|_{\Gamma_2} = U|_{\Gamma_3} = U_1|_{\Gamma_4} = MU_2|_{\Gamma_4} = 0$, где $U_1 = (u_1, \ldots, u_m, 0, \ldots, 0)$, $U_2 = (0, \ldots, 0, u_{m+1}, \ldots, u_N)$, $0 \leqslant m \leqslant N$.

1. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наук. думка, 1965.— 798 с.

Киев. технол. ин-т пищ. пром-сти

Получено 18.11.86