УДК 534.10

В. М. Алексеев

О моментных функциях процессов в некоторых механических системах

В монографии В. В. Болотина [1] исследуется прохождение стационарного случайного процесса через стационарную линейную систему, описываемую уравнением $Lu = \xi$, где L — линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами

$$L = a_0 d^k/dt^k + a_1 d^{k-1}/dt^{k-1} + \ldots + a_{k-1} d/dt + a_k.$$

При этом формула, выражающая корреляционную функцию выходного процесса $K_1(\tau)$ через спектральную плотность входного процесса $s(\omega)$, имеет вид

$$K_1(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\omega)\, e^{i\omega\tau} d\omega}{|L(i\omega)|^2}. \tag{1}$$

Интегралы такого вида вычислены в [1] при некоторых ограничениях, наложенных на функции $s(\omega)$.

Найдем формулы для корреляционных функций выходных процессов при меньших ограничениях на функции $s(\omega)$.

1. Рассмотрим линейную систему с одной степенью свободы, находящуюся под действием стационарного в широком смысле случайного процесса $\xi(t)$. Уравнение колебаний такой системы имеет вид [1]

$$M\ddot{u} + k\dot{u} + cu = \xi(t), \tag{2}$$

где M — масса, $u(t)$ — перемещение, c — жесткость упругой связи, k — — коэффициент трения, $k > 0$, $c > 0$, $k^2 < 4cM$. После преобразований уравнение (2) принимает вид

$$\ddot{u} + 2\varepsilon\dot{u} + \omega_0^2 u = \xi_1(t). \tag{3}$$

Здесь

$$\omega_0^2 = c/M, \quad 2\varepsilon = k/M, \quad \xi_1(t) = \frac{1}{M}\xi(t), \quad 0 < \varepsilon < \omega_0. \tag{4}$$

Относительно случайного процесса $\xi_1(t)$ предполагаем, что математическое ожидание $(\langle \xi_1(t) \rangle)$ равно нулю, а спектральная плотность $s(\omega)$ — четная аналитическая функция для всех $\omega \in [0, 2\omega_0]$.

Системы, аналогичные (3), исследовались в [1] в предположении, что $|\Delta s(\omega)| < \varepsilon$ при $|\Delta\omega| < 2\omega_0$, $\omega \in [0, 2\omega_0]$, а в работе [2] при $0 < \varepsilon < 1$.

Для системы с одной степенью свободы, описываемой уравнением (3), имеем $L(i\omega) = \omega_0^2 - \omega^2 + 2i\varepsilon\omega$, и формула (1) принимает вид $K_1(\tau) =$ $= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s(\omega)\, e^{i\omega\tau} d\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\varepsilon^2\omega^2}$.

Для вычисления этого интеграла рассмотрим $\int\limits_C f(z)\, dz$, где контур C состоит из интервала $(-R, R)$ действительной оси и дуги C_R окружности $|z| = R$ в верхней полуплоскости,

$$f(z) = \frac{s(z)\, e^{iz\tau}}{(\omega_0^2 - z^2)^2 + 4\varepsilon^2 z^2},$$

$s(z)$ — аналитическое продолжение $s(\omega)$ в верхней полуплоскости. Так как функция $f(z)$ удовлетворяет условиям теоремы о вычетах и леммы Жордана [3], то имеем

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\,dz = 0, \qquad (5)$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C} f(z)\,dz = K_1(\tau) = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_k), \qquad (6)$$

где z_k — полюсы $f(z)$, расположенные в верхней полуплоскости.

Решая уравнение $(\omega_0^2 - z^2)^2 + 4\varepsilon^2 z^2 = 0$, находим полюсы $f(z)$, расположенные в верхней полуплоскости $z_1 = i\varepsilon + \alpha$, $z_2 = i\varepsilon - \alpha$, $\alpha = \sqrt{\omega_0^2 - \varepsilon^2}$. Вычитая $f(z)$ в точке $z = z_1$, получаем

$$\operatorname{Res} f(z_1) = \frac{s(\alpha + i\varepsilon)}{8\alpha\varepsilon(i\alpha - \varepsilon)}\, e^{i\tau(\alpha + i\varepsilon)}. \qquad (7)$$

Аналогичным образом находим

$$\operatorname{Res} f(z_2) = \frac{s(-\alpha + i\varepsilon)}{8\alpha\varepsilon(i\alpha + \varepsilon)}\, e^{i\tau(i\varepsilon - \alpha)}. \qquad (8)$$

Учитывая четность и аналитичность функции $s(\omega)$, разлагаем функцию $s(z)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = \alpha$ $s(z) = s(\alpha) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{s^{(k)}(\alpha)(z-\alpha)^k}{k!}$.

При $z = \alpha + i\varepsilon$ имеем

$$s(\alpha + i\varepsilon) = s(\alpha) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{s^{(2k)}(\alpha)(-\varepsilon^2)^k}{(2k)!} + i\varepsilon\sum_{k=0}^{\infty}\frac{s^{(2k+1)}(\alpha)(-\varepsilon^2)^k}{(2k+1)!}. \qquad (9)$$

Обозначим $s_0(\alpha) = s(\alpha) + \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{s^{(2k)}(\alpha)(-\varepsilon^2)^k}{(2k)!}$, $s_1(\alpha) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{s^{(2k+1)}(\alpha)(-\varepsilon^2)^k}{(2k+1)!}$.

Тогда $s(\alpha + i\varepsilon) = s_0(\alpha) + i\varepsilon s_1(\alpha)$, $s(-\alpha + i\varepsilon) = s_0(\alpha) - i\varepsilon s_1(\alpha)$. Подставляя это выражение в (7) и (8), после преобразований получаем

$$K_1(\tau) = e^{-\varepsilon|\tau|}\frac{\pi}{2\alpha\varepsilon\omega_0^2}\left(s_0(\alpha)(\alpha\cos\tau\alpha + \varepsilon\sin\alpha|\tau|) - \varepsilon s_1(\alpha)\times\right.$$
$$\left.\times(\alpha\sin\alpha|\tau| - \varepsilon\cos\alpha\tau)\right). \qquad (10)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Если спектральная плоскость стационарного в широком смысле случайного процесса* $\xi(t)$ *с нулевым математическим ожиданием — четная аналитическая функция для всех* $\omega \in [0, 2\omega_0]$, *то при выполнении условий* (4) *корреляционная функция на выходе системы, описываемой уравнением* (2), *имеет вид* (10), *где* $S_0(\alpha)$, $s_1(\alpha)$ *определяется формулой* (9).

2. Рассмотрим линейную систему с k степенями свободы, совершающую стационарные случайные колебания под действием внешних сил. Предполагая полное разделение обобщенных координат, записываем уравнения колебаний системы в виде

$$\ddot{u}_j + 2\varepsilon_j\dot{u}_j + \omega_j^2 u_j = q_j(t), \quad (j = 1, 2, \ldots, k). \qquad (11)$$

Здесь ω_j — парциальные собственные частоты, ε_j — парциальные коэффициенты демпфирования, $0 < \varepsilon_j < \omega_j$.

Для линейной системы с k степенями свободы элементы корреляционной матрицы выходного процесса имеют вид [1] $K_{jm}(\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{s_{jm}(\omega)\,e^{i\omega\tau}d\omega}{a_j(-\omega)\,a_m(\omega)}$,

где $s_{jm}(\omega)$ — взаимные спектральные плотности внешних воздействий, $a_j(\omega)=\omega_j^2+2i\varepsilon_j\omega-\omega^2$. После вычислений, аналогичных (5)—(10), получаем

$$K_{jm}(\tau)=\frac{2\pi s_{jm}(\alpha_j;\,\varepsilon_j)}{\alpha_j\,(b_{jm}^2+c_{jm}^2)}\,e^{-|\tau|\varepsilon_j}\,(b_{jm}\cos\alpha_j\tau+c_{jm}\sin\alpha_j\,|\,\tau\,|),\qquad(12)$$

где $c_{jm}=\omega_j^2-\omega_m^2-2\varepsilon_j\,(\varepsilon_j+\varepsilon_m)$, $b_{jm}=2\alpha_j\,(\varepsilon_j+\varepsilon_m)$, $\alpha_j=\sqrt{\omega_j^2-\varepsilon_j^2}$,

$s_{jm}\,(\alpha_j;\,\varepsilon_j)=s_{jm}\,(\alpha_j)+\sum\limits_{l=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_j^{2l}\,(-1)^l\,s_{jm}^{(2l)}}{(2l)!}$. Таким образом, доказана теорема 2.

Теорема 2. *Если взаимные спектральные плотности внешних воздействий системы* (11) *являются четными аналитическими функциями при всех* $\omega\in[0,\,2\omega_0]$, *то элементы корреляционной матрицы выходного процесса системы* (11) *вычисляются по формуле* (12).

1. *Болотин В. В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений.— М. : Госстройиздат, 1982.— 351 с.
2. *Алексеев В. М., Исламов Р. Р.* Исследование устойчивости физического маятника при случайно колеблющейся точке подвеса // Прикл. механика.— 1971.— 7, № 10.— С. 81—84.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного.— М. : Наука, 1965.— 736 с.

Ин-т инженеров гражд. авиации, Киев
Получено 21.04.87