УДК 517.97

А. А. Панков

О полулинейных эллиптических уравнениях в $\mathbb{R}^n$ с нестабилизирующимися коэффициентами

Рассмотрим полулинейное эллиптическое уравнение в $\mathbb{R}^n$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (a_{ij}(x) \partial_j u) + c(x) u = f(x, u), \tag{1}$$

где $f(x, 0) = 0$. Представляет интерес отыскание нетривиальных ($u \not\equiv 0$) решений уравнения (1), исчезающих на бесконечности. В случае, когда коэффициенты и правая часть (1) не зависят от x, либо стабилизируются при $x \to \infty$, это уравнение изучалось многими авторами (см., нарример, [1—4]). В настоящей работе рассматривается случай, когда $a_{ij}(x)$, $c(x)$ и $f(x, u)$ не стабилизируются на бесконечности (например, периодичны). Для изучения уравнения (1) используется вариационная техника вместе с подходящим вариантом принципа концентрированной компактности [3, 4]. Нестабилизируемость коэффициентов приводит к рассмотрению оболочки уравнения (1) в аспекте теории Фавара [5, 6].

1. Будем рассматривать уравнение (1) при следующих предположениях.

1°. Функции $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ и $c(x)$ ограничены и непрерывны на $\mathbb{R}^n$, семейства сдвигов $\{a_{ij}(\cdot + y)\}$ и $\{c(\cdot + y)\}$, $y \in \mathbb{R}^n$, относительно компактны в $C(\mathbb{R}^n)$, $c(x) \geqslant \alpha > 0$ и выполнено условие равномерной эллиптичности $\Sigma a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha|\xi|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.

2°. Функция $f(x, t)$ непрерывна и непрерывно дифференцируема по t, $\partial f/\partial t$ ограничена и равномерно непрерывна на $\mathbb{R}^n \times [-T, T]$ для любого $T > 0$ и существует такое $\theta \in (0, 1)$, что $0 \leqslant t^{-1} f(x, t) \leqslant \theta \dfrac{\partial f}{\partial t}(x, t)$.

3°. $\lim\limits_{|t| \to +\infty} f(x, t)|t|^{-(n+2)/(n-2)} = 0$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^{n*}$.

4°. Семейства сдвигов $\{f(\cdot + y, \cdot)\}$ и $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial t}(\cdot + y, \cdot)\right\}$, $y \in \mathbb{R}^n$, относительно компактны в $C(\mathbb{R}^n + \mathbb{R})$ и для некоторого $\delta > 0$ семейство $\{|t|^{-1} f(x + y, t)\}$, $y \in \mathbb{R}^n$, относительно компактно в $C(\mathbb{R}^n \times [-\delta, \delta])$.

Отметим, что условие $c(x) \geqslant \alpha > 0$ выделяет так называемый случай положительной массы.

Теперь введем оболочку уравнения (1). Пусть $y_k \to \infty$ — такая последовательность, что $a_{ij}(\cdot + y_k) \to a_{ij}^h(\cdot)$, $c(\cdot + y_k) \to c^h(\cdot)$, $f(\cdot + y_k, \cdot) \to f^h(\cdot, \cdot)$ в топологиях, описанных в условиях 1° и 4° ($\mathcal{H} = \{h\}$ — некоторое множество индексов). Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнения

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \partial_i (a_{ij}^h(x)\partial_j u) + c^h(x) u = f^h(x, u), \quad h \in \mathcal{H} \tag{1_h}$$

(оболочку уравнения (1)). Положим $F(x, t) = \int\limits_0^t f(x, s)\,ds$ и введем следующие функционалы на $H^1(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{E}(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{2} \sum a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j u + \frac{1}{2} c(x) u^2 - F(x, u)\right] dx, \tag{2}$$

$$J(u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\sum a_{ij}(x)\partial_i u \partial_j u + c(x) u^2 - f(x, u) u\right] dx. \tag{3}$$

Рассмотрим вариационную задачу

$$I = \inf\{\mathcal{E}(u) \mid u \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad J(u) = 0, \ u \not\equiv 0\}. \tag{4}$$

В сделанных предположениях нуль — изолированная точка поверхности $J(u) = 0$ в $H^1(R^n)$ и $\langle \mathcal{E}''(u) u, u\rangle - \langle \mathcal{E}'(u), u\rangle > 0$ для $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $u \neq 0$. Отсюда следует, что точка минимума в задаче (4) является в действительности решением уравнения (1). Описанный прием восходит к [9] и применялся впоследствии в [4, 8]. Аналогично (2), (3) с уравнением (1_h) свя-

* При $n \leqslant 2$ вместо $(n+2)/(n-2)$ следует взять любое $p < \infty$.

заны функционалы $\mathscr{E}^h$, J^h и вариационная задача

$$I^h = \inf \{\mathscr{E}^h(u) | u \in H^1(\mathbb{R}^n),\ J^h(u) = 0,\ u \not\equiv 0\}, \quad h \in \mathscr{H}. \tag{4_h}$$

Нетрудно проверить, что $I \leqslant I^h \ \forall h \in \mathscr{H}$. Кроме того, $I > 0$.

Теорема 1. *В принятых предположениях каждая минимизирующая последовательность* $\{u_k\} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ *задачи* (4) *относительно компактна с точностью до сдвигов, т. е. найдутся такие* $y_k \in \mathbb{R}^n$, *что* $\{u_k(\cdot + y_k)\}$ *относительно компактно в* $H^1(\mathbb{R}^n)$. *Каждая минимизирующая последовательность задачи* (4) *относительно компактна в* $H^1(\mathbb{R}^n)$ *в том и только том случае, когда* $I < I^h \ \forall h \in \mathscr{H}$.

Доказательство следует общей схеме [4]. Применим принцип концентрированной компактности [3] к последовательности функций $\rho_k = |\Delta u_k|^2 + u_k^2$. Все дальнейшие рассмотрения осуществляются с точностью до перехода к подпоследовательности. Можно считать, что $\int \rho_k dx \to \lambda > 0$ (случай $\lambda = 0$ очевидным образом исключается). В силу результатов [3] возможны следующие три случая (через B_R обозначим шар радиуса R с центром в нуле): 1) $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{y\in\mathbb{R}^n} \int\limits_{y+B_R} \rho_k(x)\,dx = 0$ для всех $R > 0$; 2) найдутся такие $y_k \in \mathbb{R}^n$, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют $R > 0$ и ограниченные последовательности $\{u_k^{(1)}\}$, $\{u_k^{(2)}\} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ со следующими свойствами: $\operatorname{supp} u_k^{(1)} \subset y_k + B_R$, $\operatorname{supp} u_k^{(2)} \subset z_k + B_R$, $y_k - z_k \to \infty$, $\| u_k - (u_k^{(1)} + u_k^{(2)})\|_{H^1} \leqslant \varepsilon$, $\| u_k^{(i)} \|_{H^1}^2 \to \lambda_i > 0$, $i = 1, 2$; отметим, что $\lambda_i = \lambda_i(\varepsilon) \geqslant \nu > 0$; 3) найдутся $y_k \in \mathbb{R}^n$ со следующим свойством: для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $R < \infty$, что

$$\int\limits_{y_k+B_R} \rho_k(x)\,dx \geqslant \lambda - \varepsilon. \tag{5}$$

В случае 1) $u_k \to 0$ в $H^1(\mathbb{R}^n)$, что противоречит изолированности точки нуль в множестве $J(u) = 0$ и тем самым этот случай исключается.

В случае 2, как и в [4], имеем

$$0 < I < I_{-\alpha} = \inf \left\{ \mathscr{E}(u) - \frac{1}{2} J(u) | u \in H^1(\mathbb{R}^n),\ \ J(u) = -\alpha \right\}, \quad \alpha > 0. \tag{6}$$

Далее, можно считать, что $\int | f(x, u_k) u_k - [f(x, u_k^{(1)}) u_k^{(1)} + f(x, u_k^{(2)}) u_k^{(2)}] | dx \leqslant \mu(\varepsilon) \to 0$, $\int | F(x, u_k) - [F(x, u_k^{(1)}) + F(x, u_k^{(2)})] | \, dx \leqslant \mu(\varepsilon)$, $J(u_k^{(i)}) \to \beta_i(\varepsilon)$, $i = 1, 2$, причем $|\beta_1(\varepsilon) + \beta_2(\varepsilon)| \leqslant \mu(\varepsilon)$. Более того, $\beta_i(\varepsilon) \to \beta_i$, $i = 1, 2$, для некоторой последовательности $\varepsilon \to 0$ и $\beta_1 = -\beta_2$. Теперь имеем

$$I = \lim \left[\mathscr{E}(u_k) - \frac{1}{2} J(u_k) \right] \geqslant \liminf \left[\mathscr{E}(u_k^{(1)}) - \frac{1}{2} J(u_k^{(1)}) \right] + \\ + \liminf \left[\mathscr{E}(u_k^{(2)}) - \frac{1}{2} J(u_k^{(2)}) \right] - \mu(\varepsilon). \tag{7}$$

Если, например, $\{y_k\}$ ограничено, то можно считать, что $y_k = 0$. Тогда $z_z \to \infty$ определяет элемент $h \in \mathscr{H}$ и из (7), используя условия 1° и 4°, получаем $I \geqslant I_{\beta_1(\varepsilon)} + I^h_{\beta_2(\varepsilon)} - \mu(\varepsilon)$. Отсюда $I \geqslant I_{\beta_1} + I^h_{\beta_2}$. Кроме того, всегда $I_\alpha \geqslant 0$, $I_\alpha^h \geqslant 0$. Поэтому из (6) имеем $I \geqslant I_{\beta_1} \geqslant I$ при $\beta_1 < 0$ и $I \geqslant I^h_{\beta_2} > I^h \geqslant I$ при $\beta_1 > 0$. При $\beta_1 = 0$ имеем $I \geqslant I + I^h > I$, поскольку $I^h > 0$. Случай, когда обе последовательности $\{y_k\}$, $\{z_k\}$ неограничены, приводит к неравенству $I \geqslant I^{h_1}_{\beta_1} + I^{h_2}_{\beta_2} \geqslant I$. Полученное противоречие показывает, что случай 2 невозможен.

Тем самым, имеет место случай 3. Если $\{y_k\}$ ограничено, то снова можно считать, что $y_k = 0$. Из стандартных теорем вложения и (5) следует $u_k \to u$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$, где $p<2n/(n-2)$, и слабо в $H^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\int f(x, u_k)\, u_k dx \to \int f(x, u)\, u\, dx$ и в силу ограничения $J(u_k)=0$ имеем $J(u)\leqslant 0$. Кроме того, $\mathscr{E}(u)\leqslant \lim \mathscr{E}(u_k)=I$. Если теперь $J(u)<0$, то последнее противоречит (6). Поэтому $J(u)=0$ и $\int\left[\sum a_{ij}\partial_i u_k \partial_j u_k + cu_k^2\right]dx \to$ $\to \int\left[\sum a_{ij}\partial_i u \partial_j u + cu^2\right]dx$. Отсюда следует, что $u_k \to u$ сильно в $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Если же $y_k \to \infty$, то эта последовательность определяет элемент $h\in\mathscr{H}$. Положим $\tilde{u}_k(\cdot)=u_k(\cdot - y_k)$. Тогда $\tilde{u}_k \to u$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ с $p<2n/(n-2)$ и слабо в $H^1(\mathbb{R}^n)$. Отсюда вытекает, что $J^h(u)\leqslant 0$ и $\mathscr{E}^h(u)\leqslant I$. Используя аналог (6) для задачи (4_h), как и выше, получаем $J^h(u)=0$, $\mathscr{E}^h(u)=I^h=I$ и $\tilde{u}_k\to u$ сильно в $H^1(\mathbb{R}^n)$. В частности, если $I<I^h$ $\forall h\in\mathscr{H}$, то ситуация $y_k\to\infty$ невозможна.

Если $I=I^h$ для некоторого $h\in\mathscr{H}$, то легко строится некомпактная минимизирующая последовательность для задачи (4).

2. Рассмотрим асимптотически почти периодическую ситуацию. Предположим, что $a_{ij}(x)=\hat{a}_{ij}(x)+a_{ij}^0(x)$, $c(x)=\hat{c}(x)+c^0(x)$, $f(x,t)=\hat{f}(x,t)+$ $+f^0(x,t)$. Здесь $\hat{a}_{ij}(x)$ и $\hat{c}(x)$ почти периодичны по $x\in\mathbb{R}^n$ в смысле Бора, $\hat{f}(x,t)$ и $\partial\hat{f}/\partial t$ почти периодичны по $x\in\mathbb{R}^n$ равномерно по $t\in[-T,T]$ $\forall T>0$. Предположим, что $a_{ij}^0(x)$, $c^0(x)$ и $f_0(x,t)$ имеют нулевой предел при $x\to\infty$ (последняя — равномерно по $t\in[-T,T]$ $\forall T>0$). Кроме того предполагаются выполненными все условия п. 1. Аналогично предыдущему вводятся функционалы $\hat{\mathscr{E}}$, $\tilde{J}$ и $\hat{\mathscr{E}}^h$, $\hat{J}^h$. В данном случае в качестве множества $\mathscr{H}$ можно взять компактификацию Бора $\mathbb{R}^n_B$ [9]. Теперь можно рассмотреть экстремальные задачи типа (4) и (4_h) и ввести величины $\hat{I}$ и $\hat{I}^h$.

Теорема 2. *В принятых предположениях* $I^h=\hat{I}^h=\hat{I}$ $\forall h\in\mathscr{H}=$ $=\mathbb{R}^n_B$.

Доказательство. Докажем второе равенство (первое устанавливается аналогично). Для простоты обозначений будем считать $\hat{a}_{ij}(x)=$ $=a_{ij}(x)$, $\hat{c}(x)=c(x)$ и $\hat{f}(x,t)=f(x,t)$. Так как $I\leqslant I^h$, то достаточно установить противоположное неравенство.

Пусть $\{y_k\}\subset\mathbb{R}^n$ такова, что $y_k\to\infty$ в $\mathbb{R}^n$ и $y_k\to h$ в $\mathbb{R}^n_B\supset\mathbb{R}^n$. Для $\varepsilon>0$ выберем $u\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ так, что $J(u)=0$ и $\mathscr{E}(u)\leqslant I+\varepsilon$ (это, очевидно, возможно). Положим $u_k(\cdot)=u(\cdot+y_k)$, $T=\sup|u|=\sup|u_k|$ и $\alpha_k=$ $=J^h(u_k)$. Тогда имеем

$$\alpha_k=\int\Big\{\sum\left[a_{ij}^h-a_{ij}(\cdot+y_k)\right]\partial_i u_k\partial_j u_k+\left[c^h-c(\cdot+y_k)\right]u_k^2-$$
$$-\left[f^h(\cdot,u_k)\,u_k-f(\cdot+y_k,u_k)\,u_k\right]\Big\}\,dx. \tag{8}$$

Так как $\|u_k\|_{H^1}=\|u\|_{H^1}$, то в силу почти периодичности $\alpha_k\to 0$. Далее, нетрудно видеть, что $J^h(t_k u_k)=0$ для некоторых $t_k\in\mathbb{R}$. При этом $t_k\to 1$ при $k\to\infty$. Положим $v_k=t_k u_k$. Рассмотрения, аналогичные (8), дают для достаточно больших k $I+\varepsilon\geqslant\mathscr{E}(u)\geqslant\mathscr{E}(t_k u)-\varepsilon\geqslant\mathscr{E}^h(v_k)-2\varepsilon\geqslant I^h-2\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon>0$ произвольно, то $I\geqslant I^h$ и требуемое утверждение доказано.

3. Из теоремы 1 непосредственно вытекают следующие следствия.

Следствие 1. *В условиях* 1°—4° *по крайней мере для одного* $h\in$ $\in\mathscr{H}$ *уравнение* (1_h) *имеет решение* $u\in H^1(R^n)$, $u\not\equiv 0$. *В частности, в случае периодических коэффициентов уравнение* (1) *имеет нетривиальное решение* $u\in H^1(R\ )$.

Если $I<I^n$, $\forall h\in\mathscr{H}$, то (1) также имеет нетривиальное решение. В асимптотически почти периодическом случае это условие выполняется,

если $I < \hat{I}$. Если функции $\hat{a}_{ij}(x)$, $\hat{c}(x)$ и $\hat{f}(x, t)$ периодичны, то имеется простое достаточное условие справедливости последнего неравенства.

Следствие 2. *Пусть* $\hat{a}_{ij}(x)$ $\hat{c}(x)$ *и* $\hat{f}(x,t)$ *периодичны по* $x \in \mathbb{R}^n$

$$\{\hat{a}_{ij}(x)\} \geqslant \{a_{ij}(x)\}, \quad \hat{c}(x) \geqslant c(x), \quad \hat{f}(x,t)\,t \leqslant f(x,t)\,t, \quad t \neq 0, \tag{9}$$

и хотя бы одно из этих неравенств строгое при всех $x \in \mathbb{R}^n$. *Тогда* $I < \hat{I}$ *и уравнение* (1) *имеет решение* $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $u \not\equiv 0$.

Для доказательства заметим, что в силу следствия 1 минимум $\hat{I}$ достигается на некотором $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $u_0 \not\equiv 0$, $\hat{J}(u_0) = 0$. Тогда $-\alpha = J(u_0) < \hat{J}(u_0) = 0$ в силу строгости одного из неравенств (9). Теперь из (6) имеем $\hat{I} = \hat{\mathcal{E}}(u_0) \geqslant I_{-\alpha} > I$.

Отметим, что если u_0 не обращается в нуль ни на каком непустом открытом множестве, то достаточно потребовать строгости какого-либо из неравенств (9) в одной точке. Например, это так, если $\hat{a}_{ij}(x)$, $\hat{c}(x)$ и $\hat{f}(x, t)$ обладают дополнительной регулярностью, гарантирующей, что u_0 — классическое решение.

4. В заключение сделаем несколько замечаний.

1. Условие $c(x) \geqslant \alpha > 0$ может быть несколько ослаблено. Достаточно потребовать, чтобы спектры линейных операторов, входящих в уравнения (1_h), были отделены от нуля (в почти периодическом случае это достаточно потребовать только для (1)). Кроме того, можно рассмотреть и случай «нулевой массы», например, когда $c(x) \equiv 0$. Для этого вместо $H^1(\mathbb{R}^n)$ нужно рассмотреть пространство $\{u \in L^{2n/(n-2)}(\mathbb{R}^n) \mid \nabla u \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$ и несколько видоизменить условия на f.

2. При $f(x,t) = K(x)\,|t|^{p-2}t$, $2 < p < (n+2)/(n-2)$, $n \geqslant 3$, решение может быть найдено из другой экстремальной задачи

$$\inf\left\{\frac{1}{2}\int\left[\sum a_{ij}\partial_i u \partial_j u + cu^2\right]dx \,\middle|\, u \in H^1(\mathbb{R}^n), \ \int K\,|u|^p dx = 1\right\}.$$

Возникающий здесь множитель Лагранжа устраняется переходом к λu за счет однородности порядка $p - 1 > 1$ функции $f(x, t)$ по t.

3. В почти периодическом случае остается неисследованной, по-видимому, задача о существовании нетривиального решения исходного уравнения (1). Кроме самостоятельного интереса любые результаты в этом направлении привели бы к утверждениям типа следствия 2 в асимптотически почти периодическом случае.

1. *Berestycki H., Lions P. L.* Nonlinear scalar field equations // Arch. Ration. Mech, and Anal.— 1983.— 82, N 4.— P. 313—375.
2. *Ding W.-Y., Ni W.-M.* On the existence of positive entire solutions of a semilinear elliptic equation // Ibid.— 1986.— 91, N 4.— P. 283—308.
3. *Lions P. L.* The concenbration-compcatness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I // Ann. Inst. H. Poincare; Anal. non lineaire.— 1984.— 1, N 2.— P. 109—145.
4. *Lions P. L.* The concentration-compcatness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II // Ibid.— N 4.— P. 223—283.
5. *Жиков В. В., Левитан Б. М.* Теория Фавара // Успехи мат. наук.— 1977.— 32, № 2.— С. 123—171.
6. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения.— М. : Изд-во Моск. ун-та.— 1978.— 204 с.
7. *Nehari Z.* Characteristic values associated with a class of nonlinear second-order differential equations // Acta Math.— 1961.— 105, N 3-4.— P. 141—175.
8. *Coffman C. V.* On a class of nonlinear elliptic boundary value problems // J. Math. and Mech.— 1970.— 19.— P. 351—356.
9. *Панков А. А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1985.— 181 с.

Ин-т прикл. пробл. механики и математики АН УССР, Львов

Получено 24.02.87