УДК 519.1

В. К. Медведев

Об аналоге тернара для обобщенных многоугольников

Проективная плоскость является обобщенным треугольником (определение обобщенного m-угольника дается ниже). Всякая проективная плоскость порождает тернар, и наоборот, всякий тернар порождает проективную плоскость. Понятие тернара играет важную роль в теории проективных плоскостей [1]. В настоящей статье предложена схема построения аналога тернара для обобщенного m-угольника и строится аналог тернара для обобщенного четырехугольника.

Дадим определение обобщенного m-угольника [2]. Пусть P — некоторое множество (будем называть его множеством точек) B — некоторая совокупность подмножеств этого множества (назовем их прямыми). Каждую точку или прямую будем называть объектом. Введем симметричное отношение I между объектами. А именно, будем считать, что xIy , где x и y— объекты, и говорить, что объект x инцидентен объекту y, если либо x — точка, y — прямая и $x \in y$; либо y — точка, x — прямая и $y \in x$.

Полученная структура инцидентности $S = (P, B, I)$ называется обобщенным m-угольником с параметрами s и t, если выполнены следующие аксиомы:

1) каждая точка инциндентна $1 + t$ прямым ($t \geqslant 1$);
2) каждая прямая инцидентна $1 + s$ точкам ($s < 1$);
3) две различные точки инциндентны не более, чем одной прямой;
4) для любых двух объектов x и y найдется конечная последовательность объектов $x_0, x_1, \ldots, x_k$ длины $k \leqslant m$ такая, что $x_0 = x$, $x_k = y$, $x_i \neq x_{i+2}$ при любом $0 \leqslant i \leqslant k-2$ и $x_{i-1} I x_i$ при любом $1 \leqslant i \leqslant k$. При этом данная последовательность единственна, если $k < m$.

Рассмотрим и бесконечный случай. При этом под s (а также t) следует подразумевать класс равномощных множеств. Таким образом, допускаем случай $s = \infty$, либо $t = \infty$, либо $s = \infty$ и $t = \infty$.

Отметим, что обычный многоугольник является обобщенным, если в качестве множества P взять совокупность его вершин, а прямыми считать подмножества множества P, состоящие из пар вершин, соединенных ребром. В этом случае $t = s = 1$.

Для произвольного обобщенного m-угольника $S = (P, B, I)$ и любых его объектов x и y последовательность объектов $x_0, \ldots, x_k$ такую, что $x_0 = x$, $x_k = y$ и $x_{i-1} I x_i$ при любом $1 \leqslant i \leqslant k$, назовем путем между объектами x и y. Если эта последовательность удовлетворяет условиям аксиомы 3, то этот путь будем называть минимальным.

Пусть $S = (P, B, I)$ — обобщенный m-угольник. Выберем и зафиксируем произвольные точку $o \in P$ и прямую L такую, что $o \in L$.

Пусть U и V — произвольные множества такие, что $|U| = s$, $|V| = t$. Назовем элементы множества U гласными, а элементы множества V согласными буквами. Словом будем называть любой конечный упорядоченный набор гласных и согласных букв, в котором за каждой гласной следует согласная буква и за каждой согласной следует гласная буква. Пустой набор, не содержащий ни одной буквы, будем называть пустым словом. Длиной слова будем называть число букв в слове, включая повторения букв, если они есть.

Лемма 1. *Множество P взаимно-однозначно соответствует множеству слов длины меньше m, если они заканчиваются на гласную букву, а также пустому слову.*

Доказательство. Точке o поставим в соответствие пустое слово. Рассмотрим все прямые, проходящие через точку o, за исключением прямой L. Тогда этим прямым можно произвольным способом взаимно-однозначно сопоставить элементы множества V. На любой из этих прямых каждой точке, за исключением точки o, произвольным способом можно сопоставить взаимно-однозначно элементы множества U. Таким образом, каждая точка, лежащая на прямых, проходящих через точку o, за исключением прямой L, однозначно соответствует множеству $V \times U$. Точкам прямой L, за исключением точки o, можно произвольным способом взаимно-однозначно сопоставить элементы множества U. Теперь будем рассуждать по индукции. Пусть каждой точке x, длина k минимального пути $x_0 = 0, x_1, \ldots, x_k = x$ от которой до точки o строго меньше, чем некоторое число $n \leqslant m$, сопоставлено некоторое слово, кончающееся на гласную букву, причем это слово начинается с гласной буквы и длина его равна $k - 1$, если $x_1 = L$, и начинается с согласной, длина равна k, если $x_1 \neq L$. Рассмотрим множество точек, длина минимального пути от которых до точки o равна n. Для каждой такой точки $y \in P$ пусть $y_0 = 0, y_1, \ldots, y_n = y$ есть минимальный путь от точки o до точки y. Если $n < m$, такой путь единствен, если же $n = m$, то существует и единствен такой минимальный путь, для которого $y_1 = L$ (поскольку в этом случае существует и единствен путь длины $m - 1$ из точки y к прямой L) и именно его будем рассматривать для случая $n = m$. Всем прямым, проходящим через точку y_{n-2}, за исключением прямой y_{n-3}, взаимно-однозначно произвольным способом можно сопоставить элементы множества V. Каждой точке на любой из этих прямых, за исключением самой точки y_{n-2}, можно взаимно-однозначно произвольным способом сопоставить элементы множества U. Пусть при этом прямой y_{n-1} сопоставлен некоторый элемент $v \in V$, а точке y_n сопоставлен некоторый элемент $u \in U$. Точке y_{n-2}, по предположению индукции, сопоставлено некоторое слово, заканчивающееся на гласную букву, причем это слово начинается с гласной буквы и длина его равна $n - 3$, если $y_1 = L$ и начинается с согласной, длина его равна $n - 2$, если $y_1 \neq L$. Теперь осталось сопоставить точке y это слово, дополненное (справа) буквами v и u. Очевидно, что это слово начинается с гласной буквы и имеет длину $n - 1$, если $y_1 \neq L$, и начинается с согласной и имеет длину n, если $y_1 \neq L$. Кроме того, оно заканчивается на гласную букву u. Лемма доказана.

В дальнейшем отождествим множество P с множеством слов длины меньше m, заканчивающихся на гласную букву (включая пустое слово). При этом будем предполагать, что это отождествление произведено в соответствии с индуктивным процессом, указанным в доказательстве леммы 1 (так, что, в частности, выделены некоторая точка $o \in P$ и прямая L такая, что $o \in L$).

Лемма 2. *Множество B взаимно-однозначно соответствует множеству всех слов длины меньше m, заканчивающихся на согласную букву, а также пустому слову.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 1. При этом пустому слову соответствует прямая L. Отметим, что индуктивный процесс, сопоставляющий каждой прямой из B слово, заканчивающееся на согласную букву, будем считать согласованным с индуктивным процессом, сопоставляющим каждой точке слово, заканчивающееся на гласную букву, и указанным при доказательстве леммы 1.

Теперь перейдем к описанию прямых, как подмножеств множества P. Пусть $0 \leqslant k \leqslant m$. Обозначим через W_k множество всех слов длины k (при этом W_0 состоит из пустого слова), через $W_U^k (W_V^k)$ — множество всех слов длины k, первая буква которых гласная (согласная), через $W_k^U (W_k^V)$ — множество всех слов длины k, последняя буква которых гласная (согласная). Пусть далее $0 \leqslant k_1 \leqslant k_2$ $P_{k_2,k_1}: W_{k_2} \to W_{k_1}$ — отображение множества W_{k_2} в множество W_{k_1}, которое каждому слову w длины k_2 ставит в соответствие слово длины k_1, состоящее из первых k_1 букв слова w. Для произвольных слов w_1 и w_2 таких, что либо w_1 заканчивается на гласную букву, а w_2 начинается на согласную, либо w_1 заканчивается на согласную, а w_2 начинается на гласную букву обозначим через w_1w_2 слово, которое образуется, если к слову w_1 приписать справа слово w_2.

Лемма 3. *Пусть m — четное и $l \in B$ произвольная прямая, длина минимального пути $x_0(l) = o$, $x_1(l)$, ..., $x_{m-1}(l) = l$, от которой до точки o равна $m - 1$. Предположим, что $x_1(l) \neq L$. Тогда существует каноническое взаимно-однозначное соответствие между точками прямой l и точками прямой L.*

Доказательство. Определим отображение f множества всех точек прямой l во множество всех точек прямой L. А именно, для каждой точки p, лежащей на прямой l, пусть L, $x_1(p)$, ..., $x_{k(p)}(p) = p$ есть минимальный путь от точки p к прямой L. Очевидно, $k(p) \leqslant m - 1$, $x_1(p) \in L$. Положим $f(p) = x_1(p)$. При $p_1 \neq p_2$, $p_1 \in l$, $p_2 \in l$, $f(p_1) \neq f(p_2)$. Действительно, пусть $f(p_1) = f(p_2)$. Тогда от точки $x_1(p_1) = x_1(p_2)$ к прямой l существуют два пути, а именно, $x_1(p_1)$, $x_2(p_1)$, ... , $x_{k(p_1)}(p_1) = p_1$, l и $x_1(p_2)$, $x_2(p_2)$, ... , $x_{k(p_2)}(p_2) = p_2$, l. Покажем, что каждый из этих путей является минимальным. Действительно, пусть, например, первый из этих путей не минимальный. Тогда $x_{k(p_1)-1}(p_1) = l$. Если $x_1(p_1) = o$, то от точки o к прямой l существует путь длины $k(p_1) - 2 \leqslant m - 3$, что противоречит предположению леммы. Таким образом, $x_1(p_1) \neq o$. Но тогда путь o, L, $x_1(p_1)$, ... , $x_{k(p_1)-1}(p_1) = l$ является минимальным путем между точкой o и l, но это противоречит тому, что $x_1(l) \neq L$. Таким образом, оба пути $x_1(p_1)$, $x_2(p_1)$, ... , $x_{k(p_1)}(p_1) = p_1$, l и $x_1(p_2)$, $x_2(p_2)$, ... , $x_{k(p_2)}(p_2) = p_2$, l являются минимальными путями длины меньшей $m - 1$ между точкой $x_1(p_1) = x_1(p_2)$ и прямой l. Кроме того, оба этих пути различны, поскольку $p_1 \neq p_2$. Таким образом, получаем противоречие и $f(p_1) \neq f(p_2)$. Покажем, что для любой точки $t \in L$ найдется точка $p \in l$ такая, что $f(p) = t$. Пусть $x_0(t) = t$, $x_1(t)$, ... , $x_{k(t)} = l$ — минимальный путь от точки t к прямой l. Тогда $k \leqslant m - 1$, $x_{k-1}(t) \in l$. Рассмотрим путь L, t, $x_1(t)$, ... , $x_{k-1}(t) \in l$ от прямой L к точке $x_{k-1}(t)$. Покажем, что этот путь минимален. Действительно, пусть это не так. Тогда $x_1(t) = L$. Предположим, что $x_2(t) = o$. Тогда имеем путь $o = x_2(t)$, ... , $x_{k-1}(t)$, l от точки o к прямой l, который минимален. Но длина этого пути $k - 2 \leqslant m - 3$, что противоречит условию леммы. Таким образом, $x_2(t) \neq o$. Отсюда, путь o, $x_1(t) = L$, $x_2(t)$, ... , $x_{k-1}(t)$, $x_k(t) = l$ от точки o к прямой l минимален. Получаем противоречие, поскольку $x_1(l) \neq L$ по условию леммы. Таким образом, путь L, t, $x_1(t)$, ... , $x_{k-1}(t)$ есть минимальный путь, и, следовательно, $f(x_{k-1}(t)) = t$. Отсюда f взаимно-однозначно. Лемма доказана.

Замечание 1. Если прямая l удовлетворяет условию леммы 3, то длина минимального пути от точки o до каждой точки прямой l равна m, за исключением некоторой одной точки $p_0 \in l$, длина минимального пути от которой до точки o равна $m - 2$. Отсюда, согласно доказательству леммы 1, каждой точке прямой l, за исключением точки p_0, соответствует некоторое слово $w \in W_U^{m-1}$. Тогда каноническое соответствие леммы 3 каждой такой точке сопоставляет точку, соответствующую слову $P_{m-1,1}(w)$, состоящему из одной буквы, а именно первой буквы $P_{m-1,1}(w)$ слова w (точке p_0 сопоставляется точка o). Эта точка лежит на прямой L.

Теорема 1. *Пусть m — четно. Существует отображение $F: W_V^m \to \to W_V^{m-2}$ такое, что все прямые обобщенного m-угольника $S = (P, B, I)$ есть следующие подмножества множества P:*

1) *для произвольного $1 \leqslant k < m$ и произвольного слова $w_0 \in W_{k-1}^V$ подмножество множества W_k^U, состоящее из всех слов $w \in W_k^U$, для которых $P_{k,k-1}(w) = w_0$, а также из слова $P_{k-1,k-2}(w_0)$, если $k \geqslant 2$ и пустого слова, если $k = 1$;*

2) *для произвольного элемента $w_0 \in W_V^{m-1}$ подмножество множества W_{m-1}^U, состоящее из всех слов вида $uF(w_0u)$, где $u \in U$, а также из слова $P_{m-1,m-2}(w_0)$.*

Доказательство. Пусть $w \in W_V^m$. Рассмотрим слово $P_{m,m-1}(w) \in \in W_{m-1}^V$. Тогда прямая l_w, соответствующая слогу $P_{m,m-1}(w)$, удовлетворяет условию леммы 3. Рассмотрим последнюю букву $u \in U$ слова w и точку p_u, отвечающую слову $u \in U$. Тогда $p_u \in L$ и точке p_u согласно лемме 3 соответствует некоторая точка p_w на прямой l_w. Точке p_w, в свою очередь, соответствует некоторое слово $w_1 \in W_U^{m-1}$. При этом согласно замечанию 1 $P_{m-1,1}(w_1) = u$. Определим $F(w)$ как слово из W_V^{m-2}, получающееся удалением первой буквы $u \in U$ в слове w_1. Дальнейшее доказательство теоремы очевидно.

Лемма 4. *Пусть m — нечетно и $p \in P$ произвольная точка, длина минимального пути $x_0(p) = 0$, $x_1(p)$, ..., $x_{m-1}(p) = p$ от которой до точки o равна $m - 1$. Предположим, что $x_1(p) \neq L$. Тогда существует каноническое взаимно-однозначное соответствие между всеми прямыми, проходящими через точку p, и точками прямой L (отсюда, если m — нечетное, то $|U| = = |V|$).*

Доказательство. Определим отображение f множества всех прямых, проходящих через точку p, во множество всех точек прямой L. А именно, для каждой прямой l, проходящей через точку p, пусть L, $x_1(l)$, ..., $x_{k(l)}(l) = l$ — минимальный путь от прямой l к прямой L. Очевидно, $k(l) \leqslant m - 1$, $x_1(l) \in L$. Положим $f(l) = x_1(l)$. Аналогично доказательству леммы 3 устанавливается, что отображение f взаимно-однозначно.

Замечание 2. Если точка p удовлетворяет условию леммы 4, то нетрудно видеть, что длина минимального пути от точки o до каждой прямой, проходящей через точку p, равна m, за исключением некоторой одной прямой l_0, $p \in l_0$, длина минимального пути от которой до точки o равна $m - - 2$. Отсюда согласно лемме 2 каждой прямой, проходящей через точку p, за исключением прямой l_0, соответствует некоторое слово $w \in W_V^{m-1}$. Тогда каноническое соответствие леммы 4 каждой такой прямой сопоставляет точку, соответствующую слову $P_{m-1,1}(w)$, состоящему из одной буквы, а именно первой буквы $P_{m-1,1}(w)$ слова w. Эта точка лежит на прямой L.

В силу леммы 4 при нечетном m $|U| = |V|$. Установим между множеством U и V произвольное, но фиксированное взаимно-однозначное соответствие. Произвольный элемент $u \in U$, соответствующий при этом элементу $v \in V$, будем обозначать через $\bar{v}$, само множество U обозначим через $\bar{V}$.

Теорема 2. *Пусть m — нечетно. Существует отображение $F: W_V^m \to \to W_V^{m-2}$ такое, что все прямые обобщенного m-угольника $S = (P, B, I)$ есть следующие подмножества множества P:*

1) *для произвольного $1 \leqslant k < m$ и произвольного слова $w_0 \in W_{k-1}^V$ подмножество множества W_k^U, состоящее из всех слов $w \in W_k^U$, для которых $P_{k,k-1}(w) = w_0$, а также из слова $P_{k-1,k-2}(w_0)$, если $k \geqslant 2$ и пустого слова, если $k = 1$.*

2) *для произвольного элемента $w_0 \in W_V^{m-1}$ и произвольного элемента*

$v_0 \in V$ подмножество множества W_{m-1}^U, состоящее из всех слов $w \in W_{m-1}^U$, для которых $F(wv_0) = F(w_0v_0)$, а также из слова w_0.

Доказательство. Пусть $w \in W_V^m$. Рассмотрим слово $P_{m,m-1}(w) \in \in W_{m-1}^U$. Тогда точка p_w, соответствующая слову $P_{m,m-1}(w)$, удовлетворяет условию леммы 4. Рассмотрим последнюю букву $v \in V$ слова w и точку $p_{\bar{v}}$, отвечающую слову $\bar{v} \in U$. Тогда $p_{\bar{v}} \in L$ и точке $p_{\bar{v}}$ согласно лемме 4 соответствует некоторая прямая l_w, проходящая через точку p_w. Прямой l_w, в свою очередь, согласно лемме 2 соответствует некоторое слово $w_1 \in \in W_U^{m-1}$. При этом согласно замечанию 2 $P_{m-1,1}(w_1) = \bar{v}$. Определим $F(w)$ как слово из W_V^{m-2}, получающееся удалением первой буквы $\bar{v} \in U$ в слове w_1.

Дальнейшее доказательство теоремы очевидно.

Из теорем 1, 2 следует, что семейство прямых обобщенного m-угольника полностью определяется некоторым отображением $F: W_V^m \to W_V^{m-2}$ (отметим, что как для четного, так и для нечетного природа этого отображения одна и та же). Тем самым аксиомы обобщенного m-угольника могут быть сформулированы в терминах отображения F.

Приведем без доказательства следующее предложение.

Предложение 1. *Пусть $m = 3$. Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы некоторое отображение $F: V \times U \times V \to V$, где U и V произвольные равномощные множества, определяло обобщенный треугольник являются следующие условия* (*здесь* F (abc) *обозначается через* $\langle abc \rangle$)*:*

1) *для любых элементов $a \in V$, $b \in V$, $c \in V$, существует и единствен элемент $x \in U$ такой, что $\langle axb \rangle = c$;*

2) *для любых элементов $a \in V$, $b \in U$, $c \in V$, $d \in U$ при условии, что $a \neq \neq c$ существует и единствен элемент $x \in V$, такой что $\langle abx \rangle = \langle cdx \rangle$;*

3) *для любых элементов $a \in V$, $b \in V$, $c \in V$, $d \in V$ при условии, что $a \neq \neq c$ существуют и единственны два элемента $x \in V$, $y \in U$ такие, что $\langle xya \rangle = b$ и $\langle xyc \rangle = d$.*

Наоборот, если есть некоторый обобщенный треугольник, то существуют равномощные множества U, V и такое отображение $F: V \times \times U \times V \to V$, удовлетворяющее условиям 1—3, что отображение F определяет данный обобщенный треугольник.

Поскольку $|U| = |V|$, то, установив некоторое произвольное взаимно-однозначное соответствие между множествами U и V, можем отождествить эти два множества (различая их на уровне слов как множества соответственно гласных и согласных букв). При этом условия 1—3 — известные аксиомы тернара.

Рассмотрим соответствующие аксиомы на отображение F для $m = 4$.

Теорема 3. *Пусть $m = 4$. Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы некоторое отображение $F: V \times U \times V \times U \to \to V \times U$ (где U и V произвольные множества) определяло обобщенный четырехугольник, являются следующие условия (здесь p_1F ($abcd$) обозначается через $\langle abcd \rangle$, p_2F ($abcd$) — через [$abcd$], где $p_1: V \times U \to V$, $p_2: V \times U \to \to U$ проекции соответственно на первую и вторую координату):*

1) *каковы бы ни были элементы $a \in U$, $b \in V$, $c \in U$, $d \in U$, $e \in V$, если $a \neq d$, то система уравнений*

$$\begin{cases} \langle xyza \rangle = b, \\ [xyza] = c. \\ \langle xyzd \rangle = e \end{cases}$$

имеет единственное решение относительно $x \in V$, $y \in U$, $z \in V$;

2) *каковы бы ни были элементы $a \in U$, $b \in V$, $c \in U$, $d \in U$, $e \in U$, система уравнений*

$$\begin{cases} \langle xyza \rangle = b, \\ [xyza] = c, \\ [xyzu] = [defu], \\ \langle xyzu \rangle = \langle defu \rangle \end{cases}$$

относительно неизвестных $x \in V$, $y \in U$, $z \in V$, $u \in U$ *при* $\langle defa \rangle \neq b$ *имеет единственное решение, а при* $\langle defa \rangle = b$, $[defa] \neq c$ *не имеет решения;*

3) *каковы бы ни были элементы* $a \in U$, $b \in V$, $c \in U$, $d \in V$ *система уравнений*

$$\begin{cases}\langle dxya \rangle = b,\\ [dxya] = c\end{cases}$$

имеет единственное решение относительно неизвестных $x \in U$, $y \in V$;

4) *каковы бы ни были элементы* $a \in V$, $b \in U$, $c \in V$, $d \in V$, $e \in U$ *система уравнений*

$$\begin{cases}\langle abcy \rangle = \langle dexy \rangle,\\ [abcy] = [dexy]\end{cases}$$

имеет единственное решение относительно неизвестных $x \in V$, $y \in U$, *если* $a \neq d$, *и не имеет решения, если* $a = d$, *а* $b \neq e$;

5) *каковы бы ни были элементы* $a \in U$, $b \in V$, $c \in U$, $d \in V$ *уравнение* $\langle dcxa \rangle = b$ *имеет единственное решение относительно* $x \in V$.

И наоборот, если есть произвольный обобщенный четырехугольник, то существуют некоторые множества U, V *и отображение* $F : V \times U \times V \times U \to V \times U$, *которое удовлетворяет условиям 1—5 и задает данный обобщенный четырехугольник.*

Доказательство следует из того факта, что система инциндентности $S = (P, B, I)$, где P — точки, B — прямые, является обобщенным четырехугольником тогда и только тогда, когда для некоторых s и t (возможно бесконечных) каждая прямая содержит $1 + s$ точку, через каждую точку проходит $1 + t$ прямая и для любой точки и любой прямой, не проходящей через эту точку, существует только одна прямая, проходящая через эту точку и пересекающая заданную прямую. Доказательство состоит в переборе случаев, когда длина слова, соответствующего точке (или прямой) меняется от 0 до 3.

Аналогично можно выписать аксиомы на отображение F для обобщенного шестиугольника и т. д.

Отметим, что если $s = t$ множества U и V можно отождествить, так что в этом случае указанные условия приводят к алгебраическим системам.

1. *Холл М.* Комбинаторика.— М. : Мир, 1970.— 424 с.
2. *Tits J.* Buildings of Spherical Type and Finite BN-pairs.— Leclure Notes in Math.— Berlin: Springer, 1974.— 613 p.

Киев. ун-т

Получено 28.01.87