УДК 517.948.3

**Н. А. ВИРЧЕНКО**, д-р физ.-мат. наук (Киев. политехн. ин-т)

# О методе $N$-арных интегральных уравнений

Дан краткий обзор основных типов и методов решения парных, $N$-арных интегральных уравнений, отмечено значение результатов О. С. Парасюка в развитии общей теории парных интегральных уравнений. Решен и исследован один из новых типов $N$-арных интегральных уравнений.

Дано короткий огляд основних типів та методів розв'язку парних, $N$-арних інтегральних рівнянь, відмічено значення результатів О. С. Парасюка в розвитку загальної теорії парних інтегральних рівнянь. Розв'язаний і досліджений один із нових типів $N$-арних інтегральних рівнянь.

Для решения смешанных краевых задач математической физики, механики сплошных сред, теории фильтрации, квантовой теории поля и др. можно выделить следующие основные методы: методы теории функции комплексного переменного, основанные на использовании конформных отображений, краевых задач аналитических функций, теории сингулярных интегральных уравнений, теории факторизации; метод интегральных преобразований; метод парных (интегральных или рядовых) уравнений; метод ортогональных многочленов; асимптотические методы; метод дробного интегро-дифференцирования; метод кусочно-однородных решений; метод функции Грина; вариационные методы; численные методы и некоторые другие.

В настоящее время для решения достаточно широкого класса смешанных краевых задач все чаще применяется метод парных, тройных и большего числа интегральных (рядовых) уравнений. Этот метод оказался одним из эффективных современных аналитических методов решения смешанных краевых задач. Он позволил решить ряд новых сложных задач, например, смешанные краевые задачи для клина, некоторые задачи теории упругости для пространства со щелями и т. п. [1].

Впервые задача о парных интегральных уравнениях сформулировал Вебер (1872 г.) [2], а решил Бельтрами (1881 г.) [3]. Они рассмотрели простейшие парные интегральные уравнения с функцией Бесселя $\mathcal{J}_0(x\tau)$ в ядре.

Решению парных интегральных уравнений с различными ядрами посвящены работы как советстких, так и зарубежных авторов (см. библиографию в [1, 4, 5] и др.).

Простейшая задача, приведшая к парным интегральным уравнениям, заключалась в следующем. Если хорошо проводящий однородный тонкий круговой диск поддерживать при потенциале $V_0$ в электростатическом поле потенциала $\Phi$, то электрические заряды индуцируются на поверхности диска. Задача состоит в нахождении поверхностной плотности $\sigma$ индуцированного заряда и потенциала $V$ так, чтобы потенциал $V+\Phi$ имел постоянное значение $V_0$ на поверхности диска. Вебер свел эту задачу к решению парных интегральных уравнений вида

$$\int_0^\infty \tau^{-1}\mathcal{J}_0(x\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = 1, \quad (0<x<1),$$

$$\int_0^\infty \mathcal{J}_0(x\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = 0, \quad (1<x<\infty),$$

которые являются частным случаем $(\alpha=-1,\ \beta=\nu=\mu=0,\ f_1\equiv 1$ $f_2\equiv 0)$ парных интегральных уравнений более общего вида

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \tau^{\alpha}\mathcal{J}_\mu(x\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f_1(x), \quad (0<x<1),\\ &\int_0^\infty \tau^{\beta}\mathcal{J}_\nu(x\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f_2(x), \quad (1<x<\infty). \end{aligned} \tag{1}$$

Среди многочисленных авторов, изучавших частные случаи парных уравнений (1), упомянем Е. Титчмарша, который в 1937 г. [6] впервые предложил в точном виде прямое решение парных интегральных уравнений (1) при $0<\alpha<2$, $\beta=0$, $\mu=\nu$, $f_1(x)=f(x)$, $f_2=0$ использовав интегральное преобразование Меллина и факторизацию типа Винера — Хопфа. С этого времени интерес к парным интегральным уравнениям и их предложениям значительно возрос [7—9]. Метод подстановки к решению уравнений (1) и к парным уравнениям вида

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty [1-G(\tau)]\,\varphi(\tau)\,\mathcal{J}_\mu(x\tau)\,d\tau = f_1(x), \quad (0\leqslant x<a),\\ &\int_0^\infty \tau^{\beta}\varphi(\tau)\,(\mathcal{J}_\nu(x\tau)\,d\tau = f_2(x), \quad (a<x<\infty), \end{aligned} \tag{2}$$

а также к парным интегральным ураненииям с функциями Лежандра, с показательной функцией в ядре и др. успешно применяли Н. Лебедев и Я. С. Уфлянд [1, 10]. В работе [11] к (1) применен метод дробного интегро-дифференцирования. Заметим, что для парных интегральных уравнений с ядрами, отличными от функций Басселя, операторный метод не всегда подходит. Для применения его нужно вводить новые интегральные операторы, новые композиционные соотношения, что часто представляет большие математические трудности.

И. М. Рапопорт применил краевую задачу Римана к решению парных интегральных уравнений типа свертки [12]. Более общие случаи рассматривал Ю. И. Черский (см., например, [13]).

Парные интегральные уравнения с функцией Лежандра впервые ввели В. Т. Гринченко и А. Ф. Улитко [14].

Парные (тройные) интегральные уравнения с $H$-функциями [15, 16] являются наиболее общими, так как много специальных функций, в том числе и функции Бесселя, это частные случаи обобщенной $H$-функции $H^{m,n}_{p,q}\left(x\left|\begin{matrix}a, & \alpha\\ b, & \beta\end{matrix}\right.\right)$.

Парные интегральные уравнения в пространстве обобщенных функций впервые рассмотрел О. С. Пасарюк в 1956 г. [17], осуществив тем самым новый качественный подход к теории и практике парных интегральных уравнений; фактически было положено начало исследованию тонких вопросов разрешимости, единственности и других аспектов теории метода парных и большего числа уравнений. О. С. Парасюк изучал парные интегральные уравнения вида

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\,k_1(x-\tau)\,d\tau+\lambda_1\varphi(x)=g_1(x),\quad(-\infty<x<0),\\&\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)\,k_2(x-\tau)\,d\tau+\lambda_2\varphi(x)=g_2(x),\quad(0<x<\infty),\end{aligned}\tag{3}$$

где $g_i(x)$, $k_i(x)$, $i=1, 2$,— обобщенные функции, причем $g_1(x)=0$ при $x\geqslant 0$, $g_2(x)=0$ при $x\leqslant 0$, а функции $k_i(x)$ имеют ограниченные носители, искомая функция $\varphi(\tau)$ также принадлежит пространству обобщенных функций, все упомянутые функции предполагались интегрируемыми в классе $C(q, r, 1)$ [18].

Значительно позже изучением парных интегральных уравнений в некоторых пространствах обобщенных функций занимались авторы работ [19, 20] и др., при этом существенно используя распространение классических интегральных преобразований на классы обобщенных функций.

1. Сформулируем общую постановку задачи о системе $l$ $N$-арных интегральных уравнений.

Определение. *Системой $l$ $N$-арных интегральных уравнений называется совокупность интегральных уравнений вида*

$$\int_{D_i^j}\sum_{k=1}^{l}a_{ik}^j(\tau)\,\varphi_k(\tau)\,K_i^j(\tau,x)\,d\tau=f_i^j(x),\quad x\in I_i^j,\quad i=\overline{1,N},\quad j=\overline{1,l},\tag{4}$$

*где $D_i^j$, $I_i^j$ — отрезки вещественной оси; $\varphi_k(\tau)$ — неизвестные функции, определенные на множестве*

$$D=\bigcup_{i=1}^{N}\bigcup_{j=1}^{l}D_i^j,$$

*$K_i^j(\tau,x)$ — $i$-ядро $j$-го уравнения; $f_i^j(x)$ — известные функции, заданные на $I_i^j$; $a_{ik}^j(\tau)$ — весовые функции, причем $D_1^j\cap D_2^j\cap\ldots\cap D_N^j=A_j$, где $A_j$ — множество ненулевой меры.*

Для простоты в качестве $D_i^j$ и $I_i^j$ взяты отрезки вещественной оси, хотя можно рассматривать в (4) криволинейные интегралы по $L$, где $L$ — некоторый контур в плоскости комплексного переменного. Легко сформулировать приведенное определение в матричной форме. Отметим, что это определение легко обобщается на $n$-мерный случай.

При $l = 1$, $N = 2$ из (4) имеем парные интегральные уравнения. При $l = 1$, $N = 3$ приходим к тройным интегральным уравнениям. $N$-арные интегральные уравнения для простейшего случая можно записать следующим образом:

$$\int_0^\infty a_i(\tau)\,\varphi(\tau)\,K_i(\tau, x)\,d\tau = f_i(x), \quad e_i < x < e_{i+1}, \quad i = \overline{1, N}; \quad e_1 = 0,$$
$$e_{N+1} = \infty. \tag{5}$$

Многообразие $N$-арных интегральных уравнений естественно классифицировать по виду ядра. Свойства, метод решения, исследования рассматриваемых уравнений существенно зависят от состава специальных функций, образующих ядра этих уравнений. Существующие способы решения $N$-арных интегральных уравнений можно разбить на две группы: методы сведения к одному интегральному уравнению и методы теории функций комплексного переменного, или более мелкие группы: метод доопределения, метод подстановки и преобразующих операторов, метод разрывных интегралов, метод регуляризации, метод рядов, метод дробного интегро-дифференцирования и др. [4].

2. В данной статье рассмотрим один из новых типов $N$-арных интегральных уравнений, а именно: $N$-арные интегральные уравнения с обобщенной функцией Лежандра $P_k^{m,n}(\operatorname{ch}\alpha)$ в ядре.

Как известно [21], функция $P_k^{m,n}(z)$ является одним из решений дифференциального уравнения

$$(1 - z^2)\frac{d^2u}{dz^2} - 2z\frac{du}{dz} + \left[k(k+1) - \frac{m^2}{2(1-z)} - \frac{n^2}{2(1+z)}\right]u = 0, \tag{6}$$

где параметры $k, m, n$ в общем случае принимают комплексные значения. Рассматриваем функцию $P_k^{m,n}(z)$ в плоскости комлексного переменного $z$ с разрезом вдоль вещественной оси от $-\infty$ до 1. В дальнейшем потребуется обобщенное интегральное преобразование Мелера — Фока [22]

$$F(z) = \int_0^\infty f(s)\,P_{-1/2+is}^{m,n}(z)\,ds, \tag{7}$$

$$f(z) = \frac{4^{a-1}}{\pi}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} - a + is\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - a - is\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - b + is\right)}{\Gamma(2is)\,\Gamma(-2is)\,\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2} - b - is\right)} \times$$
$$\times \int_1^\infty F(z)\,P_{-1/2+is}^{m,n}(z)\,ds, \tag{8}$$

где $a = \dfrac{m-n}{2}$, $b = \dfrac{m+n}{2}$.

Решение $N$-арных интегральных уравнений в отличие от решения парных уравнений имеет свои особенности и сложности. Остановимся подробнее на случае $N = 6$.

П о с т а н о в к а  з а д а ч и. Требуется найти решение 6-арных интегральных уравнений вида

$$\int_0^\infty \Phi(\tau)\,P_{-1/2+i\tau}^{m,n}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = f_{2k+1}(\alpha), \quad \alpha_{2k} < \alpha < a_{2k+1}, \tag{9}$$

$$\int_0^\infty \omega(\tau)\,\Phi(\tau)\,P_{-1/2+i\tau}^{m,n}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = g_{2k+2}(\alpha), \quad a_{2k+1} < \alpha < a_{2k+2}, \tag{10}$$

где $k=0,1,2$, $\Phi(\tau)$ — искомая функция, причем

$$\Phi(\tau)=O(\tau^{\delta}) \text{ при } \tau\to 0,\ \Phi(\tau)=O(\tau^{-m-\varepsilon-1/2}) \text{ при } \tau\to\infty,\ \delta>0,\ \varepsilon>0,$$
$$|\operatorname{Re} n|<1-\operatorname{Re} m,\quad |\operatorname{Re} m|<1/2,\ m\neq 0;$$

условия для функций $f_{2k+1}(\alpha)$, $g_{2k+2}(\alpha)$ имеют вид

$$g_{2k+2}(\alpha)=O((\alpha-a_{2k+1})^{-1/2-m+\varepsilon_{2k+1}}) \text{ при } \alpha\to a_{2k+1},$$
$$g_{2k+2}(\alpha)=O((a_{2k+2}-\alpha)^{-1/2-m+\varepsilon_{2k+2}}) \text{ при } \alpha\to a_{2k+2},$$

где $\varepsilon_{2k+1}>0$, $\varepsilon_{2k+2}>0$. Аналогичную форму имеют условия, наложенные на функции $f_{2k+1}(\alpha)$, $k=0,1,2$;

$$\omega(\tau)=\frac{2^{m-n-2}\Gamma\left(\frac{1-m+n}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{1-m+n}{2}-i\tau\right)}{\pi\Gamma(2i\tau)\Gamma(-2i\tau)\Gamma^{-1}\left(\frac{1-m-n}{2}+i\tau\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1-m-n}{2}-\tau\right)}. \tag{11}$$

Применим к уравнениям (9), (10) метод доопределения. Пусть

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \omega(\tau)\Phi(\tau)P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau=g_1(\alpha),\quad 0<\alpha<a_1,\\
&\int_0^\infty \omega(\tau)\Phi(\tau)P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau=g_3(\alpha),\quad a_2<\alpha<a_3,\\
&\int_0^\infty \omega(\tau)\Phi(\tau)P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau=g_5(\alpha),\quad a_4<\alpha<a_5,
\end{aligned} \tag{12}$$

где $g_1(\alpha)$, $g_3(\alpha)$, $g_5(\alpha)$ — пока неизвестные функции.

Используя обобщенное итегральное преобразование Мелера — Фока (7), (8), получаем

$$\Phi(\tau)=\Big[\int_0^{a_1} g_1(\varphi)+\int_{a_1}^{a_2} g_2(\varphi)+\int_{a_2}^{a_3} g_3(\varphi)+\int_{a_3}^{a_4} g_4(\varphi)+\int_{a_4}^{a_5} g_5(\varphi)+$$
$$+\int_{a_5}^{\infty} g_6(\varphi)\Big]\operatorname{sh}\varphi P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\varphi)\,d\varphi. \tag{13}$$

А) Подставим (13) в (9) и введем обозначения

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{6} H_i(\alpha)&=f_1(\alpha),\quad 0<\alpha<a_1,\\
&=f_3(\alpha),\quad a_2<\alpha<a_3,\\
&=f_5(\alpha),\quad a_4<\alpha<a_5,
\end{aligned} \tag{14}$$

где

$$H_i(\alpha)=\int \operatorname{sh}\varphi g_i(\varphi)L(\alpha,\varphi)\,d\varphi, \tag{15}$$

$$L(\alpha,\varphi)=\int_0^\infty P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)P^{m,n}_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\varphi)\,d\tau. \tag{16}$$

Б) Теперь из (14) — (16) имеем

$$\int_0^{a_1}\operatorname{sh}^{1+m}\varphi g_1(\varphi)\,d\varphi\int_0^{\min(\alpha,\varphi)}(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s)^{-1/2-m}(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s)^{-1/2-m}\times$$

$$\times F\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\alpha}\right)F\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)ds=\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-m\right)\operatorname{sh}^{-m}\alpha\,[f_1(\alpha)-H_2(\alpha)-$$

$$-H_4(\alpha)-H_6(\alpha)]-\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-m\right)\operatorname{sh}^{-m}\alpha\,[H_3(\alpha)+H_5(\alpha)]. \qquad (17)$$

Здесь использованы следующие обозначения для гипергеометрических функций Гаусса:

$$ {}_2F_1\left(\frac{n-m}{2},-\frac{m+n}{2};\frac{1}{2}-m;X\right)=F(X), \qquad (18)$$

$$ {}_2F_1\left(\frac{m-n}{2},\frac{1+m-n}{2};\frac{1}{2}+m;Y\right)=\widetilde{F}(y).$$

Учитывая значение для $\min(\alpha,\varphi)$, после изменения порядка интегрирования выражение (17) перепишем следующим образом:

$$\int_0^{\alpha}(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s)^{-1/2-m}F\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\alpha}\right)ds\int_s^{a_1}(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s)^{-1/2-m}\times$$

$$\times F\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)\operatorname{sh}^{1+m}\varphi g_1(\varphi)\,d\varphi=\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-m\right)\operatorname{sh}^{-m}\alpha\times$$

$$\times[f_1(\alpha)-H_2(\alpha)-H_4(\alpha)-H_6(\alpha)]-\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-m\right)\operatorname{sh}^{-m}\alpha\,[H_3(\alpha)+H_5(\alpha)] \qquad (19)$$

или

$$\int_0^{\alpha}(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s)^{-1/2-m}F\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\alpha}\right)P(s)\,ds=$$

$$=\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-m\right)\operatorname{sh}^{-m}\alpha\,[f_1(\alpha)-H_2(\alpha)-H_4(\alpha)-H_6(\alpha)]-$$

$$-\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-m\right)\operatorname{sh}^{-m}\alpha\,[H_3(\alpha)+H_5(\alpha)],$$

где

$$P(s)=\int_s^{a_1}\frac{\operatorname{sh}^{1+m}\varphi g_1(\varphi)}{(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s)^{1/2+m}}F\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)d\varphi. \qquad (20)$$

Используя решение интегрального уравнения [23]

$$\int_a^x\varphi(t)\,[\omega(x)-\psi(t)]^{-m-1/2}{}_2F_1\left(\frac{n-m}{2},-\frac{m+n}{2};\frac{1}{2}-m;\right.$$

$$\left.\frac{\omega(x)-\psi(t)}{\omega(x)+d}\right)dt=\Phi(x) \qquad (*)$$

при $a=0$, $d=1$, $\omega(x)=\operatorname{ch}x$, $\psi(t)=\operatorname{ch}t$, из (19) получаем

$$P(s)=\frac{\Gamma^{-1}(1/2-m)}{\Gamma(1/2+m)}\frac{d}{ds}\left[(\operatorname{ch}s+1)^{(n-m)/2}\int_0^s(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)^{m-1/2}\times\right.$$

$$\times(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\widetilde{F}\left(\frac{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}s}\right)\operatorname{sh}\alpha\left\{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-m\right)\operatorname{sh}^{-m}\alpha\,[f_1(\alpha)-\right.$$

$$-H_2(\alpha)-H_4(\alpha)-H_6(\alpha)]-\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-m\right)\operatorname{sh}^{-m}\alpha\,[H_3(\alpha)+H_5(\alpha)]\Big\}\,d\alpha$$

или

$$P(s)=P_1(s)-\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+m\right)\frac{d}{ds}\Big[(\operatorname{ch}s+1)^{(n-m)/2}\times$$

$$\times\int_0^s(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)^{m-1/2}(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\widetilde{F}\left(\frac{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}s}\right)\operatorname{sh}^{1-m}\alpha d\alpha\times$$

$$\times\int_{a_2}^{a_3}\operatorname{sh}\varphi g_3(\varphi)L(\alpha,\varphi)\,d\varphi\Big]-\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+m\right)\frac{d}{ds}\Big[(\operatorname{ch}s+1)^{(n-m)/2}\times$$

$$\times\int_0^s(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)^{m-1/2}(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\widetilde{F}\left(\frac{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}s}\right)\times$$

$$\times\operatorname{sh}^{1-m}\alpha d\alpha\int_{a_4}^{a_5}\operatorname{sh}\varphi g_5(\varphi)L(\alpha,\varphi)\,d\varphi\Big],\qquad(21)$$

где

$$P_1(s)=\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+m\right)\frac{d}{ds}\Big[(\operatorname{ch}s+1)^{(n-m)/2}\times$$

$$\times\int_0^s(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)^{m-1/2}(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\widetilde{F}\left(\frac{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}s}\right)\times$$

$$\times\operatorname{sh}^{1-m}\alpha\,(f_1(\alpha)-H_2(\alpha)-H_4(\alpha)-H_6(\alpha))\,d\alpha\Big].\qquad(22)$$

После довольно громоздких преобразований находим

$$P(s)=P_1(s)-\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+m\right)\int_{a_2}^{a_3}\operatorname{sh}\beta g_3(\beta)\times$$

$$\times d\beta\Big[\frac{d}{ds}(\operatorname{ch}s+1)^{(n-m)/2}\int_0^s(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)^{m-1/2}\times$$

$$\times(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\widetilde{F}\left(\frac{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}s}\right)\operatorname{sh}^{1-m}\alpha L(\beta,\alpha)\,d\alpha\Big]-$$

$$-\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+m\right)\int_{a_4}^{a_5}\operatorname{sh}\beta g_5(\beta)\,d\beta\Big[\frac{d}{ds}(\operatorname{ch}s+1)^{(n-m)/2}\times$$

$$\times\int_0^s(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)^{m-1/2}(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\widetilde{F}\left(\frac{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}s}\right)\operatorname{sh}^{1-m}\alpha L(\alpha,\beta)\,d\alpha\Big].$$

Вернемся к равенству (20). Имеем

$$g_1(\varphi)=P_1(\varphi)\operatorname{sh}^{-1-m}\varphi-\operatorname{sh}^{-1-m}\varphi\Gamma^{-2}\left(\frac{1}{2}+m\right)\int_{a_2}^{a_3}\widetilde{P}(\beta,\varphi)\,g_3(\beta)\,d\beta-$$

$$- \operatorname{sh}^{-1-m}\varphi\Gamma^{-2}\left(\frac{1}{2}+m\right)\int_{a_4}^{a_5}\widetilde{P}_1(\beta,\varphi)\,g_5(\beta)\,d\beta, \tag{23}$$

где

$$\widetilde{P}(\beta,\varphi) = -\operatorname{sh}\beta\left[\frac{d}{d\varphi}(1+\operatorname{ch}\varphi)^{(n-m)/2}\int_{\varphi}^{a_1}\operatorname{sh}s(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\varphi)^{m-1/2}\times\right.$$

$$\times\widetilde{F}\left(\frac{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\varphi}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)\frac{d}{ds}\left((\operatorname{ch}s+1)^{(n-m)/2}\int_0^s(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)^{m-1/2}\times\right.$$

$$\left.\left.\times(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\operatorname{sh}^{1-m}\alpha\widetilde{F}\left(\frac{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}s}\right)L(\alpha,\beta)\,d\alpha\right)ds\right].$$

В) Из соотношений (14) — (16) будем иметь

$$\int_{a_2}^{a_3}\operatorname{sh}^{1+m}\varphi g_3(\varphi)\int_0^{\min(\alpha,\varphi)}(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s)^{-m-1/2}(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s)^{-1/2-m}\times$$

$$\times F\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\alpha}\right)F\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)d\varphi ds = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}-m\right)\times$$

$$\times\operatorname{sh}^{-m}\alpha\,[f_3(\alpha)-H_2(\alpha)-H_4(\alpha)-H_6(\alpha)]-\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-m\right)\times$$

$$\times\operatorname{sh}^{-m}\alpha\,[H_1(\alpha)+H_5(\alpha)].$$

Поменяв порядок интегрирования в левой части этого выражения, затем заменив $s$ на $y$ во втором интеграле, получим

$$\int_{a_2}^{\alpha}(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s)^{1/2+m}F\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\alpha}\right)ds\int_s^{a_3}\operatorname{sh}^{1+m}\varphi g_3(\varphi)\times$$

$$\times(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s)^{-1/2-m}F\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)d\varphi = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}-m\right)\operatorname{sh}^{-m}\alpha\times$$

$$\times[f_3(\alpha)-H_2(\alpha)-H_4(\alpha)-H_6(\alpha)]-\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-m\right)\operatorname{sh}^{-m}\alpha\left[H_1(\alpha)+H_5(\alpha)-\right.$$

$$-\int_0^{a_2}(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}y)^{-1/2-m}F\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}y}{1+\operatorname{ch}\alpha}\right)dy\int_{a_2}^{a_3}\operatorname{sh}^{1+m}\varphi\times$$

$$\times g_3(\varphi)(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}y)^{-1/2-m}F\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}y}{1+\operatorname{ch}y}\right)d\varphi. \tag{24}$$

Пусть

$$Q = \int_s^{a_3}\operatorname{sh}^{1+m}\varphi g_3(\varphi)(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s)^{-1/2-m}F\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)d\varphi. \tag{25}$$

Подставляем в (24), используем решение уравнения (*). Тогда

$$Q(s) = Q_1(s)-[M_1(s)+M_3(s)+M_5(s)], \tag{26}$$

где

$$Q_1(s) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}\frac{d}{ds}\left[(\operatorname{ch}s+1)^{(n-m)/2}\int_{a_2}^{s}(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)^{m-1/2}\times\right.$$

$$\times(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\widetilde{F}\left(\frac{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}s}\right)\operatorname{sh}^{1-m}\alpha\,[f_3(\alpha)-H_2(\alpha)-$$

$$-H_4(\alpha)-H_6(\alpha)]\,d\alpha;$$

$$M_1(s)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}\frac{d}{ds}\left[(\operatorname{ch}s+1)^{(n-m)/2}\int\limits_{a_2}^{s}\frac{\operatorname{sh}^{1-m}\alpha H_1(\alpha)}{(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)^{1/2-m}}\times\right.$$

$$\left.\times(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\widetilde{F}\left(\frac{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}s}\right)d\alpha\right];$$

$$M_3(s)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}\frac{d}{ds}\left[(\operatorname{ch}s+1)^{(n-m)/2}\int\limits_{a_2}^{s}\frac{(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\operatorname{sh}\alpha}{(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)^{1/2-m}}\times\right.$$

$$\times\widetilde{F}\left(\frac{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}s}\right)d\alpha\int\limits_{0}^{a_2}\frac{dy}{(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}y)^{1/2+m}}F\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}y}{1+\operatorname{ch}\alpha}\right)\times$$

$$\times\int\limits_{a_2}^{a_3}\frac{\operatorname{sh}^{1+m}\varphi g_3(\varphi)}{(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}y)^{1/2+m}}F\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}y}{1+\operatorname{ch}y}\right)d\varphi;$$

$$M_5=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}\frac{d}{ds}\left[(\operatorname{ch}s+1)^{(n-m)/2}\int\limits_{a_2}^{s}\frac{\operatorname{sh}^{1-m}\alpha H_5(\alpha)}{(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)^{1/2-m}}\times\right.$$

$$\times(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}\widetilde{F}\left(\frac{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}s}\right)d\alpha.$$

Используя выражение для $H_1(\alpha)$ (см. формулу (14)), а также **учитывая** равенство

$$\int\limits_0^{a_1}d\varphi\int\limits_0^{\min(\alpha,\varphi)}ds=\int\limits_0^{\alpha}ds\int\limits_s^{a_1}d\varphi,$$

имеем

$$M_1(s)=\Gamma\left(\frac{1}{2}-m\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}+m\right)\frac{d}{ds}\left[(\operatorname{ch}s+1)^{(n-m)/2}\int\limits_{a_2}^{s}\operatorname{sh}^{1-m}\alpha\times\right.$$

$$\times(\operatorname{ch}\alpha+1)^{(m-n)/2}(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)^{1/2-m}\widetilde{F}\left(\frac{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}{1+\operatorname{ch}s}\right)\left(\int\limits_0^{\alpha}(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s)^{-1/2-m}\times\right.$$

$$\times F\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\alpha}\right)ds\int\limits_s^{a_1}\operatorname{sh}\varphi P_1(\varphi)(\operatorname{ch}\varphi-s)^{-1/2-m}F\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)d\varphi-$$

$$-\Gamma^{-2}\left(\frac{1}{2}+m\right)\int\limits_0^{\alpha}(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s)^{-1/2-m}F\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\alpha}\right)d\alpha\times$$

$$\times\int\limits_s^{a_1}\operatorname{sh}\varphi\,P_1(\varphi)(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s)^{-1/2-m}F\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)d\varphi\int\limits_{a_2}^{a_3}\widetilde{P}_1(\beta,\varphi)\,g_3(\beta)\,d\beta-$$

$$-\Gamma^2\left(\frac{1}{2}+m\right)\int_0^{\alpha}(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s)^{-1/2-m}F\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\alpha}\right)ds\times$$

$$\times\int_s^{a_1}\frac{\operatorname{sh}\varphi P_1(\varphi)}{(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s)^{1/2+m}}F\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)d\varphi\int_{a_4}^{a_5}\widetilde{P}_1(\beta,\varphi)\,g_5(\beta)\,d\beta\Bigg)d\alpha. \quad (27)$$

Заметим, что для $M_5$ будем иметь аналогичное выражение, $M_5(s)$ также выразится через функции $g_3(s)$ и $g_5(s)$.

Наконец, подставив выражения для $M_i(s)$, $i=1, 3, 5$, в (25), получаем интегральное уравнение Фредгольма II-го рода относительно $Q(s)$. Разрешимость и единственность решения последнего следует из условий, наложенных на функции $g_i$, а также поведения гипергеометрических функций. Найденное $Q(s)$ позволяет из (25) определить функцию $g_3(\varphi)$.

Г) Из соотношений (14)—(16) будем иметь

$$\int_{a_4}^{a_5}\operatorname{sh}^{1+m}\varphi g_5(\varphi)\,d\varphi\int_0^{\min(\alpha,\varphi)}(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s)^{-1/2-m}(\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s)^{-1/2-m}\times$$

$$\times F\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\alpha}\right)F\left(\frac{\operatorname{ch}\varphi-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)ds=\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-m\right)}{\operatorname{sh}^m\alpha}[f_5(\alpha)-H_2(\alpha)-$$

$$-H_4(\alpha)-H_6(\alpha)]-\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2}-m\right)}{\operatorname{sh}^m\alpha}[H_1(\alpha)+H_3(\alpha)]. \quad (28)$$

Выполнив аналогичные выкладки, что и в пункте В), из (28) получим интегральное уравнение Фредгольма II-го рода относительно функции $D(s)$:

$$D(s)=D_1(s)-[A_1(s)+A_3(s)+A_5(s)], \quad (29)$$

где $D_1(s)$, $A_i(s)$, $i=1, 3, 5$, имеют довольно громоздкий вид, аналогичный выражениям для $Q_1(s)$, $M_i(s)$; $i=1, 3, 5$. Функцию $g_5(\varphi)$ находим из равенства

$$\operatorname{sh}^{1+m}\varphi g_5(\varphi)=\frac{-\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{2}-m\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+m\right)}\frac{d}{d\varphi}\Bigg[(1+\operatorname{ch}\varphi)^{(n-m)/2}\times$$

$$\times\int_{\varphi}^{a_5}\frac{\operatorname{sh}sD(s)}{(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\varphi)^{1/2-m}}\widetilde{F}\left(\frac{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\varphi}{1+\operatorname{ch}\varphi}\right)ds\Bigg]. \quad (30)$$

Итак, решение поставленной задачи (см. (9), (10)) сводится к решению двух интегральных уравнений Фредгольма II-го рода, решения которых существуют и единственны.


1. *Уфлянд Я. С.* Метод парных уравнений в задачах математической физики.— Л. : Наука, 1977.— 220 с.
2. *Weber H.* Ueber vie Besselschen Funktionen und ihre Anwendung auf die Theorie der elektrischen Ströme // J. fur die reine und angewandte Math.— 1872.— 75, N 1.— P. 75—105.
3. *Beltrami E.* Sulla teoria delle fuzioni potenziali simmetriche // Mem. Acad. Inst. Bologna.— 1881.— 2, ser. 4.— P. 461—480.
4. *Вирченко Н. А.* Парные (тройные) интегральные уравнения.— К. : Вища шк. Изд-во при Киев. ун-те, 1989.— 160 с.
5. *Развитие* теории контактных задач в СССР.— М. : Наука, 1976.— 496 с.
6. *Титчмарш Е. Ч.* Введение в теорию интегралов Фурье.— М., Л. : Гостехиздат, 1948.— 480 с.

7. *Tranter C. J.* On some dual integral equations // Quart. J. Math.— 1951.— 2, N 5.— P. 60—66.
8. *Noble B.* On some dual integral equations // Ibid.— 1955.— **6**, N 2.— P. 81—87.
9. *Peters A. S.* Certain dual integral equations and Sonine's integrals // New York Univ.— 1961.— 285.— 41 p.
10. *Лебедев Н. Н.* Электростатическое поле у края плоского конденсатора с диэлектрической прокладкой // Журн. техн. физики.— 1958.— **28**, № 6.— С. 1330—1339.
11. *Erdelyi A. Sneddon I. N.* Fractional integration and dual integral equations // Can. J. Math.— 1962.— **14**, N 4.— P. 685—693.
12. *Рапопорт И. М.* О некоторых «парных» интегральных и интегро-дифференциальных уравнениях // Сб. тр. Ин-та математики АН УССР.— 1949.— № 12.— С. 102—118.
13. *Черский Ю. И.* Об уравнениях типа свертки // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1958.— **22**, № 3.— С. 361—373.
14. *Гринченко В. Т. Улитко А. Ф.* Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства // Инж.-физ. журн.— 1963.— **6**, № 10.— С. 67—71.
15. *Fox Ch.* A formal solution of certain dual integral equations // Trans. Amer. Math. Soc.— 1965.— **119**, N 3.— P. 389—398.
16. *Kiryakova V.* Fractional integration operators involving Fox's $H^{m,0}_{m,m}$-function //C. R. Acad. Bulg. Sci.— 1988.— **41**, N 11.— P. 11—14.
17. *Парасюк О. С.* О «парных» интегральных уравнениях в классе обобщенных функций // Докл. АН СССР.— 1956.— **110**, № 6.— С. 957—959.
18. *Парасюк О. С.* К теории причинных сингулярных функций // Там же.— 1955.— **100**, № 4.— С. 643—645.
19. *Braaksma B., Schuitman A.* Some classes of Watson transforms and related integral equations for generalised functions // SIAM J. Math. Anal.— 1976.— **7**, N 6.— P. 771—798.
20. *McBride A. C.* Solution of dual integral equations of Titchmarsch type using generalised functions // Proc. Roy. Soc. Edinburgh A.— 1979.— **83**, N 3, 4.— P. 263—281.
21. *Kuipers L., Meulenbeld B.* On a generalization of Legendre's associated differential equation. I, II // Proc. Kon. ned. akad. wetensch. A.— 1957.— **60**, N 4.— P. 337—350.
22. *Götze F.* Verallgemeinerung einer Integraltransformation von Mehler-Fock // Ibid.— 1965. — **68**, N 4.— P. 396—404.
23. *Вирченко Н. А.* Интегральные уравнения с гипергеометрической функцией ${}_2F_1$ $(a, b; c; x)$ в ядре // Докл, АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 9.— С. 3—5.

Получено 24.06.91