УДК 530.145+539.12.01

В. І. КУЧЕРЯВИЙ, канд. фіз.-мат. наук
(Ін-т теорет. фізики АН України, Київ)

Симетрії та аномалії квантової теорії поля в ренормалізаційній схемі Боголюбова— Парасюка

Найдены регулярные и размерно-регуляризованные значения трех типов величин, входящих в векторные и аксиально-векторные тождества Уорда для треугольных спинорных амплитуд с произвольной лоренцевой характеристикой вершин и разными массами. Установлено, что размерно-регуляризованные значения величин удовлетворяют каноническим тождествам Уорда (КТУ), а регулярные значения их — определенным аналогам этих КТУ. Найдены квантовые поправки к КТУ. Общие формулы конкретизированы для AVV- и AAA- амплитуд в четырехмерном мире. Показано, что киральные пределы для них определяются дискретной симметрией амплитуд, имеющей место в условиях этих пределов.

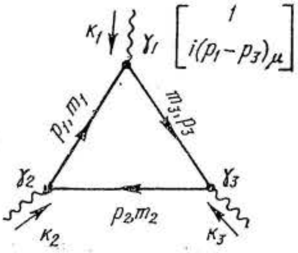
Знайдені регулярні та розмірно-регуляризовні значення трьох типів величин, що входять до векторних і аксіально-векторних тотожностей Уорда для трикутних спінорних амплітуд з довільною лоренцевою характеристикою вершин і різними масами. Встановлено, що розмірно-регуляризовні значення величин задовольняють канонічним тотожностям Уорда (КТУ), а регулярні значення їх — певним аналогам цих КТУ. Знайдені квантові поправки до КТУ. Загальні формули конкретизовані для AVV- і AAA-амплітуд у чотиривимірному світі. Показано, що кіральні границі для них визначаються дискретною симетрією амплітуд, яка має місце в умовах цих границь.

1. Коротка характеристика проблеми.

1. Симетрії квантово-польових систем ведуть до певних співвідношень між квантово-польовими величинами, відомих як тотожності Уорда. Аномалії теорії поля проявляються як порушення тотожностей Уорда на рівні регулярних (скінченних) значень цих величин. Характер порушення, врешті-решт, залежить від способу знаходження регулярних значень (іншими словами, від вибору ренормсхеми). Квантова теорія поля і фізика елементарних частинок поставили в центр заплутаного клубка проблем, пов'язаних з симетріями, аномаліями, регуляризаціями і ренормалізаціями, ряд конкретних квантово-польових величин. Найважливішими серед них є трикутні спінорні амплітуди, особливо так звані AVV- і AAA-амплітуди для чотиривимірного світу [1—6]. Зважаючи на їх особливу роль у фізиці, на цих об'єктах фактично перевіряється ефективність і взаємоузгодженість різних регуляризаційних і ренормалізаційних процедур [1—8]. Найбільш широкого практичного застосування набула ренормсхема [1—5], яка базується на збереженні векторного струму, заздалегідь постулюючи канонічність векторних тотожностей Уорда для регулярних значень. При цьому аксіально-векторні тотожності Уорда вже не будуть канонічними. Проте вказана вище ренормсхема принципово незастосовна там, де векторні струми або відсутні взагалі (наприклад, AAA-амплітуда), або векторні струми не зберігаються (всі ферміонні маси m_l на лініях різні).

2. Розглянемо ренормалізаційну схему Боголюбова — Парасюка [9—13], концепція якої основана на уявленні про суто математичну природу ультрафіолетових розбіжностей, і яка є конструктивною формою теореми Хана — Банаха [14]. Доцільно використати її реалізацію [15—18], яка базується на властивостях спеціальних функцій. До речі, рекурентні співвідношення (32) відіграють у цій реалізації визначальну роль і мають універсальний характер. В результаті знаходимо, що відповідно уточнена ренормсхема Боголюбова — Парасюка зберігає канонічні алгебраїчні співвідношення між величинами і автоматично генерує аномальні вклади. Вона природньо узагальнює згадану ренормсхему, яка використовує збере-

ження векторного струму. В такій загальності і повноті знайдені регулярні значення величин з'являються вперше і мають широку область застосовності. В них не конкретизовані ні лоренцеві характеристики вершин, ні розмірність простору — часу n, ні (q, p)-тип метрики $g(x)$. Крім того, в цій ренормсхемі вдається уточнити механізми і сценарії порушення кіральної симетрії.



2. Наївні вирази і канонічні тотожності Уорда.

1. Трикутній спінорній різномасовій діаграмі (рис. 1) з довільною лоренцевою характеристикою вершин в n-вимірному просторі-часі відповідає величина

$$\mathcal{J}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} (d^n p)\, \delta(p, k) \frac{\operatorname{tr}[\gamma_1 (m_1 + \hat{p}_1) \gamma_2 (m_2 + \hat{p}_2) \gamma_3 (m_3 + \hat{p}_3)]}{(m_1^2 - p_1^2 - i\varepsilon_1)(m_2^2 - p_2^2 - i\varepsilon_2)(m_3^2 - p_3^2 - i\varepsilon_3)}, \qquad (1)$$

$$(d^n p) \equiv d^n p_1 d^n p_2 d^n p_3, \ \hat{p}_l = \gamma^\sigma p_{l\sigma}, \qquad l = 1, 2, 3, \qquad (2)$$

$$\delta(p, k) \equiv \delta(-k_1 + p_3 - p_1)\, \delta(-k_2 + p_1 - p_2)\, \delta(-k_3 + p_2 - p_3).$$

Матриці $\gamma_i \in \Lambda^k(g)$, $i = 1, 2, 3$, — довільні однорідні елементи степеня k, $k = 0, 1, \ldots, n$, а матриці $\gamma^\sigma \in \Lambda^1(g)$, $\sigma = 1, 2, \ldots, n$, — що породжують елементи алгебри Кліффорда $Cl(g)_{\mathbb{K}}$ в її точному матричному представленні мінімальної розмірності N_g. Структура і властивості цього представлення визначаються квадратичною формою

$$g(x) = -x_1^2 - \cdots - x_q^2 + x_{q+1}^2 + \cdots + x_{q+p}^2, \qquad q + p = n, \qquad (3)$$

і полем скалярів $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ [19]. Аналогом γ^5-матриці Дірака є матриця $\gamma_* \in \Lambda^n(g)$ з властивостями

$$\begin{gathered} \gamma_* \equiv \gamma_1\gamma_2 \cdots \gamma_n, \ \gamma^* \equiv \gamma^1\gamma^2 \cdots \gamma^n = (-1)^q \gamma_*, \ \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Lambda^1(g), \\ \gamma_\mu\gamma_* = (-1)^{n+1} \gamma_*\gamma_\mu, \ \mu = 1, 2, \ldots, n, \ \gamma_\mu \in \Lambda^1(g), \\ \gamma_*^2 = \varepsilon(g) I_g, \ \varepsilon(g) = (-1)^q \varepsilon_n, \ \varepsilon_n \equiv (-1)^{n(n-1)/2}. \end{gathered} \qquad (4)$$

Матриця γ_* реалізує через множення (праве або ліве) в точному матричному представленні алгебри Кліффорда операцію дуального спряження, яка аналогічна операції дуального спряження по Ходжу в алгебрі Грассмана. Звідси всі ті властивості алгебраїчного і геометричного характеру, які пов'язані з матрицею γ_*. Повнішу інформацію про матрицю γ_* читач знайде в [19—21].

2. Канонічні тотожності Уорда (КТУ), пов'язані з величинами (1), мають вигляд

$$\begin{aligned} k_{1\mu}\mathcal{J}^{(\gamma^\mu\gamma)\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) &= 1/i\mathcal{J}_\mu^{(\gamma\dot{^\mu}\gamma)\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) = \\ &= (-1)^{\pi_1} \Pi_1^{\gamma\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) - \Pi_3^{\gamma\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) + \\ &\quad + (m_3 - (-1)^{\pi_1} m_1)\, \mathcal{J}^{\gamma\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k), \end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned} k_{2\alpha}\mathcal{J}^{\gamma_1(\gamma^\alpha\gamma)\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) &= 1/i\mathcal{J}_\alpha^{\gamma_1(\gamma\dot{^\alpha}\gamma)\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) = \\ &= (-1)^{\pi_2} \Pi_2^{\gamma_1\gamma\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) - \Pi_1^{\gamma_1\gamma\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) + \\ &\quad + (m_1 - (-1)^{\pi_2} m_2)\, \mathcal{J}^{\gamma_1\gamma\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k), \end{aligned} \qquad (6)$$

$$k_{3\beta}\mathcal{J}^{\gamma_1\gamma_2(\gamma^\beta\gamma)}(m_1, m_2, m_3, k) = 1/i\mathcal{J}_\beta^{\gamma_1\gamma_2(\dot{\gamma}^\beta\gamma)}(m_1, m_2, m_3, k) =$$
$$= (-1)^{\pi_3}\Pi_3^{\gamma_1\gamma_2\gamma}(m_1, m_2, m_3, k) - \Pi_2^{\gamma_1\gamma_2\gamma}(m_1, m_2, m_3, k) +$$
$$+ (m_2 - (-1)^{\pi_3} m_3)\,\mathcal{J}^{\gamma_1\gamma_2\gamma}(m_1, m_2, m_3, k). \tag{7}$$

Формулами (5 — 7) досягається однаковий опис векторних ($\gamma = I_g$) та аксіально-векторних ($\gamma = \gamma^*$) КТУ. При цьому $(-1)^{\pi_i} = 1$, якщо $\gamma = I_g$, n довільне, чи коли $\gamma = \gamma^*$, $n = 2r + 1$, і $(-1)^{\pi_i} = -1$, якщо $\gamma = \gamma^*$, $n = 2r$.

Величини $\mathcal{J}_\mu^{(\dot{\gamma}^\mu\gamma)\gamma_1\gamma_2}(\cdots)$, $\mathcal{J}_\alpha^{\gamma_1(\dot{\gamma}^\alpha\gamma)\gamma_3}(\cdots)$, $\mathcal{J}_\beta^{\gamma_1\gamma_2(\dot{\gamma}^\beta\gamma)}(\cdots)$, $\Pi_l^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots)$, $l=1, 2, 3$, відрізняються від $\mathcal{J}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots)$ лише поліномом під знаком tr в чисельнику підінтегрального виразу (1), тобто

$$\mathcal{J}_\mu^{(\dot{\gamma}^\mu\gamma)\gamma_2\gamma_3}(\cdots) \leftrightarrow i\,(p_3 - p_1)_\mu \operatorname{tr}[\gamma^\mu\gamma\,(m_1 + \hat{p}_1)\,\gamma_2\,(m_2 + \hat{p}_2)\,\gamma_3\,(m_3 + \hat{p}_3)],$$
$$\mathcal{J}_\alpha^{\gamma_1(\dot{\gamma}^\alpha\gamma)\gamma_3}(\cdots) \leftrightarrow i\,(p_1 - p_2)_\alpha \operatorname{tr}[\gamma_1\,(m_1 + \hat{p}_1)\,\gamma^\alpha\gamma\,(m_2 + \hat{p}_2)\,\gamma_3\,(m_3 + \hat{p}_3)],$$
$$\mathcal{J}_\beta^{\gamma_1\gamma_2(\dot{\gamma}^\beta\gamma)}(\cdots) \leftrightarrow i\,(p_2 - p_3)_\beta \operatorname{tr}[\gamma_1\,(m_1 + \hat{p}_1)\,\gamma_2\,(m_2 + \hat{p}_2)\,\gamma^\beta\gamma\,(m_3 + \hat{p}_3)],$$
$$\Pi_1^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots) \leftrightarrow \operatorname{tr}[\gamma_1\,(m_1^2 - p_1^2)\,\gamma_2\,(m_2 + \hat{p}_2)\,\gamma_3\,(m_3 + \hat{p}_3)], \tag{8}$$
$$\Pi_2^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots) \leftrightarrow \operatorname{tr}[\gamma_1\,(m_1 + \hat{p}_1)\,\gamma_2\,(m_2^2 - p_2^2)\,\gamma_3\,(m_3 + \hat{p}_3)],$$
$$\Pi_3^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots) \leftrightarrow \operatorname{tr}[\gamma_1\,(m_1 + \hat{p}_1)\gamma_2\,(m_2 + \hat{p}_2)\,\gamma_3\,(m_3^2 - p_3^2)].$$

Через ультрафіолетові розбіжності тотожності (5)—(7) мають лише формальний зміст.

3. Регулярні і розмірно-регуляризовні значення величин.

1. Величини $\mathcal{J}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots)$ мають індекс розбіжності $\nu = n - 3$, тоді як величини $\mathcal{J}_\mu^{(\dot{\gamma}^\mu\gamma)\gamma_2\gamma_3}(\cdots)$, $\mathcal{J}_\alpha^{\gamma_1(\dot{\gamma}^\alpha\gamma)\gamma_3}(\cdots)$, $\mathcal{J}_\beta^{\gamma_1\gamma_2(\dot{\gamma}^\beta\gamma)}(\cdots)$, $\Pi_l^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots)$, $l=1$, 2, 3, мають індекс розбіжності $\nu + 1 = n - 2$. Регулярні значення для них обчислювались так, як у [15 — 18]. Розмірно-регуляризовні значення цих величин знаходились згідно з концепцією і робочими формулами, наведеними в [20, 21].

2. Величині $\mathcal{J}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots)$ відповідають такі α-параметричні інтеграли:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) \\ (R^\nu\mathcal{J})^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) \end{bmatrix} = (2\pi)^n\,\delta(k)\,b\,(g)\int\limits_{\Sigma^2}\frac{d\mu(\alpha)}{\Delta^{n/2}}\times$$
$$\times\sum_{s=0}^{3}\sum_{j=0}^{[s/2]}\operatorname{tr}[\mathcal{P}_{sj}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m, \alpha, k)]M_\varepsilon^{\omega+j}\begin{bmatrix} F_{sj} \\ (R^\nu F)_{sj} \end{bmatrix} \tag{9}$$

для розмірно-регуляризовного $\mathcal{J}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k)$ і регулярного $(R^\nu\mathcal{J})^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k)$ значень цієї величини, причому регулярне значення обчислене по індексу ренормування ν.

Область інтегрування Σ^2 та міра інтегрування $d\mu(\alpha)$ в (9):

$$\Sigma^2 = \left\{\alpha_l \,|\, \alpha_l \geqslant 0,\ l = 1, 2, 3,\ \sum_{l=1}^{3}\alpha_l = 1\right\}, \tag{10}$$
$$d\mu(\alpha) = \delta\left(1 - \sum_{l=1}^{3}\alpha_l\right) d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3.$$

Інші позначення такі:

$$b(g)=\frac{\pi^{n/2}i^p}{(2\pi)^n},\ \ \omega=\frac{n}{2}-3,\ \ \delta(k)\equiv\delta(-k_1-k_2-k_3), \tag{11}$$

$$F_{sj}=(1-Z_\varepsilon)^{\omega+j}\,\Gamma(-\omega-j), \tag{12}$$

$$(R^\nu F)_{sj}=Z_\varepsilon^{1+\nu_{sj}}\frac{\Gamma(\lambda_{sj}(\nu))}{\Gamma(2+\nu_{sj})}\,{}_2F_1(1,\lambda_{sj}(\nu);\ 2+\nu_{sj};\ Z_\varepsilon), \tag{13}$$

$$\nu_{sj}=[(\nu-s)/2]+j,\ \ \lambda_{sj}(\nu)=1+\nu_{sj}-\omega-j,\ \ Z_\varepsilon=A/M_\varepsilon. \tag{14}$$

В (9) і (14) через $[s/2]$ і $[(\nu-s)/2]$ позначені цілі частини чисел $s/2$ і $(\nu-s)/2$ відповідно; p в (11) вказує на число додатних квадратів в метриці (3); ${}_2F_1$ — гіпергеометрична функція Гаусса. Індекси (s, j) при функціях F_{sj} и $(R^\nu F)_{sj}$ вказують лише на те, що ці функції стоять при величинах $\mathcal{P}_{sj}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m,\alpha,k)$. Останні є α-образами однорідних p-поліномів $\mathcal{P}_s^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m,p)$ степеня $s=0,1,2,3$, що складають поліном чисельника під знаком tr в (1).

В розглядуваному випадку величини $\mathcal{P}_{sj}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m,\alpha,k)$, а також Δ, M_ε, A можна записати у вигляді

$$\Delta(\alpha)=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3,$$

$$M_\varepsilon=M-iE,\ \ M=\sum_{l=1}^{3}\alpha_l m_l^2,\ \ E=\sum_{l=1}^{3}\alpha_l\varepsilon_l,$$

$$\begin{aligned}A(\alpha,k)&=\Delta^{-1}[\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)k_2^2+\alpha_3(\alpha_2+\alpha_1)k_3^2+\alpha_1\alpha_3 2(k_2\cdot k_3)]=\\&=\alpha_1Y_1^2+\alpha_2Y_2^2+\alpha_3Y_3^2,\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}_{00}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots)=m_1m_2m_3\gamma_1\gamma_2\gamma_3,\\&\mathcal{P}_{10}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots)=m_2m_3\gamma_1\hat{Y}_1\gamma_2\gamma_3+m_1m_3\gamma_1\gamma_2\hat{Y}_2\gamma_3+m_1m_2\gamma_1\gamma_2\gamma_3\hat{Y}_3,\\&\mathcal{P}_{20}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots)=m_1\gamma_1\gamma_2\hat{Y}_2\gamma_3\hat{Y}_3+m_2\gamma_1\hat{Y}_1\gamma_2\gamma_3\hat{Y}_3+m_3\gamma_1\hat{Y}_1\gamma_2\hat{Y}_2\gamma_3,\\&\mathcal{P}_{21}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots)=\left(-\frac{1}{2}\right)[m_1\gamma_1\gamma_2\gamma^\sigma\gamma_3\gamma_\sigma X_{23}+m_2\gamma_1\gamma^\sigma\gamma_2\gamma_3\gamma_\sigma X_{13}+\\&\qquad+m_3\gamma_1\gamma^\sigma\gamma_2\gamma_\sigma\gamma_3X_{12}],\\&\mathcal{P}_{30}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots)=\gamma_1\hat{Y}_1\gamma_2\hat{Y}_2\gamma_3\hat{Y}_3,\\&\mathcal{P}_{31}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots)=\left(-\frac{1}{2}\right)[\gamma_1\hat{Y}_1\gamma_2\gamma^\sigma\gamma_3\gamma_\sigma X_{23}+\gamma_1\gamma^\sigma\gamma_2\hat{Y}_2\gamma_3\gamma_\sigma X_{13}+\\&\qquad+\gamma_1\gamma^\sigma\gamma_2\gamma_\sigma\gamma_3\hat{Y}_3X_{12}],\end{aligned} \tag{16}$$

де величини $Y_l(\alpha,k)$ і $X_{ll'}(\alpha)$ визначаються за формулами

$$\begin{aligned}&Y_1=\Delta^{-1}[(\alpha_2+\alpha_3)k_2+\alpha_3k_3],\\&Y_2=\Delta^{-1}[-\alpha_1k_2+\alpha_3k_3],\ \ X_{ll'}(\alpha)=\Delta^{-1},\ \forall l,\ l'\in\{1,2,3\},\\&Y_3=\Delta^{-1}[-\alpha_1k_2-(\alpha_1+\alpha_2)k_3].\end{aligned} \tag{17}$$

3. Величині $\mathcal{J}_\mu^{(\overset{\vee}{\gamma}\mu_\gamma)\gamma_2\gamma_3}(m_1,m_2,m_3,k)$ (аналогічно $\mathcal{J}_\alpha^{\gamma_1(\overset{\vee}{\gamma}\alpha_\gamma)\gamma_3}(m_1,m_2,m_3,k)$ і $\mathcal{J}_\beta^{\gamma_1\gamma_2(\overset{\vee}{\gamma}\beta_\gamma)}(m_1,m_2,m_3,k)$), означеній формулами (8) і (1), відповідають такі α-параметричні інтеграли:

$$\begin{bmatrix} \mathcal{J}_{\mu}^{(\dot{\gamma}^{\mu}\gamma)\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) \\ (R^{\nu+1}\mathcal{J}_{\mu})^{(\dot{\gamma}^{\mu}\gamma)\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) \end{bmatrix} = (2\pi)^n \delta(k)\, b(g) \int_{\Sigma^2} \frac{d\mu(\alpha)}{\Delta^{n/2}} \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{4} \sum_{j=0}^{[s/2]} \operatorname{tr}[\mathcal{D}_{sj}^{\dot{\gamma}\gamma_2\gamma_3}(m, \alpha, k)]\, M_{\varepsilon}^{\omega+j} \begin{bmatrix} F_{sj} \\ (R^{\nu+1}F)_{sj} \end{bmatrix} \tag{18}$$

для розмірно-регуляризовного $\mathcal{J}_{\mu}^{(\dot{\gamma}^{\mu}\gamma)\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k)$ і регулярного $(R^{\nu+1}\mathcal{J}_{\mu})^{(\dot{\gamma}^{\mu}\gamma)\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k)$ значень цієї величини, причому регулярне значення обчислене за індексом ренормування $\nu+1$.

У виразах (18) використані нові позначення

$$\mathcal{D}_{sj}^{\dot{\gamma}\gamma_2\gamma_3}(m, \alpha, k) = i(Y_3 - Y_1)_{\mu}\, \mathcal{P}_{s-1,j}^{(\gamma^{\mu}\gamma)\gamma_2\gamma_3}(m, \alpha, k), \ (s, j) \neq$$
$$\neq (0, 0),\ (2, 1),\ (4, 2), \tag{19}$$

$$\mathcal{D}_{sj}^{\ddot{\gamma}\gamma_2\gamma_3}(m, \alpha, k) = 0,\ (s, j) = (0, 0),\ (2, 1),\ (4, 2), \tag{20}$$

$$(R^{\nu+1}F)_{sj} = Z_{\varepsilon}^{1+(\nu+1)_{sj}} \frac{\Gamma(\lambda_{sj}(\nu+1))}{\Gamma(2+(\nu+1)_{sj})}\, {}_2F_2(1, \lambda_{sj}(\nu+1);$$
$$2+(\nu+1)_{sj}; Z_{\varepsilon}). \tag{21}$$

4. Величині $\Pi_1^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k)$ (аналогічно $\Pi_2^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_2, k)$ і $\Pi_3^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k)$), означеній формулами (8) і (1), відповідають такі α-параметричні інтеграли:

$$\begin{bmatrix} \Pi_1^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k)) \\ (R^{\nu+1}\Pi_1)^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) \end{bmatrix} = (2\pi)^n \delta(k)\, b(g) \int_{\Sigma^2} \frac{d\mu(\alpha)}{\Delta^{n/2}} \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{4} \sum_{j=0}^{[s/2]} \operatorname{tr}[\Pi_{1;sj}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m, \alpha, k)]\, M_{\varepsilon}^{\omega+j} \begin{bmatrix} F_{sj} \\ (R^{\nu+1}F)_{sj} \end{bmatrix} \tag{22}$$

для розмірно-регуляризовного $\Pi_1^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k)$ і регулярного $(R^{\nu+1}\Pi_1)^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k)$ значень цієї величини, причому регулярне значення обчислене за індексом ренормування $\nu+1$.

У формулі (22) використані позначення

$$\Pi_{1;00}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots) = \gamma_1\gamma_2\gamma_3 m_2 m_3 m_1^2,$$

$$\Pi_{1;10}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots) = [\gamma_1\gamma_2\gamma_3\hat{Y}_3 m_2 + \gamma_1\gamma_2\hat{Y}_2\gamma_3 m_3]\, m_1^2,$$

$$\Pi_{1;20}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots) = [\gamma_1\gamma_2\gamma_3 m_2 m_3(-Y_1^2) + \gamma_1\gamma_2\hat{Y}_2\gamma_3\hat{Y}_3 m_1^2],$$

$$\Pi_{1;21}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots) = \left(-\frac{1}{2}\right)[\gamma_1\gamma_2\gamma_3 m_2 m_3(-nX_{11}) + \gamma_1\gamma_2\gamma^{\sigma}\gamma_3\gamma_{\sigma}X_{23}m_1^2],$$

$$\Pi_{1;30}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots) = [\gamma_1\gamma_2\gamma_3\hat{Y}_3 m_2 + \gamma_1\gamma_2\hat{Y}_2\gamma_3 m_3](-Y_1^2),$$

$$\Pi_{1;31}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots) = \left(-\frac{1}{2}\right)[\gamma_1\gamma_2\gamma_3\hat{Y}_1 m_2(-2X_{31}) + \gamma_1\gamma_2\hat{Y}_1\gamma_3 m_3(-2X_{21}) +$$
$$+ (\gamma_1\gamma_2\gamma_3\hat{Y}_3 m_2 + \gamma_1\gamma_2\hat{Y}_2\gamma_3 m_3)(-nX_{11})],$$

$$\Pi_{1;40}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots) = \gamma_1\gamma_2\hat{Y}_2\gamma_3\hat{Y}_3(-Y_1^2), \tag{23}$$

$$\Pi_{1;41}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots) = \left(-\frac{1}{2}\right)[\gamma_1\gamma_2\gamma^{\sigma}\gamma_3\gamma_{\sigma}X_{23}(-Y_1^2) + \gamma_1\gamma_2\hat{Y}_2\gamma_3\hat{Y}_3(-nX_{11}) +$$
$$+ \gamma_1\gamma_2\hat{Y}_1\gamma_3\hat{Y}_3(-2X_{21}) + \gamma_1\gamma_2\hat{Y}_2\gamma_3\hat{Y}_1(-2X_{31})],$$

$$\Pi_{1;42}^{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}(\cdots) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 \gamma_1\gamma_2\gamma^\sigma\gamma_3\gamma_\sigma(-2X_{21}X_{31} - nX_{23}X_{11}).$$

Отже, повністю описані розмірно-регуляризовні і регулярні (скінченні) значення всіх величин, що входять до тотожностей (5)—(7). Тепер потрібно конкретизувати матриці γ_1, γ_2, γ_3, розмірність простору-часу n, (q, p)-тип метрики $g(x)$ і обчислити кліффордові сліди.

4. Регулярні аналоги канонічних тотожностей Уорда. Квантові поправки (аномальні вклади) до канонічних тотожностей Уорда.

1. Знайдені регулярні (скінченні) значення величин, що входять у формули (5)—(7), задовольняють тотожності

$$k_{1\mu}(R^\nu\mathcal{J})^{(\gamma^\mu\gamma)\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) = 1/i\,(R^{\nu+1}\mathcal{J}_\mu)^{(\dot\gamma^\mu\gamma)\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) =$$
$$= (-1)^{\pi_1}(R^{\nu+1}\Pi_1)^{\gamma\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) - (R^{\nu+1}\Pi_3)^{\gamma\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) +$$
$$+ (m_3 - (-1)^{\pi_1}m_1)(R^{\nu+1}\mathcal{J})^{\gamma\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k), \tag{24}$$

$$k_{2\alpha}(R^\nu\mathcal{J})^{\gamma_1(\gamma^\alpha\gamma)\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) = 1/i\,(R^{\nu+1}\mathcal{J}_\alpha)^{\gamma_1(\dot\gamma^\alpha\gamma)\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) =$$
$$= (-1)^{\pi_2}(R^{\nu+1}\Pi_2)^{\gamma_1\gamma\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) - (R^{\nu+1}\Pi_1)^{\gamma_1\gamma\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) +$$
$$+ (m_1 - (-1)^{\pi_2}m_2)(R^{\nu+1}\mathcal{J})^{\gamma_1\gamma\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k), \tag{25}$$

$$k_{3\beta}(R^\nu\mathcal{J})^{\gamma_1\gamma_2(\gamma^\beta\gamma)}(m_1, m_2, m_3, k) = 1/i\,(R^{\nu+1}\mathcal{J}_\beta)^{\gamma_1\gamma_2(\dot\gamma^\beta\gamma)}(m_1, m_2, m_3, k) =$$
$$= (-1)^{\pi_3}(R^{\nu+1}\Pi_3)^{\gamma_1\gamma_2\gamma}(m_1, m_2, m_3, k) - (R^{\nu+1}\Pi_2)^{\gamma_1\gamma_2\gamma}(m_1, m_2, m_3, k) +$$
$$+ (m_2 - (-1)^{\pi_3}m_3)(R^{\nu+1}\mathcal{J})^{\gamma_1\gamma_2\gamma}(m_1, m_2, m_3, k), \tag{26}$$

які називатимемо регулярними аналогами КТУ. Акцентуємо увагу на тому, що останні члени в тотожностях (24)—(26) обчислені за індексом ренормування $\nu + 1$, хоч їх власний індекс розбіжності ν. Саме це і дає можливість регулярним аналогам КТУ (24)—(26) по вигляду копіювати КТУ (5)—(7) і в той же час відрізнятись від них.

2. Різниця між ними буде визначатись величинами

$$\begin{bmatrix} a^{\gamma\gamma_2\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) \\ a^{\gamma_1\gamma\gamma_3}(m_1, m_2, m_3, k) \\ a^{\gamma_1\gamma_2\gamma}(m_1, m_2, m_3, k) \end{bmatrix} = (2\pi)^n\,\delta(k)\,b(g)\int\limits_{\Sigma^2}\frac{d\mu(\alpha)}{\Delta^{n/2}}\times$$
$$\times\sum_{s=0}^{3}\sum_{j=0}^{[s/2]}\begin{bmatrix}(m_3 - (-1)^{\pi_1}m_1)\,\mathrm{tr}\,]\mathcal{P}_{sj}^{\gamma\gamma_2\gamma_3}(m, \alpha, k)] \\ (m_1 - (-1)^{\pi_2}m_2)\,\mathrm{tr}\,[\mathcal{P}_{sj}^{\gamma_1\gamma\gamma_3}(m, \alpha, k)] \\ (m_2 - (-1)^{\pi_3}m_3)\,\mathrm{tr}\,[\mathcal{P}_{sj}^{\gamma_1\gamma_2\gamma}(m, \alpha, k)]\end{bmatrix} M_8^{\omega+j}(\Delta F)_{sj}, \tag{27}$$

що і є аномальними вкладами (квантовими поправками) до КТУ,

$$(\Delta F)_{sj} \equiv (R^{\nu+1}F)_{sj} - (R^\nu F)_{sj} = (-1)\,\theta_{sj}\frac{\Gamma(\lambda_{sj}(\nu))}{\Gamma(2+\nu_{sj})}\left(\frac{A}{M_8}\right)^{1+\nu_{sj}}. \tag{28}$$

Тут введені такі позначення:

$$\theta_{sj} \equiv \theta((\nu+1)_{sj})\,\theta_s,$$
$$\theta_s \equiv (\nu+1)_{sj} - \nu_{sj} = (\nu - s)\,(\mathrm{mod}\,2), \tag{29}$$

а $\theta(x)$ — ступінчаста функція Хевісайда така, що $\theta(x)=0$, $x<0$ і $\theta(x)=1$, $x\geqslant 0$.

Видно, що кожний доданок подвійної суми по (s, j) в (27) є однорідним поліномом по зовнішнім імпульсам k_i, $i = 1, 2, 3$, і раціональною однорідною функцією за масами m_l (при $\varepsilon_l \to 0$) із степенями однорідності

$$\deg(k)_{sj} = s - 2j + 2(1 + \nu_{sj}) = n - 1 - \theta_s,$$
$$\deg(m)_{sj} = 1 + (3 - s) - 2\lambda_{sj}(\nu) = \theta_s - 1. \tag{30}$$

Отже, ненульовий аномальний внесок до КТУ є однорідною функцією нульового степеня за масами (при $\varepsilon_l \to 0$) і однорідним поліномом степеня $n-2$ за зовнішніми імпульсами k_i, $i = 1, 2, 3$. Це узагальнює на невироджений випадок $m_1 \neq m_2 \neq m_3$ відоме твердження про масову незалежність аномального внеску для виродженого випадку $m_1 = m_2 = m_3$ [2—6].

Із сказаного видно, що вся нетривіальна інформація про регулярні значення величин (9), (18), (22) і аномальних внесків (27) до КТУ зосереджена в функціях $(R^\nu F)_{sj}$ і $(R^{\nu+1}F)_{sj}$, які визначені формулами (13)—(14), (20)—(21), (28)—(29). В свою чергу, властивості цих функцій визначаються числами ν_{sj}, $\lambda_{sj}(\nu)$, $(\nu+1)_{sj}$, $\lambda_{sj}(\nu+1)$, θ_{sj}, ω. Враховуючи їх особливу роль, систематизуємо ці числа в табл. 1. Заслуговують окремої уваги формули узгодженості

$$(R^\nu F)_{sj} = F_{sj}, \text{ якщо } \nu_{sj} \leqslant -1,$$
$$(R^{\nu+1}F)_{sj} = (R^\nu F)_{s-1,j}, \tag{31}$$

а також рекурентні співвідношення

$$F_{s-2,j-1} + (\omega + j) F_{sj} = Z_\varepsilon F_{s,j-1},$$
$$(R^\nu F)_{s-2,j-1} + (\omega + j)(R^\nu F)_{sj} = Z_\varepsilon (R^\nu F)_{s,j-1}. \tag{32}$$

Тому, якщо маємо деяке алгебраїчне співвідношення між величинами, що виконується на формальному або на розмірно-регуляризовному рівні, то це ж співвідношення буде виконуватись і на регулярному рівні, якщо регулярні значення всіх величин співвідношення знайдені за одним і тим же індексом ренормування (ясно, що максимальному, бо інакше не одержимо скінченності всіх величин).

Табл. 1. Визначальні числа трикутних спінорних амплітуд

(s, j)	$n=2r$, $(\omega=r-3)$					$n=2r+1$, $(\omega=r-5/2)$				
	ν_{sj}	$\lambda_{sj}(\nu)$	$(\nu+1)_{sj}$	$\lambda_{sj}(\nu+1)$	θ_{sj}	ν_{sj}	$\lambda_{sj}(\nu)$	$(\nu+1)_{sj}$	$\lambda_{sj}(\nu+1)$	θ_{sj}
(0,0)	$r-2$	2	$r-1$	3	$\theta(r-1)$	$r-1$	5/2	$r-1$	5/2	0
(1,0)	$r-2$	2	$r-2$	2	0	$r-2$	3/2	$r-1$	5/2	$\theta(r-1)$
(2,0)	$r-3$	1	$r-2$	2	$\theta(r-2)$	$r-2$	3/2	$r-2$	3/2	0
(2,1)	$r-2$	1	$r-1$	2	$\theta(r-1)$	$r-1$	3/2	$r-1$	3/2	0
(3,0)	$r-3$	1	$r-3$	1	0	$r-3$	1/2	$r-2$	3/2	$\theta(r-2)$
(3,1)	$r-2$	1	$r-2$	1	0	$r-2$	1/2	$r-1$	3/2	$\theta(r-1)$
(4,0)			$r-3$	1				$r-3$	1/2	
(4,1)			$r-2$	1				$r-2$	1/2	
(4,2)			$r-1$	1				$r-1$	1/2	

3. Щодо розмірно-регуляризовних значень величин, які входять в тотожності (5)—(7), то застосована тут версія розмірної регуляризації [20, 21] продукує величини, що справджують якраз канонічні тотожності Уорда (5)—(7).

5. Регулярні значення AVV- і AAA-трикутних спінорних амплітуд для $n = 4$.

1. Найбільш популярними трикутними спінорними амплітудами в квантовій теорії поля є AVV ($\gamma_1 = \gamma^\mu\gamma^*$, $\gamma_2 = \gamma^\alpha$, $\gamma_3 = \gamma^\beta$) і AAA ($\gamma_1 = \gamma^\mu\gamma^*$, $\gamma_2 = \gamma^\alpha\gamma^*$, $\gamma_3 = \gamma^\beta\gamma^*$) — амплітуди в чотиривимірному світі. Згідно (1) між

ними існує взаємозв'язок

$$\mathcal{J}^{\mu\alpha\beta(AAA)}(m_1, m_2, m_3, k) = \varepsilon(g)\,\mathcal{J}^{\mu\alpha\beta(AVV)}(m_1, -m_2, m_3, k). \qquad (33)$$

Тому в кіральній границі $m_l \to 0$ різниця між ними зводиться лише до множника $\varepsilon(g) = (-1)^q$.

2. Далі скрізь $\nu = 1$, и $\omega = -1$. Застосовуючи формули (9) — (17) і обчислюючи сліди, знаходимо регулярні значення величин типу (1):

$$(R^\nu \mathcal{J})^{\mu\alpha\beta(\cdots)}(m_1, m_2, m_3, k) = (2\pi)^4\,\delta(k)\,C^{(\cdots)}(g)\int\limits_{\Sigma^2}\frac{d\mu(\alpha)}{\Delta^2}\times$$

$$\times\{\varepsilon^{\mu\alpha\beta\tau}k_{2\tau}(R^\nu\mathcal{J}_1)^{(\cdots)}(m, \alpha, k) + \varepsilon^{\mu\alpha\beta\tau}k_{3\tau}(R^\nu\mathcal{J}_2)^{(\cdots)}(m, \alpha, k) +$$

$$+\varepsilon^{\mu\alpha\sigma\tau}k_{2\sigma}k_{3\tau}(R^\nu\mathcal{J}_3)^\beta(m, \alpha, k) + \varepsilon^{\mu\beta\sigma\tau}k_{2\sigma}k_{3\tau}(R^\nu\mathcal{J}_4)^\alpha(m, \alpha, k)\}, \qquad (34)$$

$$(R^\nu\mathcal{J}_1)^{(\cdots)}(m, \alpha, k) \equiv -\left[\pm m_2 m_3\frac{\alpha_2+\alpha_3}{\Delta} + (m_3 \mp m_2)\,m_1\frac{\alpha_1}{\Delta}\right]M_\varepsilon^\omega(R^\nu F)_{10} +$$

$$+\left[(Y_2\cdot Y_3)\frac{\alpha_2+\alpha_3}{\Delta} + ((Y_3 - Y_2)\cdot Y_1)\frac{\alpha_1}{\Delta}\right]M_\varepsilon^\omega(R^\nu F)_{30} - \qquad (35)$$

$$-\left(1 - 3\frac{\alpha_1}{\Delta}\right)\Delta^{-1}M_\varepsilon^{\omega+1}(R^\nu F)_{31} \simeq -\left[\pm m_2 m_3\frac{\alpha_2+\alpha_3}{\Delta} +\right.$$

$$\left.+(m_3 \mp m_2)\,m_1\frac{\alpha_1}{\Delta} + (m_1^2 - i\varepsilon_1)\frac{\alpha_1}{\Delta}\right]M_\varepsilon^\omega(R^\nu F)_{10} +$$

$$+\left[k_2^2\frac{\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{\Delta^2} - k_3^2\frac{\alpha_3(\alpha_2+\alpha_1)}{\Delta^2}\right]M_\varepsilon^\omega(R^\nu F)_{30}; \qquad (35a)$$

$$(R^\nu\mathcal{J}_2)^{(\cdots)}(m, \alpha, k) \equiv \left[\pm m_2 m_1\frac{\alpha_2+\alpha_1}{\Delta} + (m_1 \mp m_2)\,m_3\frac{\alpha_3}{\Delta}\right]M_\varepsilon^\omega(R^\nu F)_{10} -$$

$$-\left[(Y_2\cdot Y_1)\frac{\alpha_2+\alpha_1}{\Delta} + ((Y_1 - Y_2)\cdot Y_3)\frac{\alpha_3}{\Delta}\right]M_\varepsilon^\omega(R^\nu F)_{30} + \qquad (36)$$

$$+\left(1 - 3\frac{\alpha_3}{\Delta}\right)\Delta^{-1}M_\varepsilon^{\omega+1}(R^\nu F)_{31} \simeq \left[\pm m_2 m_1\frac{\alpha_2+\alpha_1}{\Delta} +\right.$$

$$\left.+(m_1 \mp m_2)\,m_3\frac{\alpha_3}{\Delta} + (m_3^2 - i\varepsilon_3)\frac{\alpha_3}{\Delta}\right]M_\varepsilon^\omega(R^\nu F)_{10} +$$

$$+\left[k_2^2\frac{\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{\Delta^2} - k_3^2\frac{\alpha_3(\alpha_2+\alpha_1)}{\Delta^2}\right]M_\varepsilon^\omega(R^\nu F)_{30}; \qquad (36a)$$

$$(R^\nu\mathcal{J}_3)^\beta(m, \alpha, k) \equiv -2\left[k_2^\beta\frac{\alpha_1\alpha_3}{\Delta^2} + k_3^\beta\frac{\alpha_3(\alpha_2+\alpha_1)}{\Delta^2}\right]M_\varepsilon^\omega(R^\nu F)_{30},$$

$$(R^\nu\mathcal{J}_4)^\alpha(m, \alpha, k) \equiv 2\left[k_2^\alpha\frac{\alpha_1(\alpha_2+\alpha_3)}{\Delta^2} + k_3^\alpha\frac{\alpha_1\alpha_3}{\Delta^2}\right]M_\varepsilon^\omega(R^\nu F)_{30}, \qquad (37)$$

$$C^{(AAA)}(g) = \varepsilon(g)\,C^{(AVV)}(g),\ \ C^{(AVV)}(g) = \varepsilon(g)\frac{\pi^2 i^p}{(2\pi)^4}\operatorname{tr}(I_g). \qquad (38)$$

В (34)—(36а) і далі $(\cdots)$ позначає (AVV) або (AAA). Знак $\simeq$ в (35), (35а), (36), (36а) і далі означає еквівалентність в тому розумінні, що інтеграли, наприклад, від (35) і (35а) співпадають. Обгрунтування цього буде дано в ч. 6 цього пункту. В виразах (35), (35а), (36), (36а) і далі верхній знак ($\pm$ або $\mp$) відповідає AVV-амплітуді, а нижній — AAA-амплітуді. Видно, що взаємозв'язок (33) справджується і для регулярних значень.

3. Аналогічно обчислюючи за допомогою формул (18)—(21), а також (34)—(38) і (15), (17), знаходимо

$$\begin{bmatrix} k_{1\mu}\,(R^{\nu}\mathcal{J})^{\mu\alpha\beta(\cdots)}\,(m_1, m_2, m_3, k) \\ k_{2\alpha}\,(R^{\nu}\mathcal{J})^{\mu\alpha\beta(\cdots)}(m_1, m_2, m_3, k) \\ k_{3\beta}\,(R^{\nu}\mathcal{J})^{\mu\alpha\beta(\cdots)}\,(m_1, m_2, m_3, k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R^{\nu+1}\mathcal{J}_{\mu})^{\mu\alpha\beta(\ddot{\cdot}\cdot\cdot)}\,(m_1, m_2, m_3, k) \\ (R^{\nu+1}\mathcal{J}_{\alpha})^{\mu\alpha\beta(\cdot\ddot{\cdot}\cdot)}\,(m_1, m_2, m_3, k \\ (R^{\nu+1}\mathcal{J}_{\beta})^{\mu\alpha\beta(\cdot\cdot\ddot{\cdot})}\,(m_1, m_2, m_3, k) \end{bmatrix} =$$

$$= (2\pi)^4\delta(k)\,C^{(\cdots)}(g)\int\limits_{\Sigma^2}\frac{d\mu(\alpha)}{\Delta^2}\begin{bmatrix} \varepsilon^{\alpha\beta\sigma\tau}k_{2\sigma}k_{3\tau}\,(R^{\nu+1}\mathcal{D})^{(\ddot{\cdot}\cdot\cdot)}\,(m, \alpha, k) \\ \varepsilon^{\mu\beta\sigma\tau}k_{2\sigma}k_{3\tau}\,(R^{\nu+1}\mathcal{D})^{(\cdot\ddot{\cdot}\cdot)}\,(m, \alpha, k) \\ \varepsilon^{\mu\alpha\sigma\tau}k_{2\sigma}k_{3\tau}\,(R^{\nu+1}\mathcal{D})^{(\cdot\cdot\ddot{\cdot})}\,(m, \alpha, k) \end{bmatrix}, \quad (39)$$

$$(R^{\nu+1}\mathcal{D})^{(\ddot{\cdot}\cdot\cdot)}\,(m, \alpha, k) \equiv -\left[m_1 m_3\frac{\alpha_1+\alpha_3}{\Delta} \pm (m_1+m_3)\,m_2\frac{\alpha_2}{\Delta}\right]M_{\varepsilon}^{\omega}\,(R^{\nu+1}F)_{20} - \quad (40)$$

$$-\left(\frac{\alpha_1}{\Delta}Y_1^2 + \frac{\alpha_3}{\Delta}Y_3^2\right)M_{\varepsilon}^{\omega}\,(R^{\nu+1}F)_{40} + \left(1 - 3\frac{\alpha_2}{\Delta}\right)\Delta^{-1}M_{\varepsilon}^{\omega+1}(R^{\nu+1}F)_{41} \simeq$$

$$\simeq \left[(m_3+m_1)\,\mathcal{P}_{20}^{(\ddot{\cdot}\cdot\cdot)}\,(m, \alpha) + i\left(\varepsilon_1\frac{\alpha_1}{\Delta} + \varepsilon_3\frac{\alpha_3}{\Delta}\right)\right]M_{\varepsilon}^{\omega}\,(R^{\nu+1}F)_{20}, \quad (40\,\text{a})$$

$$(R^{\nu+1}\mathcal{D})^{(\cdot\ddot{\cdot}\cdot)}\,(m, \alpha, k) \equiv -\left[\pm m_2 m_1\frac{\alpha_2+\alpha_1}{\Delta} + (m_1 \mp m_2)\,m_3\frac{\alpha_3}{\Delta}\right]\times$$

$$\times M_{\varepsilon}^{\omega}\,(R^{\nu+1}F)_{20} + \left(\frac{\alpha_1}{\Delta}Y_1^2 + \frac{\alpha_2}{\Delta}Y_2^2\right)M_{\varepsilon}^{\omega}\,(R^{\nu+1}F)_{40} - \quad (41)$$

$$-\left(1 - 3\frac{\alpha_3}{\Delta}\right)\Delta^{-1}M_{\varepsilon}^{\omega+1}\,(R^{\nu+1}F)_{41} \simeq \left[(m_1 \mp m_2)\,\mathcal{P}_{20}^{(\cdot\ddot{\cdot}\cdot)}\,(m, \alpha) -\right.$$

$$\left. - i\left(\varepsilon_1\frac{\alpha_1}{\Delta} + \varepsilon_2\frac{\alpha_2}{\Delta}\right)\right]M_{\varepsilon}^{\omega}\,(R^{\nu+1}F)_{20}, \quad (41\text{a})$$

$$(R^{\nu+1}\mathcal{D})^{(\cdot\cdot\ddot{\cdot})}\,(m, \alpha, k) \equiv \left[\pm m_2 m_3\frac{\alpha_2+\alpha_3}{\Delta} + (m_3 \mp m_2)\,m_1\frac{\alpha_1}{\Delta}\right]M_{\varepsilon}^{\omega}\,(R^{\nu+1}F)_{20} -$$

$$-\left(\frac{\alpha_2}{\Delta}Y_2^2 + \frac{\alpha_3}{\Delta}Y_3^2\right)M_{\varepsilon}^{\omega}\,(R^{\nu+1}F)_{40} + \left(1 - 3\frac{\alpha_1}{\Delta}\right)\Delta^{-1}M_{\varepsilon}^{\omega+1}\,(R^{\nu+1}F)_{41} \simeq \quad (42)$$

$$\simeq \left[(m_2 \mp m_3)\,\mathcal{P}_{20}^{(\cdot\cdot\ddot{\cdot})}\,(m, \alpha) + i\left(\varepsilon_2\frac{\alpha_2}{\Delta} + \varepsilon_3\frac{\alpha_3}{\Delta}\right)\right]M_{\varepsilon}^{\omega}\,(R^{\nu+1}F)_{20}. \quad (42\text{a})$$

В формулах (39) — (42а) і далі використані такі позначення: $(\ddot{\cdot}\cdot\cdot) = (\dot{A}VV)$ або $(\dot{A}AA)$, $(\cdot\ddot{\cdot}\cdot) = (A\dot{V}V)$ або $(A\dot{A}A)$, $(\cdot\cdot\ddot{\cdot}) = (AV\dot{V})$ або $(AA\dot{A})$. Величини $\mathcal{P}_{20}^{(\cdots)}(m, \alpha)$ визначаються формулами (45).

4. Регулярні значення величин $(R^{\nu+1}\mathcal{J})^{\nu_1\nu_2\nu_3}\,(m_1, m_2, m_3, k)$, що стоять в третіх рядках формул (24) — (26), такі:

$$\begin{bmatrix} (R^{\nu+1}\mathcal{J})^{\alpha\beta(\ddot{\cdot}\cdot\cdot)}\,(m_1, m_2, m_3, k) \\ (R^{\nu+1}\mathcal{J})^{\mu\beta(\cdot\ddot{\cdot}\cdot)}\,(m_1, m_2, m_3, k) \\ (R^{\nu+1}\mathcal{J})^{\mu\alpha(\cdot\cdot\ddot{\cdot})}\,(m_1, m_2, m_3, k) \end{bmatrix} = (2\pi)^4\,\delta(k)\,C^{(\cdots)}\,(g)\int\limits_{\Sigma^2}\frac{d\mu(\alpha)}{\Delta^2}\times$$

$$\times\begin{bmatrix} \varepsilon^{\alpha\beta\sigma\tau}k_{2\sigma}k_{3\tau}\,(R^{\nu+1}\mathcal{P})^{(\ddot{\cdot}\cdot\cdot)}\,(m, \alpha, k) \\ \varepsilon^{\mu\beta\sigma\tau}k_{2\sigma}k_{3\tau}\,(R^{\nu+1}\mathcal{P})^{(\cdot\ddot{\cdot}\cdot)}\,(m, \alpha, k) \\ \varepsilon^{\mu\alpha\sigma\tau}k_{2\sigma}k_{3\tau}\,(R^{\nu+1}\mathcal{P})^{(\cdot\cdot\ddot{\cdot})}(m, \alpha, k) \end{bmatrix}, \quad (43)$$

$$(R^{\nu+1}\mathcal{P})^{(\cdots)}(m,\alpha,k)=\mathcal{P}_{20}^{(\cdots)}(m,\alpha)\,M_\varepsilon^\omega\,(R^{\nu+1}F)_{20}, \tag{44}$$

$$\mathcal{P}_{20}^{(\dot{\cdot}\cdot\cdot)}(m,\alpha)=-(m_1\alpha_1\pm m_2\alpha_2+m_3\alpha_3)\,\Delta^{-1},$$

$$\mathcal{P}_{20}^{(\cdot\dot{\cdot}\cdot)}(m,\alpha)=-(-m_1\alpha_1\pm m_2\alpha_2+m_3\alpha_3)\,\Delta^{-1}, \tag{45}$$

$$\mathcal{P}_{20}^{(\cdot\cdot\dot{\cdot})}(m,\alpha)=-(\pm m_1\alpha_1+m_2\alpha_2\mp m_3\alpha_3)\,\Delta^{-1}.$$

5. Лінійні комбінації величин $(R^{\nu+1}\Pi_l)^{\nu_1\nu_2\nu_3}(m_1, m_2, m_3, k)$, що знаходяться в тотожностях (24) — (26), приводять до таких виразів:

$$\begin{bmatrix} -(R^{\nu+1}\Pi_1)^{\alpha\beta(\dot{\cdot}\cdot\cdot)}(m_1,m_2,m_3,k)-(R^{\nu+1}\Pi_3)^{\alpha\beta(\dot{\cdot}\cdot\cdot)}(m_1,m_2,m_3,k) \\ \pm(R^{\nu+1}\Pi_2)^{\mu\beta(\cdot\dot{\cdot}\cdot)}(m_1,m_2,m_3,k)-(R^{\nu+1}\Pi_1)^{\mu\beta(\cdot\dot{\cdot}\cdot)}(m_1,m_2,m_3,k) \\ \pm(R^{\nu+1}\Pi_3)^{\mu\alpha(\cdot\cdot\dot{\cdot})}(m_1,m_2,m_3,k)-(R^{\nu+1}\Pi_2)^{\mu\alpha(\cdot\cdot\dot{\cdot})}(m_1,,m_2,m_3,k) \end{bmatrix}=$$

$$=(2\pi)^4\,\delta(k)\,C^{(\cdots)}(g)\int\limits_{\Sigma^2}\frac{d\mu(\alpha)}{\Delta^2}\begin{bmatrix}\varepsilon^{\alpha\beta\sigma\tau}k_{2\sigma}k_{3\tau}\,(R^{\nu+1}\Pi)^{(\dot{\cdot}\cdot\cdot)}(m,\alpha,k)\\ \varepsilon^{\mu\beta\sigma\tau}k_{2\sigma}k_{3\tau}\,(R^{\nu+1}\Pi)^{(\cdot\dot{\cdot}\cdot)}(m,\alpha,k)\\ \varepsilon^{\mu\alpha\sigma\tau}k_{2\sigma}k_{3\tau}\,(R^{\nu+1}\Pi)^{(\cdot\cdot\dot{\cdot})}(m,\alpha,k)\end{bmatrix}, \tag{46}$$

$$(R^{\nu+1}\Pi)^{(\dot{\cdot}\cdot\cdot)}(m,\alpha,k)=(R^{\nu+1}T_1)(m,\alpha,k)+(R^{\nu+1}T_3)\,m,\alpha,k)\simeq \tag{47}$$

$$\simeq i\left(\varepsilon_1\frac{\alpha_1}{\Delta}+\varepsilon_3\frac{\alpha_3}{\Delta}\right)M_\varepsilon^\omega\,(R^{\nu+1}F)_{20}, \tag{47a}$$

$$(R^{\nu+1}\Pi)^{(\cdot\dot{\cdot}\cdot)}(m,\alpha,k)=-(R^{\nu+1}T_2)(m,\alpha,k)-(R^{\nu+1}T_1)(m,\alpha,k)\simeq \tag{48}$$

$$\simeq -i\left(\varepsilon_2\frac{\alpha_2}{\Delta}+\varepsilon_1\frac{\alpha_1}{\Delta}\right)M_\varepsilon^\omega\,(R^{\nu+1}F)_{20}, \tag{48a}$$

$$(R^{\nu+1}\Pi)^{(\cdot\cdot\dot{\cdot})}(m,\alpha,k)=R^{\nu+1}T_3)(m,\alpha,k)+(R^{\nu+1}T_2)(m,\alpha,k)\simeq \tag{49}$$

$$\simeq i\left(\varepsilon_3\frac{\alpha_3}{\Delta}+\varepsilon_2\frac{\alpha_2}{\Delta}\right)M_\varepsilon^\omega\,(R^{\nu+1}F)_{20}, \tag{49a}$$

$$(R^{\nu+1}T_l)(m,\alpha,k)\equiv\frac{\alpha_l}{\Delta}\,m_l^2M_\varepsilon^\omega\,(R^{\nu+1}E)_{20}-\frac{\alpha_l}{\Delta}\,Y_l^2M_\varepsilon^\omega\,(R^{\nu+1}F)_{40}-$$

$$-\left(1-3\frac{\alpha_l}{\Delta}\right)\Delta^{-1}M_\varepsilon^{\omega+1}\,(R^{\nu+1}F)_{41},\qquad l=1,2,3. \tag{50}$$

Співставлення формул (39)—(50) показує, що тотожності Уорда (24)—(26) справджуються. Детальний аналіз аномальних вкладів (квантових поправок) проведено в роботах [20, 21].

6. Виходячи з тотожності редукції

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}(d^np)\,\delta(p,k)\,\frac{\operatorname{tr}[\gamma_1(m_1^2-p_1^2-i\varepsilon_1)\,\gamma_2(m_2+\hat{p}_2)\,\gamma_3(m_3+\hat{p}_3)]}{(m_1^2-p_1^2-i\varepsilon_1)(m_2^2-p_2^2-i\varepsilon_2)(m_3^2-p_3^2-i\varepsilon_3)}=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty}(d^np)\,\delta(p,k)\,\frac{\operatorname{tr}[\gamma_1\gamma_2(m_2+\hat{p}_2)\,\gamma_3(m_3+\hat{p}_3)]}{(m_2^2-p_2^2-i\varepsilon_2)(m_3^2-p_3^2-i\varepsilon_3)}, \tag{51}$$

(і аналогічних тотожностей, але з поліномами $(m_2^2-p_2^2-i\varepsilon_2)$ та $(m_3^2-$ $-p_3^2-i\varepsilon_3)$ в чисельнику подібно до формул (8)), приходимо до висновку, що для $n = 4$ та AVV- і AAA-амплітуд маємо важливі рівності

$$(R^{\nu+1}T_{l\varepsilon})(m_1, m_2, m_3, k) = \int\limits_{\Sigma^2} \frac{d\mu(\alpha)}{\Delta^2} (R^{\nu+1}T_{l\varepsilon})(m, \alpha, k) = 0,$$

$$l = 1, 2, 3, \tag{52}$$

$$(R^{\nu+1}T_{l\varepsilon})(m, \alpha, k) \equiv \frac{\alpha_l}{\Delta}(m_l^2 - i\varepsilon_l) M_\varepsilon^\omega (R^{\nu+1}F)_{20} - \frac{\alpha_l}{\Delta} Y_l^2 M_\varepsilon^\omega (R^{\nu+1}F)_{40} -$$

$$-\left(1 - 3\frac{\alpha_l}{\Delta}\right)\Delta^{-1} M_\varepsilon^{\omega+1} (R^{\nu+1}F)_{41}. \tag{53}$$

Тому функції типу (52), але з підінтегральними виразами (50), можна записати у вигляді

$$(R^{\nu+1}T_l)(m_1, m_2, m_3, k) \equiv \int\limits_{\Sigma^2} \frac{d\mu(\alpha)}{\Delta^2} (R^{\nu+1}T_l)(m, \alpha, k) =$$

$$= \int\limits_{\Sigma^2} \frac{d\mu(\alpha)}{\Delta^2} i\varepsilon_l \frac{\alpha_l}{\Delta} M_\varepsilon^\omega (R^{\nu+1}F)_{20}, \qquad l = 1, 2, 3. \tag{54}$$

Формули (54), (50) лежать в основі еквівалентних представлень (53а), (36а), (40а), (47а)—(49а).

Враховуючи явний вигляд величини $(R^{\nu+1}F)_{20}$, маємо

$$(R^{\nu+1}T_l)(m_1, m_2, m_3, k) =$$

$$= \begin{cases} 0, & (\varepsilon_l \to 0,\ m_l \neq 0,\ \text{або}\ m_l = m \to 0), \\ 1/6, & (m_l \to 0,\ \varepsilon_l = \varepsilon \to 0), \qquad l = 1, 2, 3. \end{cases} \tag{55}$$

Звідси випливає можливість досить простого знаходження (ε, m)- і (m, ε)-кіральних границь раніше знайдених величин. Найважливіші результати зведені в табл. 2. Видно, що тотожності Уорда (24)—(26) виконуються і в режимі обох границь, але граничні значення окремих величин, що входять до (24)—(26), залежать від режиму границі. Також видно, що ці дві границі співпадають для AAA-амплітуди і відрізняються для AVV-амплітуди, що пов'язано з типом дискретної симетрії цих амплітуд у різних режимах

Т а б л 2. Кіральні границі величин, що пов'язані з AVV та AAA-амплітудами, $n = 4$

	$(\cdots)$			$(\cdots)$		
	$\dot{A}VV$	$A\dot{V}V$	$AV\dot{V}$	$\dot{A}AA$	$A\dot{A}A$	$AA\dot{A}$
$(\varepsilon_l \to 0,\ m_l = m \to 0)$ — lim:						
$(R^{\nu+1}\mathscr{D})^{(\cdots)}(m_1, m_2, m_3, k)$	1	0	0	1/3	—1/3	1/3
$(R^{\nu+1}\Pi)^{(\cdots)}(m_1, m_2, m_3, k)$	0	0	0	0	0	0
$\begin{bmatrix}(m_3 + m_1)\\(m_1 \mp m_2)\\(m_2 \mp m_3)\end{bmatrix} (R^{\nu+1}\mathscr{P})^{(\cdots)}(m_1, m_2, m_3, k)$	1	0	0	1/3	—1/3	1/3
$(m_l \to 0,\ \varepsilon_l = \varepsilon \to 0)$ — lim:						
$(R^{\nu+1}\mathscr{D})^{(\cdots)}(m_1, m_2, m_3, k)$	1/3	— 1/3	1/3	1/3	— 1/3	1/3
$(R^{\nu+1}\Pi)^{(\cdots)}(m_1, m_2, m_3, k)$	1/3	— 1/3	1/3	1/3	—1/3	1/3
$\begin{bmatrix}(m_3 + m_1)\\(m_1 \mp m_2)\\(m_2 \mp m_3)\end{bmatrix} (R^{\nu+1}\mathscr{P})^{(\cdots)}(m_1, m_2, m_3, k)$	0	0	0	0	0	0

кіральної границі. Так, дискретна симетрія AAA-амплітуди в обох режимах не змінюється на відміну від дискретної симетрії AVV-амплітуди, яка в режимі (m, ε)-границі підтягується до дискретної симетрії AAA-амплітуди в повній згоді з (33). Усе це суттєво уточнює відомі до цього часу механізми і способи порушення кіральної симетрії в квантовій теорії поля.

1. *Rosenberg L.* Electromagnetic interactions of neutrinos // Phys. Rev.— 1963.— **129**, N 6.— P. 2786—2788.
2. *Adler S. L.* Axial-vector vertex in spinor electrodynamics // Ibid.— 1969.— **177**, N 5.— P. 2426—2438.
3. *Bell J. S., Jackiw R.* A PCAC puzzle: $\pi_0 \to 2\gamma$ in the σ-model // Nuovo Cim.— 1969.— **60A**, N 1.— P. 47—61.
4. *Frampton P. H.* Conditions for renormalizability of quantum flavor dynamics // Phys. Rev.— 1979.— **D20**, N 12.— P. 3372—3377.
5. *Gottlieb S., Donohue J. T.* The axial-vector current and dimensional regularization // Ibid.— P. 3378—3389.
6. *Морозов А. Ю.* Аномалии в калибровочных теориях // Успехи физ. наук. — 1986. — **150**, вып. 3.— С. 337—416.
7. *Elias V., McKeon G., Mann R. B.* VVA-triangle graph ambiquities in four and N dimensions // Nucl. Phys.— 1983. — **B229**, N 3.— P. 487—498.
8. *Hořejši J., Novotny J., Zavialov O. I.* Dimensional regularization of the VVA triangle graph as a continuous superposition of Pauli — Villars regularizations // Phys. Lett. — 1988.— **B213**, N 2.— P. 173—176.
9. *Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.* О вычитательном формализме при умножении причинных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1956.— **20**, № 5.— С. 585—625.
10. *Парасюк О. С.* Умножение причинных функций при несовпадающих аргументах // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1956.— **20**, № 7.— С. 843—852.
11. *Парасюк О. С.* Обобщенные функции в теории поля // Труды 2-го всесоюзного математического съезда.— М. : Физматгиз.— 1956.— С. 558—566.
12. *Bogolyubov N. N., Parasyuk O. S.* Uber die Multiplikation der Kauzalfunctionen in der Quantentheorie der Felder // Acta Math.— 1957.— **97**, N 3—4.— P. 227—266.
13. *Парасюк О. С.* К теории R-операции Боголюбова // Укр. мат. журн.— 1960.— **12**, № 3.— С. 287—307.
14. *Hepp K.* Proof of the Bogolyubov — Parasyuk theorem on the renormalization // Comm. Math. Phys.— 1966.— **2**, N 4.— P. 301—326.
15. *Кучерявый В. И.* Фейнмановская амплитуда и G-функция Мейера. Единое представление для расходящихся и сходящихся графов // Теорет. мат. физика.— 1974. — **20**, № 1.— С. 29—45.
16. *Kucheryavy V. I.* On some algorithmic features of the subtraction procedure in quantum field theory // Nucl. Phys.— 1977.— **B127**, N 1.— P. 66—86.
17. *Кучерявый В. И.* Простые параметрические интегральные представления регулярных (конечных) и сингулярных частей расходящихся фейнмановских амплитуд. I. Формулы общего характера // Теорет. мат. физика.— 1982.— **51**, № 3.— С. 355—365.
18. *Кучерявий В. І.* Про одну ефективну реалізацію канонічної віднімальної процедури квантової теорії поля на прикладі власних енергій в n-вимірних моделях нейтрального скалярного поля з $\mathcal{L}_{\mathrm{int}} = g_0\varphi^N(x)$ // Допов. АН УРСР. Сер. А.— 1983.— № 5.— С. 62—65.
19. *Каруби М.* K-теория. Введение.— М. : Мир, 1981.— 360 с.
20. *Кучерявый В. И.* Массовые эффекты в трехточечных хронологических корреляторах токов n-мерных многофермионных моделей // Ядер. физика.— 1991.— **53**, вып. 4.— С. 1150—1163.
21. *Kucheryavy V. I.* Nontrivial quantum corrections to Ward identities for nondegenerate two-flavour fermion systems. Kiev, 1991.— (Preprint / Acad. Sci. Ukr. SSR. Inst. for theor. Phys.; ITP-91-15E 42).

Получено 10.06.91