

Построение решений линейных операторных уравнений в банаховых пространствах

Получены формулы для построения обобщенного обратного оператора, разрешающего линейную нетерову краевую задачу в банаховом пространстве. Одна из них основана на построении обобщенного оператора Грина исходной полуоднородной краевой задачи, вторая — на применении некоторых результатов теории линейных операторов в банаховых пространствах.

Одержані формули для побудови узагальненого оберненого оператора, який розв'язує лінійну нетерову крайову задачу в банаховому просторі. Перша з них базується на побудові узагальненого оператора Грина вихідної напіводнорідної крайової задачі, друга — на використанні деяких результатів теорії лінійних операторів у банахових просторах.

Известно [1, 2], что краевые задачи для систем функционально-дифференциальных уравнений

$$\Lambda x = \begin{bmatrix} Lx \\ lx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \alpha \end{bmatrix}$$

в случае, когда размерность n функционально-дифференциальной системы $Lx = f$ не совпадает с размерностью m векторного функционала l , являются нетеровыми. Для таких задач конструкция Шмидта [3], позволяющая строить обобщенный обратный оператор в случае фредгольмовой ($m = n$) краевой задачи, неприменима. Предложено два способа построения обобщенного обратного оператора Λ^{-1} к нетерому оператору Λ в банаховом пространстве. Первый из них предполагает использование свойств оператора L и основан на построении обобщенного оператора Грина [2, 4] исходной полуоднородной краевой задачи, а второй — на применении некоторых результатов теории операторов в банаховых пространствах, позволивших получить аналог конструкции Шмидта для нетеровых операторов.

1. В обозначениях [1, 5] рассмотрим краевую задачу

$$Lx = f, \quad (1)$$

$$lx = \alpha, \quad (2)$$

где $L: D_p^n \rightarrow L_p^n$ — линейный ограниченный оператор, для которого задача Коши $Lx = f$, $x(a) = c$ однозначно разрешима при любых $f \in L_p^n$ и $c \in R^n$ и ее решение имеет вид

$$x(t) = X(t)c + \int_a^b C(t, \tau) f(\tau) d\tau; \quad (3)$$

$X(t)$ — $(n \times n)$ -фундаментальная матрица оператора $L: LX = 0$, $X(a) = E_n$, $C(t, \tau)$ — $(n \times n)$ -матрица Коши, которую всюду в дальнейшем будем считать определенной в квадрате $[a, b] \times [a, b]$, полагая $C(t, \tau) \equiv 0$, при $a \leq t < \tau \leq b$; $l: D_p^n \rightarrow R^m$ — линейный ограниченный вектор-функционал; L_p^n — пространство n -мерных суммируемых со степенью p , $1 < p < +\infty$, на конечном промежутке $[a, b]$ вектор-функций; D_p^n — пространство n -мерных абсолютно непрерывных на $[a, b]$ вектор-функций, таких, что $x \in L_p^n$.

К таким задачам принадлежат, например, краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений [2], уравнений с запаздыванием [6], задачи с импульсным воздействием [7].

Пусть $Q = LX - (m \times n)$ -постоянная матрица; $P_Q - (n \times n)$ - $(P_Q^* - (m \times m))$ -ортопроектор, проектирующий $R^n (R^m)$ на нуль-пространство $N(Q)$ ($N(Q^*)$) матрицы $Q(Q^*)$; $P_{Q_r} - (n \times r)$ -матрица ($r = n - \text{rang } Q$), составленная из r линейно независимых столбцов матрицы P_Q ; $P_{Q_d} - (d \times m)$ -матрица ($d = m - \text{rang } Q$), составленная из d линейно независимых строк матрицы P_Q^* ; Q^+ — единственная псевдообратная по Муру—Пенроузу $(n \times m)$ -матрица, для построения которой существуют хорошо разработанные алгоритмы [8, 9].

Теорема 1. Пусть $\text{rang } Q = n_1 < n$, тогда краевая задача (1), (2) разрешима для тех и только тех $f \in L_p^n$ и $\alpha \in R^m$, которые удовлетворяют условию

$$P_{Q_d}^* \left\{ \alpha - l \int_a^b C(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau \right\} = 0, \quad (4)$$

и при этом имеет $r = n - n_1$ -параметрическое семейство решений

$$x(t) = X_r(t) c_r + X(t) Q^+ \alpha + (Gf)(t), \quad (5)$$

где $X_r(t) = X(t) P_{Q_r} - (n \times r)$ -фундаментальная матрица краевой задачи (1), (2); G — обобщенный оператор Грина полудонодной краевой задачи (1), (2), определяемый следующим образом:

$$(Gf)(t) = \int_a^b C(t, \tau) f(\tau) d\tau - X(t) Q^+ l \int_a^b C(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau. \quad (6)$$

Доказательство. Решение (3) уравнения (1) будет решением краевой задачи (1), (2) тогда и только тогда, когда вектор $c \in R^n$ удовлетворяет уравнению

$$Qc = \alpha - l \int_a^b C(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Для разрешимости алгебраической системы (7), а следовательно, и краевой задачи (1), (2), необходимо и достаточно [8], чтобы свободный член принадлежал ортогональному дополнению подпространства $N(Q^*)$, т. е. чтобы выполнялось условие (4). В этом случае алгебраическая система (7) имеет решение

$$c = P_{Q_r} c_r + Q^+ \left(\alpha - l \int_a^b C(\cdot, \tau) f(\tau) d\tau \right). \quad (8)$$

Подставив (8) в (3), получим общее решение (5) краевой задачи (1), (2).

Построенный обобщенный оператор Грина (6) разрешает полудонодную краевую задачу

$$\Delta x = \begin{bmatrix} Lx \\ lx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$$

и, как легко проверить непосредственным вычислением, удовлетворяет следующим свойствам:

$$\Delta G^* = \text{col} \left[I^*, P_{Q_d}^* l \int_a^b C(\cdot, \tau) d\tau \right], \quad (9)$$

$$\lim_{t \rightarrow \tau+0} G^* = \lim_{t \rightarrow \tau-0} G^* = \int_a^b I^* d\tau, \quad (10)$$

$$G^*|_{\tau=a} = \int_a^b X P_{Q_d}^* d\tau. \quad (11)$$

Используя свойства (9)—(11) обобщенного оператора Грина краевой задачи (1), (2), можно показать, что оператор

$$\Lambda^{-*} = [G^*, XQ^{+*}] \quad (12)$$

является обобщенным обратным [2] к нетерову оператору Λ и удовлетворяет его определяющим [10, 11] свойствам:

$$\Lambda^{-}\Lambda^{-} = \Lambda^{-}; \quad \Lambda\Lambda^{-}\Lambda = \Lambda. \quad (13)$$

Как показано в [10], второе свойство является следствием первого. Проверим первое свойство. Так как $LX = 0$, $lX = Q$, то, используя (9)—(11), имеем

$$\Lambda\Lambda^{-*} = \begin{bmatrix} L \\ l \end{bmatrix} [G^*, XQ^{+*}] = \begin{bmatrix} LG^* & LXQ^{+*} \\ lG^* & lXQ^{+*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n^* & 0 \\ P_{Q^*} l \int_a^b C(\cdot, \tau) * d\tau & QQ^{+*} \end{bmatrix}.$$

Так как $Q^+P_{Q^*} = (Q^*Q + P_Q)^{-1}Q^*P_{Q^*} = 0$, $Q^+QQ^+ = Q^+$ [9], то

$$\begin{aligned} \Lambda^{-}\Lambda\Lambda^{-*} &= [G, XQ^+] \begin{bmatrix} I_n^* & 0 \\ P_{Q^*} l \int_a^b C(\cdot, \tau) * d\tau & QQ^{+*} \end{bmatrix} = \\ &= [GI_n^* + XQ^+P_{Q^*} l \int_a^b C(\cdot, \tau) * d\tau, XQ^+QQ^{+*}] = \Lambda^{-*}. \end{aligned}$$

Таким образом, оператор Λ^{-} является обобщенным обратным к нетерову оператору Λ . Используя вид Λ и Λ^{-} , легко проверить, что

$$P_{\Lambda^*} = I - \Lambda\Lambda^{-},$$

где $P_{\Lambda^*}: L_p^n \times R^m \rightarrow \ker \Lambda^*$ — проектор, проектирующий пространство $L_p^n \times R^m$ на ядро оператора Λ^* . Действительно, так как $I_m - QQ^+ = P_{Q^*}$ [9], то

$$\begin{aligned} P_{\Lambda^*} &= \begin{bmatrix} I_n^* & 0 \\ 0 & I_m^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} I_n^* & 0 \\ P_{Q^*} l \int_a^b C(\cdot, \tau) * d\tau & QQ^{+*} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -P_{Q^*} l \int_a^b C(\cdot, \tau) * d\tau & (I_m - QQ^+)^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -P_{Q^*} l \int_a^b C(\cdot, \tau) * d\tau & P_{Q^*} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Итак, действие проектора P_{Λ^*} на элемент $y = \text{col}(f, \alpha)$ пространства $L_p^n \times R^m$ эквивалентно действию оператора

$$\left[-P_{Q^*} l \int_a^b C(\cdot, \tau) * d\tau, P_{Q^*} \right],$$

который совпадает с критерием разрешимости (4) нетеровой краевой задачи (1), (2).

Теорема 2. *Операторное уравнение $\Lambda x = y$ разрешимо для тех и только тех $y \in L_p^n \times R^m$, которые удовлетворяют условию $P_{\Lambda^*} y = 0$, и при этом имеет r -параметрическое семейство решений вида*

$$x(t) = X_r(t) c_r + (\Lambda^{-} y)(t), \quad r = \dim \ker \Lambda,$$

где Λ^{-} — обобщенный обратный оператор, определяемый по формуле (12).

2. Укажем другой подход к построению обобщенного обратного опе-

ратора Λ^- к нетерову оператору $\Lambda : X \rightarrow Y$, действующему из банахова пространства X в банахово пространство Y .

Пусть Λ — линейный ограниченный нетеров ($\dim \ker \Lambda = r$, $\dim \ker \Lambda^* = d$) оператор, Λ^* — оператор, сопряженный к оператору Λ , $\Lambda^* : Y^* \rightarrow X^*$, определяемый согласно [12]:

$$(\Lambda^*g)(x) = g(\Lambda x), \quad x \in X, \quad g \in Y^*,$$

где X^* и Y^* — пространства, сопряженные к пространствам X и Y . Как и раньше, через $N(\Lambda)$, $N(\Lambda^*)$ и $R(\Lambda)$, $R(\Lambda^*)$ будем обозначать нуль-пространства (ядра) и образы операторов Λ , Λ^* соответственно.

Пусть $\{f_i\}$, $i = 1, \dots, r$, — базис $\ker \Lambda$, $\{\varphi_s\}$, $s = 1, \dots, d$, — базис $\ker \Lambda^*$. По следствию из теоремы Хана — Банаха [13] существуют линейно независимые функционалы $\gamma_j \in X^*$ такие, что

$$\gamma_j(f_i) = \delta_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, r,$$

а также линейно независимые элементы $\psi_k \in Y$ такие, что

$$\varphi_s(\psi_k) = \delta_{sk}, \quad s, k = 1, \dots, d.$$

Следуя [3, 14], определим проекторы

$$P_\Lambda : X \rightarrow N(\Lambda), \quad P_\Lambda^2 = P_\Lambda, \quad P_{\Lambda^*} : Y \rightarrow N(\Lambda^*), \quad P_{\Lambda^*}^2 = P_{\Lambda^*}$$

по формулам

$$P_\Lambda x = \sum_{i=1}^r \gamma_i(x) f_i, \quad P_{\Lambda^*} y = \sum_{s=1}^d \varphi_s(y) \psi_s.$$

Пусть $p = \min(r, d)$. Тогда, следуя [15], введем операторы

$$\bar{P}_\Lambda x = \sum_{i=1}^p \gamma_i(x) \psi_i, \quad \bar{P}_\Lambda : X \rightarrow \begin{cases} N_1(\Lambda^*) \subseteq N(\Lambda^*), & \text{если } r \leq d, \\ N(\Lambda^*), & \text{если } r \geq d; \end{cases}$$

$$\bar{P}_{\Lambda^*} y = \sum_{s=1}^p \varphi_s(y) f_s, \quad \bar{P}_{\Lambda^*} : Y \rightarrow \begin{cases} N(\Lambda), & \text{если } r \leq d, \\ N_1(\Lambda) \subseteq N(\Lambda), & \text{если } r \geq d. \end{cases}$$

Для построения обобщенного обратного оператора докажем следующие леммы.

Лемма 1. Операторы P_Λ , P_{Λ^} , \bar{P}_Λ , \bar{P}_{Λ^*} удовлетворяют следующим свойствам:*

- 1) $P_{\Lambda^*} \bar{P}_\Lambda = \bar{P}_\Lambda P_\Lambda = \bar{P}_\Lambda$,
- 2) $P_\Lambda \bar{P}_{\Lambda^*} = \bar{P}_{\Lambda^*} P_{\Lambda^*} = \bar{P}_{\Lambda^*}$,
- 3) $\bar{P}_\Lambda \bar{P}_{\Lambda^*} y = \sum_{s=1}^p \varphi_s(y) \psi_s$,
- 4) $\bar{P}_{\Lambda^*} \bar{P}_\Lambda x = \sum_{i=1}^p \gamma_i(x) f_i$.

Докажем, например, свойство 1. Имеем $P_{\Lambda^*} \bar{P}_\Lambda x = \sum_{s=1}^d \varphi_s \left(\sum_{i=1}^p \gamma_i(x) \psi_i \right) \times$
 $\times \psi_s = \sum_{s=1}^d \sum_{i=1}^p \gamma_i(x) \varphi_s(\psi_i) \psi_s = \sum_{i=1}^p \gamma_i(x) \psi_i = \bar{P}_\Lambda x$, так как $\varphi_s(\psi_i) =$
 $= \begin{cases} \delta_{si}, & \text{если } i, s = 1, \dots, p, \\ 0, & \text{если } s > p, \end{cases}$ $\bar{P}_\Lambda P_\Lambda x = \sum_{i=1}^p \gamma_i \left(\sum_{j=1}^r \gamma_j(x) f_j \right) \psi_i = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^r \gamma_j(x) \times$
 $\times \gamma_i(f_j) \psi_i = \sum_{i=1}^p \gamma_i(x) \psi_i = \bar{P}_\Lambda x$, так как $\gamma_i(f_j) = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{если } i, j = 1, \dots, p, \\ 0, & \text{если } j > p. \end{cases}$

Остальные свойства проверяются аналогично.

Лемма 2. Оператор $\bar{\Lambda} = \Lambda + \bar{P}_\Lambda$ имеет ограниченный обратный

$$\bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} = \begin{cases} (\Lambda + \bar{P}_\Lambda)_l^{-1} - \text{левый, если } r \leq d, \\ (\Lambda + \bar{P}_\Lambda)_r^{-1} - \text{правый, если } r \geq d. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $r \leq d$. Из теорем 2.1 и 5.1 из [10] следует, что для существования левого обратного оператора $\bar{\Lambda}_l^{-1}$ к оператору $\bar{\Lambda}$ необходимо и достаточно, чтобы: а) $\ker \bar{\Lambda} = \{0\}$; б) $\dim \ker \bar{\Lambda}^* < \infty$.

Покажем, что $\ker \bar{\Lambda} = \{0\}$. Предположим, что существует $x_0 \neq 0$, $x_0 \in X$ такое, что $(\Lambda + \bar{P}_\Lambda)x_0 = 0$, откуда $\Lambda x_0 = -\sum_{i=1}^p \gamma_i(x_0) \psi_i$. Применяв к обеим частям последнего равенства функционал φ_s , $s = 1, \dots, d$, получим

$$0 = \varphi_s(\Lambda x_0) = -\sum_{i=1}^p \gamma_i(x_0) \varphi_s(\psi_i) = -\gamma_s(x_0).$$

Таким образом, $\gamma_s(x_0) = 0$, $s = 1, \dots, p = r$. Так как система функционалов γ_s , $s = 1, \dots, r$, линейно независима, то в силу следствия из теоремы Хана — Банаха [13] имеем $x_0 = 0$. Полученное противоречие доказывает, что $\ker \bar{\Lambda} = \{0\}$.

Покажем, что $\dim \ker \bar{\Lambda}^* = d - r < \infty$. Для этого найдем \bar{P}_Λ^* . Пусть $x \in X$, $g \in Y$, тогда

$$g(\bar{P}_\Lambda x) = g\left(\sum_{i=1}^p \gamma_i(x) \psi_i\right) = \sum_{i=1}^p \gamma_i(x) g(\psi_i) = \sum_{i=1}^p g(\psi_i) \gamma_i(x) = \left(\sum_{i=1}^p g(\psi_i) \gamma_i\right)(x),$$

откуда следует $\bar{P}_\Lambda^* g = \sum_{i=1}^p g(\psi_i) \gamma_i$.

Найдем общий вид функционалов $g \in Y^*$, удовлетворяющих уравнению

$$(\Lambda + \bar{P}_\Lambda)^* g = 0,$$

откуда

$$\Lambda^* g = -\sum_{i=1}^p g(\psi_i) \gamma_i. \quad (14)$$

Поддействовав (14) на элемент f_k , получим

$$0 = (\Lambda^* g) f_k = g(\Lambda f_k) = -\sum_{i=1}^p g(\psi_i) \gamma_i(f_k) = -g(\psi_k), \quad k = 1, \dots, r.$$

Следовательно, (14) имеет вид $\Lambda^* g = 0$. Отсюда $g = \sum_{j=1}^d c_j \varphi_j$, где φ_j — базисные векторы ядра $N(\Lambda^*)$.

Но мы установили, что $g(\psi_k) = 0$, $k = 1, \dots, p = r$, поэтому

$$0 = g(\psi_k) = \sum_{j=1}^d c_j \varphi_j(\psi_k) = \sum_{j=1}^p c_j \varphi_j(\psi_k) + \sum_{j=p+1}^d c_j \varphi_j(\psi_k).$$

Из того, что $\varphi_j(\psi_k) = \begin{cases} \delta_{jk}, & \text{если } j, k = 1, \dots, p, \\ 0, & \text{если } j > p, \end{cases}$ следует $c_j = 0$ при $j = 1, \dots, p = r$ и c_j — произвольные числа при $j = r + 1, \dots, d$ и, значит,

$$g = \sum_{i=1}^{d-r} c_i \varphi_i \in N(\bar{\Lambda}^*), \quad \dim \ker \bar{\Lambda}^* = d - r < \infty.$$

Таким образом, мы доказали для случая $r \leq d$ существование левого обратного оператора $\bar{\Lambda}_r^{-1}$ к оператору $\bar{\Lambda}$.

Так как линейный ограниченный оператор Λ нетеров, а следовательно [15], нормально разрешим, то $R(\Lambda)$ является замкнутым в Y . Замкнутость, а следовательно, и ограниченность оператора $(\Lambda + \bar{P}_\Delta)_r^{-1}$, следует из замкнутости $R(\Lambda)$ и конечномерности $N_1(\Lambda^*) = R(\bar{P}_\Delta)$.

Для доказательства существования правого обратного оператора $\bar{\Lambda}_r^{-1}$ необходимо и достаточно [10] показать, что а) $\ker \bar{\Lambda}^* = \{0\}$; б) $\dim \ker \bar{\Lambda} < \infty$. Доказательство проводится аналогично случаю $r \leq d$. Если $r = d = p$, то $\bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} = \bar{\Lambda}^{-1}$ и сформулированная лемма переходит в известную лемму Шмидта [3, 14].

Лемма 3. Оператор $\bar{\Lambda}_{l,r}^{-1}$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$P_\Delta \bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} = \bar{P}_{\Delta^*}, \quad (15)$$

$$\Lambda \bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} = I_Y - P_{\Delta^*}, \quad (16)$$

$$\bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} P_{\Delta^*} = \bar{P}_{\Delta^*}, \quad (17)$$

$$\bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} \Lambda = I_X - P_\Delta. \quad (18)$$

Доказательство леммы будем проводить для случая $r \leq d$. Так как $\bar{P}_{\Delta^*} \Lambda = 0$ и $\bar{P}_{\Delta^*} \bar{P}_\Delta = P_{\Delta^*}$, то, подействовав справа оператором $\Lambda + \bar{P}_\Delta$ на обе части (15), получим тождество

$$P_\Delta = \bar{P}_{\Delta^*} (\Lambda + \bar{P}_\Delta) = \bar{P}_{\Delta^*} \Lambda + \bar{P}_{\Delta^*} \bar{P}_\Delta = P_{\Delta^*},$$

доказывающее свойство (15). Так как в силу леммы 1 $P_{\Delta^*} \bar{P}_\Delta = \bar{P}_{\Delta^*}$ и $P_{\Delta^*} \Lambda = 0$, то, подействовав на обе части (16) оператором $\Lambda + \bar{P}_\Delta$ справа, получим тождество, доказывающее свойство (16):

$$\Lambda = (I_Y - P_{\Delta^*}) (\Lambda + \bar{P}_\Delta) = \Lambda + \bar{P}_\Delta - P_{\Delta^*} \Lambda - P_{\Delta^*} \bar{P}_\Delta = \Lambda + \bar{P}_\Delta - \bar{P}_{\Delta^*} = \Lambda.$$

Так как $P_{\Delta^*}^2 = P_{\Delta^*}$ и $\Lambda \bar{P}_{\Delta^*} = 0$, то, подействовав слева оператором Λ на обе части (17) и использовав (16), получим тождество

$$0 = (I_Y - P_{\Delta^*}) P_{\Delta^*} = \Lambda \bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} P_{\Delta^*} = \Lambda \bar{P}_{\Delta^*} = 0,$$

которое доказывает свойство (17). Подействовав оператором $\bar{\Lambda}_r^{-1}$ справа на обе части (18) и использовав свойства (15)—(17), будем иметь тождество

$$\bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} I_Y - \bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} P_{\Delta^*} = \bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} \Lambda \bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} = (I_X - P_\Delta) \bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} = I_X \bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} - P_\Delta \bar{\Lambda}_{l,r}^{-1},$$

которое доказывает свойство (18).

Для случая $r \geq d$ доказательство леммы проводится аналогично.

Приведенные выше леммы позволяют доказать следующую теорему [16].

Теорема 3. Оператор

$$\Lambda^- = \bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} - \bar{P}_{\Delta^*} \quad (19)$$

является ограниченным обобщенным обратным к линейному ограниченному нетерову оператору Λ .

Для доказательства теоремы проверим, что Λ^- удовлетворяет свойствам (13). Для этого предварительно покажем, что

$$\Lambda \Lambda^- = I_Y - P_{\Delta^*}, \quad \Lambda^- \Lambda = I_X - P_\Delta.$$

Действительно,

$$\Lambda \Lambda^- = \Lambda (\bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} - \bar{P}_{\Delta^*}) = \Lambda \bar{\Lambda}_{l,r}^{-1} - \Lambda \bar{P}_{\Delta^*} = I_Y - P_{\Delta^*},$$

так как

$$\Lambda(\bar{P}_{\Lambda^*} y) = \Lambda\left(\sum_{s=1}^p \varphi_s(y) f_s\right) = \sum_{s=1}^p \varphi_s(y) \Lambda f_s = 0;$$

$$\Lambda^{-1}\Lambda = (\bar{\Lambda}_{L,r}^{-1} - \bar{P}_{\Lambda^*})\Lambda = \bar{\Lambda}_{L,r}^{-1}\Lambda - \bar{P}_{\Lambda^*}\Lambda = I_X - P_{\Lambda},$$

так как $\bar{P}_{\Lambda^*}(\Lambda x) = \sum_{s=1}^p \varphi_s(\Lambda x) f_s = \sum_{s=1}^p (\Lambda^* \varphi_s)(x) f_s = 0$. Проверим теперь свойства (13). Имеем

$$\Lambda\Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda(I_X - P_{\Lambda}) = \Lambda - \Lambda P_{\Lambda} = \Lambda,$$

$$\Lambda^{-1}\Lambda\Lambda^{-1} = (I_X - P_{\Lambda})\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} - P_{\Lambda}\Lambda^{-1} = \Lambda^{-1},$$

так как $P_{\Lambda}\Lambda^{-1} = P_{\Lambda}\bar{\Lambda}_{L,r}^{-1} - P_{\Lambda}\bar{P}_{\Lambda^*} = \bar{P}_{\Lambda^*} - \bar{P}_{\Lambda^*} = 0$ в силу лемм 1 и 3. Таким образом, теорема доказана.

3. Предложенный в первой части настоящей статьи способ построения обобщенного обратного оператора Λ^{-1} краевой задачи (1), (2) с помощью обобщенного оператора Грина справедлив и для случая, когда оператор L является линейным ограниченным нетеровым (без предположения о разрешимости при произвольном $f \in L_p^n$ задачи Коши для (1)).

Действительно, пусть $\dim \ker L = s$, а $P_{L^*} : L_p^n \rightarrow \ker L^*$ — проектор, конструкция которого описана в п. 2. Тогда уравнение (1) разрешимо для тех и только тех $f \in L_p^n$, для которых

$$P_{L^*} f = 0, \quad (20)$$

и имеет при этом s -параметрическое семейство решений

$$x(t) = X_s(t) c_s + (L^{-1}f)(t), \quad c_s \in R^s,$$

где $X_s(t)$ — $(n \times s)$ -матрица, столбцы которой составляют базис $\ker L$, L^{-1} — обобщенный обратный оператор (19).

Краевая задача (1), (2) с нетеровым оператором $L : D_p^n \rightarrow L_p^n$ разрешима тогда и только тогда, когда $f \in L_p^n$ и $\alpha \in R^m$ удовлетворяют условиям (20) и

$$P_{Q_1^*} \{\alpha - l(L^{-1}f)\} = 0 \quad (d_1 = m - \text{rank } Q_1)$$

и при этом имеет r_1 -параметрическое семейство решений ($r_1 = n - \text{rank } Q_1$)

$$x(t) = X_{r_1}(t) c_{r_1} + X_s(t) Q_1^+ \alpha + (G_1 f)(t),$$

где $X_{r_1}(t) = X_s(t) P_{Q_1^*} - (n \times r_1)$ -мерная фундаментальная матрица краевой задачи (1), (2), Q_1^+ — $(s \times m)$ -мерная постоянная матрица, псевдообратная к $(m \times s)$ -мерной матрице $Q_1 = lX_s$, G_1 — обобщенный оператор Грина полуднородной краевой задачи (1), (2), имеющий представление

$$(G_1 f)(t) = (L^{-1}f)(t) - X_s(t) Q_1^+ l(L^{-1}f).$$

При этом обобщенный обратный оператор Λ^{-1} , разрешающий краевую задачу (1), (2) с нетеровым оператором L , будет иметь вид

$$\Lambda^{-1} * = [G_1 *, X_s Q_1^+ *].$$

1. Максимов В. П. Нетеровость общей краевой задачи для линейного функционально-дифференциального уравнения // Дифференц. уравнения.— 1974.— 10, № 12.— С. 2288—2291.
2. Бойчук А. А. Конструктивные методы анализа краевых задач.— Киев: Наук. думка, 1990.— 96 с.
3. Треногин В. А. Функциональный анализ.— М.: Наука, 1980.— 495 с.
4. Бойчук А. А., Журавлев В. Ф. Построение решений краевых задач для дифференциальных систем с запаздыванием в критических случаях // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1990.— № 6.— С. 3—6.

5. Азбелев Н. В., Рахматулина Л. Ф. Функционально-дифференциальные уравнения // Дифференц. уравнения.— 1978.— 14, № 5.— С. 771—797.
6. Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— Киев: Выща шк., 1979.— 247 с.
7. Самойленко А. М., Перестюк Н. А. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев: Выща шк., 1987.— 287 с.
8. Кублановская В. Н. О вычислении обобщенной обратной матрицы и проекторов // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1966.— 6, № 2.— С. 326—332.
9. Турбин А. Ф. Формулы для вычисления полуобратной и псевдообратной матрицы // Там же.— 1974.— 14, № 3.— С. 772—776.
10. Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я. Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов.— Кишинев: Штиинца, 1973.— 426 с.
11. *Nashed M. Z.* Generalized inverses and applications.— New York etc.: Acad. press, 1976.— 1054 p.
12. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве.— М.: Наука, 1971.— 104 с.
13. Хатсон В., Тим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов.— М.: Мир, 1983.— 431 с.
14. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М.: Наука, 1969.— 527 с.
15. Аткинсон Ф. В. Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах // *Мат. сб.*— 1951.— 28, № 1.— С. 3—14.
16. *Vojschuk A. A., Juravliov V. F.* Generalized Inverses for Noether's operators in Banach Spaces // 5 th Conf. on Numer. Methods (Miskolc, August 20—25, 1990): Abstr.— Miskolc, 1990.— P, 11.

Получено 19.06.90