УДК 517.5

В. Ф. БАБЕНКО, д-р физ.-мат. наук,
А. А. РУДЕНКО, асп. (Днепропетр. ун-т)

Об оптимальном восстановлении сверток и скалярных произведений функций из различных классов

Исследуется задача оптимального восстановления сверток и скалярных произведений функций из различных функциональных классов по оптимальной линейной информации об этих функциях.

Досліджується задача оптимального відновлення згорток і скалярних добутків функцій із різних функціональних класів за оптимальною лінійною інформацією про ці функції.

Пусть L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, — пространства вещественных 2π-периодических функций с соответствующими нормами $\|\cdot\|_p$, $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2 \subset L_2$; $f_1 \in \mathfrak{M}_1$, $f_2 \in \mathfrak{M}_2$;

$$(f_1 * f_2)_{(x)} = \int_0^{2\pi} f_1(x-t) f_2(t)\, dt$$

— свертка функций f_1 и f_2, а

$$(f_1, f_2) = \int_0^{2\pi} f_1(t) f_2(t)\, dt$$

— их скалярное произведение. Пусть, далее, на линейных оболочках $\operatorname{lin}(\mathfrak{M}_l)$, $l = 1, 2$, множеств $\mathfrak{M}_l$ заданы наборы $T_l = (T_{l,1}, \ldots, T_{l,n_l})$ линейных непрерывных функционалов $T_{l,j} : \operatorname{lin}(\mathfrak{M}_l) \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n_l$. Векторы $T_l(f_l) = (T_{l,1}(f_l), \ldots, T_{l,n_l}(f_l))$ будем называть линейной информацией об f_1 и f_2. Произвольную вещественную функцию $\Phi = \Phi(x, y; t)$, $x \in \mathbb{R}^n$; $y \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ будем называть методом восстановления свертки $f_1 * f_2$ по заданной информации. Величину

$$R(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2; T_1, T_2; \Phi) = \sup_{\substack{f_1 \in \mathfrak{M}_1 \\ f_2 \in \mathfrak{M}_2}} \|(f_1 * f_2)_{(\cdot)} - \Phi(T_1(f_1), T_2(f_2); \cdot)\|_\infty$$

назовем погрешностью восстановления свертки $f_1 * f_2$ на классах $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ по информации $T_1(f_1)$, $T_2(f_2)$ с помощью данного метода Φ. Величину

$$R_n(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = \inf_{T_1, T_2} \inf_{\Phi} R(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2; T_1, T_2; \Phi) \tag{1}$$

назовем оптимальной погрешностью восстановления $f_1 * f_2$ на классах $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ по линейной информации об f_1 и f_2. Наборы $T_1^* = (T_{1,1}^*, \ldots, T_{1,n}^*)$, $T_2^* = (T_{2,1}^*, \ldots, T_{2,n}^*)$ и функция Φ^*, реализующие нижние грани в правой части (1) (если, конечно, они существуют) называются соответственно оптимальной информацией и оптимальным методом восстановления.

Произвольную вещественную функцию $G = G(x, y)$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$, $y \in \mathbb{R}^{n_2}$, будем называть методом восстановления скалярного произведения (f_1, f_2) по заданной информации. Величину

$$Q(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2; T_1, T_2; G) = \sup_{\substack{f_1 \in \mathfrak{M}_1 \\ f_2 \in \mathfrak{M}_2}} |(f_1, f_2) - G(T_1(f_1), T_2(f_2))|$$

назовем погрешностью восстановления скалярного произведения (f_1, f_2) на классах $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ по информации $T_1(f_1)$, $T_2(f_2)$ с помощью данного метода G, величину

$$Q_{n_1, n_2}(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = \inf_{T_1, T_2} \inf_{G} Q(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2; T_1, T_2; G) \tag{2}$$

— оптимальной погрешностью восстановления (f_1, f_2) на классах $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ по линейной информации об f_1, f_2, а наборы $T_1^* = (T_{1,1}^*, \ldots, T_{1,n_1}^*)$, $T_2^* = (T_{2,1}^*, \ldots, T_{2,n_2}^*)$ и функцию G^*, реализующие нижние грани в пр і вой части (2), — оптимальной линейной информацией и оптимальным методом восстановления.

Задача об оптимальном восстановлении скалярных произведений и более общих билинейных функционалов по линейной информации об их аргументах изучалась в работах [1, 2]. Некоторые результаты по оптимальному восстановлению сверток функций из различных классов анонсированы в [3]. В данной работе обобщены результаты работы [3] и дополнены результаты работы [2].

Если задана функция $K \in L_1$ (ядро свертки) и множество $F \subset L_1$, то через $K * F$ обозначим класс функций вида $f = a\mu + K * \psi$, где $\mu = \mu(K) = 1$, если $\int_0^{2\pi} K(t)\,dt = 0$, и $\mu = \mu(K) = 0$ — в противном случае, $a \in \mathbb{R}$, $\psi \in F$, $\psi \perp \mu$. Многие важные классы 2π-периодических функций можно рассматривать как классы типа $K * F$. Пусть F_p — единичный шар в L_p, $B_r(x) = \dfrac{1}{\pi} \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{1}{m^r} \cos(mx - \pi r/2)$, $r = 1, 2, \ldots$, — функции Бернулли. Тогда $B_r * F_p = W_p^r$ — класс 2π-периодических функций f, имеющих локально абсолютно непрерывную производную $f^{(r-1)}$ $(f^{(0)} = f)$ такую, что $\|f^{(r)}\|_p \leqslant 1$. Пусть $d_n(\mathfrak{M}\ L_p)$ обозначает n-поперечник по Колмогорову множества $\mathfrak{M}$ в пространстве L_p (см., например, [4, с. 109]).

Оценка снизу для $R(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2; T_1, T_2; \Phi)$ содержится в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть* $K_1, K_2 \in L_2$, $1 \leqslant p_l \leqslant \infty$, $1/p_l + 1/p_l' = 1$, $l = 1, 2$. *Тогда для любых* $T_1 = (T_{1,1}, \ldots, T_{1,n})$, $T_2 = (T_{2,1}, \ldots, T_{2,n})$ *и* Φ

$$R(K_1 * F_{p_1}, K_2 * F_{p_2}; T_1, T_2; \Phi) \geqslant d_n(K_1 * K_2 * F_{p_2}; L_{p_1'}).$$

Доказательство. Легко проверить, что если $f_1(t) \in K_1 * F_{p_1}$, то $f_1(-t) \in K_1(-\cdot) * F_{p_1}$, и наоборот. Поэтому для $f_l \in K_l * F_{p_l}$, $l = 1, 2$,

$$\sup_{\substack{f_l \in K_l * F_{p_l} \\ l=1,2}} \|(f_1 * f_2)_{(\cdot)} - \Phi(T_1(f_1), T_2(f_2); \cdot)\|_\infty \geqslant \sup_{\substack{f_l \in K_l * F_{p_l} \\ l=1,2}} |(f_1(-\cdot), f_2) -$$

$$- \Phi(T_1(f_1), T_2(f_2); 0)| = \sup_{\substack{\bar{f}_1 \in K_1(-\cdot) * F_{p_1} \\ f_2 \in K_2 * F_{p_2}}} |(\bar{f}_1, f_2) - \Phi(T_1(\bar{f}_1(-\cdot)), T_2(f_2); 0)| \geqslant$$

$$\geqslant Q_{n,n}(K_1(-\cdot) * F_{p_1}, K_2 * F_{p_2}). \tag{3}$$

Воспользуемся теперь одним из утверждений теоремы 1 из [2]. В принятых обозначениях оно может быть записано следующим образом:

$$Q_{n,n}(K_1(-\cdot) * F_{p_1}, K_2 * F_{p_2}) \geqslant d_n(K_1 * K_2 * F_{p_2}; L_{p_1'}).$$

Теорема 1 доказана.

Обозначим через H_{2n-1}^T, $n = 1, 2, \ldots$, множество тригонометрических полиномов порядка не выше $n - 1$. Непрерывное на $(0, 2\pi)$ и не являющееся тригонометрическим полиномом ядро K будем называть CVD-ядром (и писать $K \in CVD$), если для любых $\psi \in C$, $\psi \perp \mu(K)$, $a \in \mathbb{R}$ $\nu(a\mu + K * \psi) \leqslant \nu(\psi)$, где $\nu(g)$ — число перемен знака функции g на периоде. Очевидно, что $B_r \in CVD$. Ряд вопросов теории CVD-ядер изложен в [5, 6].

Пусть $K \in CVD$. Тогда оно удовлетворяет условиям теоремы 4.1 из [7] и, следовательно, если $\varphi(t_n) = \operatorname{Sign} \sin nt$, σ — точка абсолютного максимума или абсолютного минимума функции $K * \varphi_n$, то существует единственный полином $P_{n,\sigma} = P_{n,\delta}(K) \in H_{2n-1}^T$, интерполирующий $K(t)$ в точках $\sigma + \dfrac{m\pi}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, если все точки $\sigma + m\pi/n$, $m \in \mathbb{Z}$, являются точками непрерывности K. Если же K разрывно в нуле и $0 \in \{\sigma + m\pi/n \mid m \in \in \mathbb{Z}\}$, то существует единственный полином $P_{n,\sigma} = P_{n,\sigma}(K) \in H^T_{2n-1}$, интерполирующий K в точках $\sigma + m\pi/n \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$ Полином $P_{n,\sigma} = P_{n,\sigma}(K)$ (см. [7] (теоремы 2.4, 4.2 и § 5), [8]) является полиномом наилучшего L_1 приближения для K и при этом

$$\| K - P_{n,\sigma} \|_1 = \| K * \varphi_n \|_\infty = d_{2n-1}(K * F_\infty; L_\infty). \tag{4}$$

Пусть $a_j(f)$, $b_j(f)$ — коэффициенты Фурье функции $f \in L_1$, т. е.

$$a_j(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos jt dt, \quad b_j(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin jt dt;$$

$$c_j(f) = \frac{a_j(f) - ib_j(f)}{2}, \quad c_{-j}(f) = \frac{a_j(f) + ib_j(f)}{2}, \quad j = 0, 1, \ldots$$

Положим

$$\alpha_j = \frac{c_j(P_{n,\sigma}(K_1 * K_2))}{c_j(K_1)\,c_j(K_2)}, \quad j = \pm 1, \ldots, \pm(n-1), \tag{5}$$

α_0 вычисляется по формуле (5), если $\mu(K_1) = \mu(K_2) = 0$, и $\alpha_0 = 2\pi$ — в противном случае. Пусть

$$T_l^*(f_l) = (a_0(f_l), a_1(f_l), \ldots, a_{n-1}(f_l), b_1(f_l), \ldots, b_{n-1}(f_l)), \quad l = 1, 2, \tag{6}$$

$$\Phi^*(T_1^*(f_1), T_2^*(f_2); t) = \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} \alpha_j c_j(f_1)\, c_j(f_2)\, e^{ijt}. \tag{7}$$

Тогда, если $f_1 \in K_1 * F_{p_1}$, $f_2 \in K_2 * F_{p_2}$, то, учитывая (4), а также то, что для $g_1, g_2 \in L_1$ $c_j(g_1 * g_2) = 2\pi c_j(g_1)\, c_j(g_2)$, $j \in \mathbb{Z}$, получаем

$$\begin{aligned} \| f_1 * f_2(\cdot) - \Phi^*(T_1^*(f_1), T_2^*(f_2); \cdot) \|_\infty &= \| K_1 * K_2 * \psi_1 * \psi_2 - P_{n,\sigma}(K_1 * K_2) * \\ &* \psi_1 * \psi_2 \|_\infty \leqslant \| K_1 * K_2 - P_{n,\sigma}(K_1 * K_2) \|_1 \| \psi_1 * \psi_2 \|_\infty = \\ &= d_{2n-1}(K_1 * K_2 * F_\infty; L_\infty) \| \psi_1 * \psi_2 \|_\infty. \end{aligned} \tag{8}$$

Если $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$, то из (8) следует

$$\begin{aligned} \| f_1 * f_2(\cdot) - \Phi^*(T_1^*(f_1), T_2^*(f_2); \cdot) \|_\infty &\leqslant d_{2n-1}(K_1 * K_2 * F_\infty; L_\infty) \| \psi_1 * \psi_2 \|_\infty \leqslant \\ &\leqslant d_{2n-1}(K_1 * K_2 * F_\infty; L_\infty) = \| K_1 * K_2 * \varphi_n \|_\infty. \end{aligned} \tag{9}$$

Учитывая оценку снизу, даваемую теоремой 1 при $p_1 = 1$, $p_2 = \infty$, убеждаемся в справедливости следующей теоремы.

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, K_1, $K_2 \in CVD \cap L_2$ Тогда*

$$R_{2n-1}(K_1 * F_1, K_2 * F_\infty) = d_{2n-1}(K_1 * K_2 * F_\infty; L_\infty) = \| K_1 * K_2 * \varphi_n \|_\infty.$$

При этом оптимальная информация задается равенством (6), *а оптимальный метод ее использования — равенством* (7).

Пусть

$$\Theta_n(f, t) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j (a_j(f)\cos jt + b_j(f)\sin jt)$$

— метод Фавара, реализующий наилучшее приближение класса $W_\infty^{r_1+r_2}$ тригонометрическими полиномами в пространстве L_∞ (см., например, [9, с. 109]). Тогда, как следствие из теоремы 2, вытекает известная теорема [3].

Теорема 3. *Пусть $r_1, r_2, n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$R_{2n-1}(W_1^{r_1}, W_\infty^{r_2}) = d_{2n-1}(W_\infty^{r_1+r_2}; L_\infty) = \frac{\mathcal{K}_{r_1+r_2}}{n^{r_1+r_2}},$$

где $\mathcal{K}_r$ — константы Фавара. При этом оптимальная информация об f_1, f_2 задается равенством (6), *а оптимальный метод ее использования таков:*

$$\Phi^*(T_1^*(f_1), T_2^*(f_2); x) = \pi \left\{ \frac{a_0(f_1)\, a_0(f_2)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j [(a_j(f_1)\, a_j(f_2) - b_j(f_1)\, b_j(f_2)) \times \right.$$

$$\left. \times \cos jx + (a_j(f_1)\, b_j(f_2) + b_j(f_1)\, a_j(f_2)) \sin jx] \right\}.$$

Линейная информация, представляющая собой коэффициенты Фурье, в некоторых случаях является оптимальной для восстановления скалярных произведений. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $\overline{f}_1 \in \overline{K}_1 * F_1$, $f_2 \in K_2 * F_\infty$, $\overline{K}_1, K_2 \in CVD \cap L_2$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$Q_{2n-1,2n-1}(\overline{K}_1 * F_1, K_2 * F_\infty) = d_{2n-1}(\overline{K}_1(-\cdot) * K_2 * F_\infty; L_\infty) =$$

$$= \| K_1(-\cdot) * K_2 * \varphi_n \|_\infty.$$

При этом оптимальная информация об $\overline{f}_1, f_2$ задается равенствами

$$T_1^*(\overline{f}_1) = (a_0(\overline{f}_1(-\cdot)), a_1(\overline{f}_1(-\cdot)), \ldots, a_{n-1}(\overline{f}_1(-\cdot)), b_1(\overline{f}_1 -\cdot)), \ldots$$

$$\ldots, b_{n-1}(\overline{f}_1(-\cdot))),$$

$$T_2^*(f_2) = (a_0(f_2), a_1(f_2), \ldots, a_{n-1}(f_2), b_1(f_2), \ldots, b_{n-1}(f_2)),$$

а оптимальный метод ее использования задается равенством

$$G^*(T_1^*(\overline{f}_1), T_2^*(f_2)) = \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} \alpha_j c_j(\overline{f}(-\cdot))\, c_j(f_2),$$

где α_j такие же, как в теореме 2 *для $K_1 = \overline{K}_1(-\cdot)$.*

Доказательство. Теорема 1 из [2] дает оценку снизу

$$Q_{2n-1,2n-1}(\overline{K}_1 * F_1, K_2 * F_\infty) \geqslant d_{2n-1}(\overline{K}_1(-\cdot) * K_2 * F_\infty; L_\infty).$$

Для доказательства оценки сверху положим $f_1 = \overline{f}_1(-\cdot)$,

$$\Phi^*(T_1^*(f_1), T_2^*(f_2); t) = \sum_{j=-(n-1)}^{n-1} \alpha_j c_j(\overline{f}_1(-\cdot))\, c_j(f_2)\, e^{ijt},$$

так что $\Phi^*(T_1^*(f_1), T_2^*(f_2); 0) = G^*(T_1^*(\overline{f}_1), T_2^*(f_2))$, и воспользуемся неравенством (3). Имеем

$$\sup_{\left\{\substack{\overline{f}_1 \in \overline{K}_1 * F_1 \\ f_2 \in K_2 * F_\infty}\right\}} |(\overline{f}_1, f_2) - G^*(T_1^*(\overline{f}_1), T_2^*(f_2))| = \sup_{\left\{\substack{\overline{f}_1 \in \overline{K}_1 * F_1 \\ f_2 \in K_2 * F_\infty}\right\}} |(\overline{f}_1, f_2) -$$

$$- \Phi^*(T_1^*(\overline{f}_1(-\cdot)), T_2^*(f_2); 0)| \leqslant \sup_{\left\{\substack{f_1 \in K_1 * F_1 \\ f_2 \in K_2 * F_\infty}\right\}} \| f_1 * f_2(\cdot) - \Phi^*(T_1^*(f_1), T_2^*(f_2); \cdot) \|_\infty.$$

Учитывая (9), получаем нужную оценку сверху. Теорема 4 доказана.

Пусть $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности (см., например, [4, с. 155]); $W^r H^\omega$, $r = 0, 1, \ldots$, ($W^0 H^\omega = H^\omega$), как обычно, обозначает класс 2π-периодических функций f, у которых при всех t

$$|f^{(r)}(t) - f^{(r)}(t+\delta)| \leqslant \omega(\delta), \quad \delta \geqslant 0.$$

Аналогично теореме 1 из [2] доказывается следующая теорема.

Теорема 5. *Для $n_1, n_2, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$*

$$Q_{n_1,n_2}(W^{r_1} H^\omega, W_\infty^{r_2}) \geqslant d_{n_2}(W^{r_1+r_2} H^\omega; L_1).$$

Пусть $S^j_{2n,r} = S^j_{2n,r}(t)$ — сплайн порядка r минимального дефекта по равномерному разбиению $\Delta_n : j\pi/n$, $j = 1, \ldots, 2n$, отрезка $[0, 2\pi]$ такой, что $S^j_{2n,r}(\tau_l) = \delta_{lj}$, где $\tau_l = \pi(l/n - (1 + (-1)^r)/4n)$, δ_{lj} — символ Кронекера. Известно (см., например, [4, с. 15]), что $S^j_{2n,r}$ можно единственным образом представить в виде

$$S^j_{2n,r}(t) = \beta^j_0 + \sum_{l=1}^{2n} \beta^j_l B_{r+1}(t - l\pi/n), \quad \sum_{l=1}^{2n} \beta^j_l = 0, \quad \beta^j_l \in \mathbb{R}. \tag{10}$$

Тогда сплайн $S_{2n,r}(f; t)$, интерполирующий непрерывную функцию f в точках τ_j, $j = 1, \ldots, 2n$, можно представить в виде

$$S_{2n,r}(f; t) = \sum_{j=1}^{2n} f(\tau_j) S^j_{2n,r}(t).$$

Для $f_1 \in W^{r_1}H^{\omega}$, $f_2 \in W^{r_2}_{\infty}$ положим

$$T^*_{1,2n+1}(f_1) = c_0(f_1) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1 dx, \quad T^*_{2,2n}(f_2) = c_0(f_2) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_2 dx, \tag{11}$$

$$\begin{gathered} T^*_{1,j}(f_1) = [B_{r_2} * (f_1 - c_0(f_1))](\tau_j), \quad j = 1, \ldots, 2n, \\ \widetilde{T}_{2,j}(f_2) = \sum_{l=1}^{2n} \beta^j_l [B_{r_1+1} * (f_2 - c_0(f_2))](l\pi/n), \quad j = 1, \ldots, 2n, \end{gathered} \tag{12}$$

где β^j_l — коэффициенты в представлении (10) для $r = r_1 + r_2$. Так как $\sum_{j=1}^{2n} S^j_{2n,r} \equiv 1$, $f_l = c_0(f_l) + B_{r_l} * \psi_l$, $\psi_l \perp 1$, $l = 1, 2$, то после несложных преобразований получим

$$(-1)^{r+1} \sum_{j=1}^{2n} \widetilde{T}_{2,j}(f_2) = \int_0^{2\pi} \psi_2 \sum_{j=1}^{2n} S^j_{2n,r} dx = \int_0^{2\pi} \psi_2 dx = 0.$$

Следовательно, функционалы $\widetilde{T}_{2,j}$, $j = 1, \ldots, 2n$, линейно зависимы, так что среди них существуют функционалы $T^*_{2,m}$, $m = 1, \ldots, 2n - 1$, такие, что

$$\widetilde{T}_{2,j}(f_2) = \sum_{m=1}^{2n-1} \gamma_{m,j} T^*_{2,m}(f_2), \quad j = 1, \ldots, 2n. \tag{13}$$

Зафиксируем эти функционалы $T^*_{2,m}$ (их будет $2n - 1$) и коэффициенты $\gamma_{m,j}$ в (13). Обозначим

$$\begin{gathered} T^*_1 = (T^*_{1,1}, \ldots, T^*_{1,2n}, T^*_{1,2n+1}), \quad T^*_2 = (T^*_{2,1}, \ldots, T^*_{2,2n-1}, T^*_{2,2n}), \\ G^*(x_1, \ldots, x_{2n+1}, y_1, \ldots, y_{2n}) = (-1)^{r_1+1} \sum_{j=1}^{2n} x_j \sum_{m=1}^{2n-1} \gamma_{m,j} y_m + 2\pi x_{2n+1} y_{2n}, \end{gathered} \tag{14}$$

так что

$$G^*(T^*_1(f_1), T^*_2(f_2)) = (-1)^{r_1+1} \sum_{j=1}^{2n} T^*_{1,j}(f_1) \widetilde{T}_{2,j}(f_2) + 2\pi c_0(f_1) c_0(f_2).$$

Теперь для $f_l = c_0(f_l) + B_{rl} * \psi_l$, $l = 1, 2$; $f = B_{r_1+r_2} * \psi_1$ будем иметь

$$(f_1, f_2) - G^*(T^*_1(f_1), T^*_2(f_2)) = (-1)^{r_2} \int_0^{2\pi} f(x) \psi_2(x) dx - (-1)^{r_1+1} \sum_{j=1}^{2n} f(\tau_j) \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{2n} \beta_m^j [B_{r_1+r_2+1} * \psi_2](m\pi/n) = (-1)^{r_2} \int_0^{2\pi} \psi_2(x) \left[f(x) - \sum_{j=1}^{2n} f(\tau_j) \times \right.$$

$$\left. \times \sum_{m=1}^{2n} \beta_m^j B_{r_1+r_2+1}\left(x - \frac{m\pi}{n}\right)\right] dx = (-1)^{r_2} \int_0^{2\pi} \psi_2(x) [f(x) - S_{2n,r}(f; x)] dx. \quad (15)$$

Известно (см., например, [4, с. 280]), что для выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$

$$\sup_{f \in W^r H^\omega} \| f(\cdot) - S_{2n,r}(f; \cdot) \|_1 = d_{2n}(W^r H^\omega; L_1).$$

Поэтому если $f_1 \in W^{r_1} H^\omega$, $f_2 \in W_\infty^{r_2}$, то из (15) следует

$$|(f_1, f_2) - G^*(T_1^*(f_1), T_2^*(f_2))| \leqslant \|\psi_2\|_\infty \| f(\cdot) - S_{2n,r}(f; \cdot)\|_1 \leqslant$$

$$\leqslant \| f(\cdot) - S_{2n,r}(f; \cdot)\|_1 \leqslant d_{2n}(W^r H^\omega; L_1).$$

Учитывая теорему 4, убеждаемся, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $n, r_1, r_2 \in \mathbb{N}$, $\omega(t)$ — выпуклый вверх модуль непрерывности. Тогда*

$$Q_{2n+1,2n}(W^{r_1} H^\omega, W_\infty^{r_2}) = d_{2n}(W^{r_1+r_2} H^\omega; L_1).$$

При этом оптимальная информация T_1^*, T_2^* задается равенствами (11) — (13), *а оптимальный метод ее использования — равенством* (14).

1. *Бабенко В. Ф.* О наилучшем использовании линейных функционалов для аппроксимац. и билинейных // Исслед. по соврем. пробл. суммирования и приближения функций и их прил.— Днепропетровск: Днепропетр. ун-т, 1979.— С. 3—5.
2. *Бабенко В. Ф.* О приближенном вычислении скалярных произведений // Укр. мат. журн.— 1988.— 40, № 1.— С. 15—21.
3. *Бабенко В. Ф.* Оптимальные вычисления сверток функций из различных классов // Тез. междунар. конф. по конструктивной теории функций (Варна, май 1989 г.).— София: Изд-во БАН, 1989.— С. 5—6.
4. *Корнейчук Н. П.* Сплайны в теории приближения.— М. : Наука, 1984.— 352 с.
5. *Mairhuber J. C., Schoenberg I. J., Williamson R. E.* On variation diminisking transformations on the circle // Rend. Circ. mat. Palermo.— 1959.— 8, N 2.— P. 241—270.
6. *Karlin S.* Total politivity.— Stanford, Calif. : Stanford Univ. press, 1968.— V. 1.— 540 p.
7. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов сверток // Сиб. мат. журн.— 1987.— 28, № 5.— С. 6—21.
8. *Pinkus A.* On n-width of periodic functions // J. Anal. Math.— 1979.— 35.— P. 209—235.
9. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.

Получено 21.01.91