УДК 517.51:517.91

А. М. САМОЙЛЕНКО, чл.-корр. АН УССР,
С. И. ТРОФИМЧУК, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Неограниченные функции с почти периодическими разностями

Изучается структура непрерывных на прямой числовых функций $F(t)$ таких, что при любом фиксированном y разность $F(t+y)-F(t)$ — почти периодическая функция Бора.

Вивчається будова неперервних на прямій числових функцій $F(t)$ таких, що при кожному фіксованому y різниця $F(t+y)-F(t)$ — майже періодична функція Бора.

1. В настоящей статье рассматриваются непрерывные функции $F(t): R \to R$, для которых при любом фиксированном $y \in R$ разность $\psi_y(t) = F(t+y) - F(t)$ почти периодична (п. п.) по Бору ($\forall y \in R$ $\psi_y(t) \in AP(R)$).

Известно, что если $\psi_y(t) \in AP(R)$ $\forall y \in R$ и $F(t)$ ограничена, то $F(t)$ также п. п. функция (теорема Люмиса [1]). С. Бохнер доказал [2] также, что $F(t) \in AP(R)$, если $F(t)$ ограничена и равномерно непрерывна на R и при некотором $y_0 \neq 0$ $\psi_{y_0}(t) \in AP(R)$.

Здесь мы полагаем, вообще говоря, $F(t)$ неограниченной. Сформулируем основное утверждение.

Теорема 1. *Если для любого $N > 0$ функции $\psi_y(t)$ п. п. по Бору равномерно по $|y| \leqslant N$, то функция $F(t)$ равномерно непрерывна и существует последовательность $f_n(t) \in AP(R)$, $n \in N$ такая, что равномерно по t, $a \in R$*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^t f_n(u)\,du = F(t) - F(a). \tag{1}$$

Кроме того, равномерно по a существует конечный предел

$$\lim_{T\to+\infty} T^{-1}(F(T+a) - F(a)) = \langle F \rangle. \tag{2}$$

Обратно, если для $f_n(t) \in AP(R)$ выполнено (1) равномерно по t при некотором a, то семейство $\{\psi_y(t), y \in K\}$ равномерно п. п., если K — компакт.

2. *Функции $\psi_y(t)$ п. п. равномерно по $y \in R$ в том и только в том случае, когда $F(t) = mt + f(t)$, $m \in R$, $f(t) \in AP(R)$.*

Приведенная теорема позволяет описать интегрально п.п. (N-интегрально п. п.) по Векслеру функции [3] и, в частности, указать вид числовых последовательностей $\{t_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ таких, что совокупность последовательностей $\{t_n^j\} = \{t_{n+j} - t_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $j \in \mathbb{Z}$, равностепенно п. п. (это важно в теории п. п. решений импульсных систем [3, 4]).

2. Определение 1. *Непрерывную функцию $F(t): R \to R$ назовем Δ-п. п. [N — Δ-п. п.], если для каждого $\varepsilon > 0$ [и для каждого $N > 0$] найдется $l = l(\varepsilon) > 0$ [соответственно $l = l(\varepsilon, N) > 0$] такое, что в любом интервале длины l имеется такое ω, что*

$$|(F(t+\omega) - F(t)) - (F(t'+\omega) - F(t'))| < \varepsilon \quad \forall t, t' \in R$$

[*соответственно для t, $t' \in R$ таких, что $|t - t'| < N$*].

Ясно, что Δ-п. п. функция также и N — Δ-п. п. Непосредственно из определения следует, что при $f(t) \in AP(R)$ функция $mt + f(t)$ будет Δ-п. п. Введенные выше понятия обобщают введенные Векслером [N-] интегрально п. п. функции.

Определение 2. *Локально суммируемая функция $f(t): R \to R$ интегрально п. п. [N-интегрально п. п.], если для каждого $\varepsilon > 0$ [и для каждого $N>0$] найдется $l=l(\varepsilon)>0$ [соответственно $l=l(\varepsilon, N)>0$] такое,* *что в любом интервале длины l существует ω такое, что*

$$\left|\int_t^{t+\omega} f(u)\,du-\int_{t'}^{t'+\omega} f(u)\,du\right|<\varepsilon \quad \forall t,t'\in R \tag{3}$$

[*соответственно для t, $t'\in R$ таких, что $|t-t'|<N$*].

Очевидно, если $f(t)$ интегрально п. п. [N-интегрально п. п.] функция, то при произвольном $a\in R$ функция $F(t)=\int_a^t f(u)\,du\in C(R)$ будет Δ-п.п. [$N-\Delta$-п. п.]. Учитывая тождество

$$\psi_y(t+\omega)-\psi_y(t)\equiv(F(t+y+\omega)-F(t+y))-(F(t+\omega)-F(t)),$$

получаем, что $F(t)$ — Δ-п. п. функция [$N-\Delta$-п. п. функция] в том и только в том случае, когда семейство функций $\psi_y(t)$ п. п. равномерно по $y\in R$ [соответственно по y, пробегающим любой компакт $K\subset R$].

Докажем равномерную непрерывность $N-\Delta$-п. п. функции. Зафиксируем $N=1$ и произвольное $\varepsilon>0$. Пусть $l=l(\varepsilon,1)>1$. Тогда в любом интервале длины l можно найти такое ω, что для каждых t', $t:|t'-t|\leqslant 1$ выполнено

$$|(F(t+\omega)-F(t))-(F(t'+\omega)-F(t'))|<\varepsilon/2. \tag{4}$$

На $[-l,1]$ $F(t)$ равномерно непрерывна и по $\varepsilon>0$ укажем положительное $\delta(\varepsilon)<1$ такое, что для всех t_1, t_2 с $|t_1-t_2|<\delta$ будет

$$|F(t_1)-F(t_2)|<\varepsilon/2. \tag{5}$$

Пусть теперь $t^{(1)}<t^{(2)}$, $|t^{(1)}-t^{(2)}|<\delta$; на $[t^{(1)},t^{(1)}+l]$ укажем почти период ω такой, что выполнено (4). Если в (4) взять $t=t^{(1)}-\omega\in[-l,0]$; $t'=t^{(2)}-\omega\in[-l,1]$, то согласно (4), (5) $|F(t+\omega)-F(t'+\omega)|-|F(t)-F(t')|<\varepsilon/2$ и $|F(t^{(1)})-F(t^{(2)})|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Теперь несложно доказать первую часть теоремы. Действительно, пусть $f_n(t)=2^n(F(t+2^{-n})-F(t))$. Тогда $f_n(t)\in AP(R)$ $\forall n$,

$$\int_a^t f_n(u)\,du=2^n\int_0^{2^{-n}} F(u+t)\,du-2^n\int_0^{2^{-n}} F(u+a)\,du\to F(t)-F(a)$$

при $n\to\infty$ равномерно по t, $a\in R$ ввиду равномерной непрерывности $F(t)$.

Пусть n_0 таково, что для всех $t,a\in R$

$$\left|\int_a^{t+a} f_{n_0}(u)\,du-(F(t+a)-F(a))\right|<1. \tag{6}$$

Разделив обе части (6) на $|t|$ и учитывая, что равномерно по a существует конечный предел $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_a^{T+a} f_{n_0}(u)\,du$, убеждаемся в том, что равномерно по a существует и предел (2).

Обратно, пусть справедливо (1) равномерно по t при некотором $a\in R$. Так как $f_n(t)\in AP(R)$, то согласно [3, с. 297] п. п. функции $f_n(t)$ N-интегрально п. п. Но тогда $F_n(t)=\int_a^t f_n(u)\,du$ — $N-\Delta$-п. п. функции. Учитывая, что $N-\Delta$-п. п. функции образуют линейное пространство, замкнутое относительно равномерного по $t\in R$ предельного перехода, убеждаемся в справедливости первой части теоремы.

Как следствие ее, отметим, что для произвольной N-интегрально п. п. функции Векслера $f(t)$ равномерно по a существует конечное среднее

$$\bar f=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_a^{T+a} f(u)\,du.$$

3. Вторая часть теоремы будет доказана, если мы покажем, что функция $f(t) = F(t) - \langle F \rangle t$ п. п. по Бору, т. е. если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество ω таких, что для всех $t \in R$

$$|f(t+\omega) - f(t)| = |F(t+\omega) - F(t) - \langle F \rangle \omega| < \varepsilon.$$

Учитывая Δ-п. п. функции $F(t)$ и определение 1, для этого достаточно показать, что для любого $\omega \in R$ найдется $t' \in R$ такое, что $F(t'+\omega) - F(t') = \langle F \rangle \omega$.

Если это не так, то при некотором $\omega \in R$ либо а) $F(t+\omega) - F(t) = \psi_\omega(t) > \langle F \rangle \omega \ \forall t$, либо б) $\psi_\omega(t) < \langle F \rangle \omega \ \forall t$.

Предположим, например, что выполнено а), тогда для среднего $\overline{\psi}_\omega$ п. п. функции Бора $\psi_\omega(t)$ должно быть $\overline{\psi}_\omega > \langle F \rangle \omega$. С другой стороны, учитывая (2)

$$\overline{\psi}_\omega = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\omega} \int_0^{n\omega} (F(u+\omega) - F(u))\, du = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\omega} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{k\omega}^{(k+1)\omega} F(u+\omega)\, du - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{k\omega}^{(k+1)\omega} F(u)\, du \right) \right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\omega} \left[\int_{n\omega}^{(n+1)\omega} F(u)\, du - \int_0^{\omega} F(u)\, du \right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^{\omega} \frac{F(u+n\omega) - F(u)}{n\omega}\, du = \omega \langle F \rangle.$$

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

4. Следствие. *Пусть числовая последовательность $\{t_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ такова, что совокупность последовательностей $\{t_n^j\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ равностепенно п. п Тогда $t_n = an + c_n$, где $\{c_n\}$ — п. п. последовательность, a — некоторое действительное число.*

Доказательство. При выполнении условий следствия функция $\psi(t)$, равная $t_n^1 = t_{n+1} - t_n$ при $t \in [n, n+1)$, интегрально п. п. Действительно, в силу равностепенной п. п. последовательностей $\{t_n^j\}$, $j \in \mathbb{Z}$, согласно [3] для каждого $\eta > 0$ существует $l(\eta) > 0$ такое, что в любом интервале длины $l(\eta)$ найдется целое h такое, что

$$\left| \sum_{n=k}^{k+h} t_n^1 - \sum_{n=k'}^{k'+h} t_n^1 \right| < \eta \quad \forall k, k' \in \mathbb{Z}. \tag{7}$$

Из (7) при $k' = k + 1$ следует

$$|t_k^1 - t_{k+h+1}^1| < \eta. \tag{8}$$

Так как $\sum_{n=k}^{k+h} t_n^1 = \int_k^{k+h+1} \psi(u)\, du$, то для всех $t, t' \in R$ в силу (7), (8) получаем (здесь $[t]$ и $\{t\}$ — целая и дробная части t):

$$\left| \int_t^{t+h+1} \psi(u)\, du - \int_{t'}^{t'+h+1} \psi(u)\, du \right| \leqslant \left| \int_{[t]}^{[t]+h+1} \psi(u)\, du - \int_{[t']}^{[t']+h+1} \psi(u)\, du \right| +$$

$$+ \left| \int_{[t]+h+1}^{t+h+1} \psi(u)\, du - \int_{[t]}^{t} \psi(u)\, du \right| + \left| \int_{[t']+h+1}^{t'+h+1} \psi(u)\, du - \int_{[t']}^{t'} \psi(u)\, du \right| <$$

$$< \eta + \{t\}\, |t_{[t]+h+1}^1 - t_{[t]}^1| + \{t'\}\, |t_{[t']+h+1}^1 - t_{[t']}^1| < 3\eta.$$

Следовательно, $\psi(u)$ — интегрально п. п. и согласно доказанной теореме $\int\limits_0^t \psi(u)\,du = at + c(t)$, где $a \in R$, $c(t) \in AP(R)$. Но тогда $t_n - t_0 = \int\limits_0^n \psi(u)\,du = an + c(n)$ и, так как $\{c(n)\}$ — п. п. последовательность, то следствие доказано.

5. Замечания. 1. Если $F(t)$ равномерно непрерывна на R и $F(t + y_0) - F(t) \in AP(R)$ при некотором $y_0 \neq 0$, то функция $F(t)$ N — Δ-п. п. Действительно, в этом случае при любом $n \in N$ функция $f_n(t) = F(t + y_0 2^{-n}) - F(t)$ равномерно непрерывна и ограничена на R. Так как $f_1(t)$ будет решением уравнения

$$\psi(t + y_0/2) + \psi(t) = f_0(t) \in AP(R),$$

а однородное уравнение $\psi(t + y_0/2) + \psi(t) = 0$ имеет лишь y_0 — периодическое решение, то $f_1(t) \in AP(R)$ согласно [2]. Учитывая соотношения

$$f_n(t + y_0 2^{-n}) + f_n(t) = f_{n-1}(t),$$

получаем $f_n(t) \in AP(R)$ $\forall n \in N$. Так как, наконец, равномерно по $t \in R$

$$\lim_{n\to\infty} 2^n \int\limits_0^t f_n(u)\,du = F(t) - F(0),$$

то $F(t)$ — N — Δ-п. п. функция.

В частности, пусть $\{c_n\}$ — п. п. последовательность, а кусочно-постоянная функция $\rho(t)$ принимает значение c_n при $t \in [n, n+1)$. Тогда, если $F(t) = \int\limits_0^t \rho(u)\,du$, то разность $F(t+1) - F(t)$ п. п. по Бору. Учитывая ограниченность $\{c_n\}$, можно заключить, что $F(t)$ — N — Δ-п. п. функция, а $\rho(t)$ N-интегрально п. п. по Векслеру.

2. Пусть $f(t) > 0$ — такая п. п. функция Бора, что функция $r(t) = \int\limits_0^t f(u)\,du - \bar{f}t$ неограничена $\left(\text{например, } f(t) = 5 + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos\frac{t}{n^2}}{n^2}\right)$. Тогда, полагая $t_n = \int\limits_0^n f(u)\,du$, имеем $t_{n+1} > t_n$ $\forall n$ и совокупность п. п. последовательностей $\{t_{n+j} - t_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$, $j \in \mathbb{Z}$, не будет равностепенно п. п. Действительно, в противном случае для некоторой п. п. последовательности $\{c_n\}$ верно $\int\limits_0^n f(u)\,du = n\bar{f} + c_n$. Но так как $r(t) = \int\limits_{[t]}^t (f(u) - \bar{f})\,du + c_{[t]}$, то $|r(t)| \leqslant \{t\}(\|f(u)\| + |\bar{f}|) + \sup\limits_n |c_n| < \infty$.

3. S-п. п. функция (по Степанову) является N-интегрально п. п. Действительно, пусть $f(t)$ — S-п. п. функция; $\varepsilon > 0$, $N > 0$ произвольны (фиксируем их); τ — ε/N — почти период функции $f(t)$ в норме $\sup\limits_{t\in R}\left(N^{-1}\int\limits_0^N |f(t+u)|\,du\right)$, $F_y(t) = \int\limits_y^{t+y} f(u)\,du$. Тогда если $|y| \leqslant N$, то

$$\sup_t |F_y(t+\tau) - F_y(t)| \leqslant \sup_t \int\limits_0^y |f(t+\tau+u) - f(t+u)|\,du \leqslant \varepsilon.$$

1. *Loomis L. H.* The spectral characterisation of a class of almost periodic functions // Ann Math.— 1960.— 72, N 2.— P. 362—368.
2. *Bochner S.* A new approach to almost periodicity // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1962.— 48.— P. 2039—2043.
3. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем.— М. : Мир, 1971.— 311 с.
4. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев: Вища шк., 1987.— 288 с.

Получено 05.02.91