УДК 517.911

М. У. АХМЕТОВ, канд. физ.-мат. наук,
Н. А. ПЕРЕСТЮК, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

Асимптотическое представление решений регулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с неклассической правой частью

Рассматривается задача о B-асимптотическом представлении по малому параметру решений регулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях и дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Доказаны теоремы о B-аналитической зависимости решений от малого параметра. Приведены алгоритмы вычислений коэффициентов разложения.

Розглядається задача про B-асимптотичне зображення по малому параметру розв'язків регулярно збурених систем диференціальних рівнянь з імпульсною дією на поверхнях та диференціальних рівнянь з розривною правою частиною. Доведені теореми про B-асимптотичну залежність розв'язків від малого параметра. Наведені алгоритми обчислення коефіцієнтів розкладу.

В настоящей работе исследуется задача асимптотического представления по малому параметру решений дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях и систем дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Рассматриваемые системы относятся к дифференциальным уравнениям с неклассической правой частью и возникли как математические модели при решении важных практических задач [1—4]. Результаты, полученные в статье, являются продолжением исследований [5, 6].

Пусть $G = G_t \times G_x \times G_\mu$ — ограниченная область в пространстве $R^1 \times R^n \times R^1$ и G_μ — окрестность нуля.

Рассмотрим в множестве G систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием на поверхностях, имеющую вид

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \mu), \quad t \neq \tau_i(x, \mu), \Delta x|_{t=\tau_i(x,\mu)} = I_i(x, \mu). \tag{1}$$

Предположим, что соответствующее для (1) вырожденное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, 0), \quad t \neq \tau_i(x, 0), \quad \Delta x|_{t=\tau_i(x,0)} = I_i(x, 0), \tag{2}$$

допускает решение $x_0(t)$, $x_0(t_0) = x_0$, определенное на промежутке $[t_0, T] \subset G_t$, которое имеет точки разрыва $t = t_i$, $i = \overline{1, p}$, $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots \ldots < t_p < T$, такие, что

$$1 - \langle f(t_i, x_0(t_i), 0), \frac{\partial \tau_i(x_0(t_i), 0)}{\partial x} \rangle \neq 0, \tag{3}$$

где $<, >$ —скалярное произведение в пространстве R^n.

Пусть ε — малое положительное число такое, что G_ε-совокупность ε-окрестностей точек t_i, $i = \overline{1, p}$, содержится в $[t_0, T]$. Будем считать, что

$$f \in C^{(0,k+1,k+1)}(G) \cap C^{(k,k+1,k+1)}(G_\varepsilon \times G_x \times G_\mu),$$
$$I_i, \tau_i \in C^{(k+1)}(G_x \times G_\mu), \quad i = \overline{1, p}.$$

Кроме того, полагаем справедливыми условия, при которых отсутствует «биение» решений системы (1) о поверхности разрыва [2].

В дальнейшем будем считать, что $(a, \cdot b]$ означает множество $(a, b]$, если $a \leqslant b$, или множество $(b, a]$, если $b < a$. Такие же обозначения будем применять для остальных видов числовых промежутков.

Пусть $x^0(t) = x(t, t_i, x, \mu)$ — решение задачи Коши уравнения

$$dx/dt = f(t, x, \mu) \tag{4}$$

и $t = \xi_i$ — момент встречи этого решения с поверхностью $t = \tau_i(x, \mu)$. Предположим, что решение $x^1(t) = x(t, \xi_i, x^0(\xi_i) + I_i(x^0(\xi_i), \mu), \mu)$ уравнения (4) существует на промежутке $[t_i, \xi_i]$, и определим отображение

$$\mathcal{I}_i(x, \mu) = \int_{t_i}^{\xi_i} f(u, x^0(u), \mu)\, du + I_i\left(x + \int_{t_i}^{\xi_i} f(u, x^0(u), \mu)\, du\right) +$$
$$+ \int_{\xi_i}^{t_i} f(u, x^1(u), \mu)\, du. \tag{5}$$

В работе [5] было доказано, что при выполнении указанных для системы (1) условий $\mathcal{I}_i \in C^{(k+1)}$.

Пусть $x(t, \mu)$, $x(t_0, \mu) = x_0$ — решение системы (1). В силу непрерывной в B-топологии зависимости решений системы (1) от параметра μ [6] при достаточно малом $|\mu|$ это решение определено на всем промежутке $[t_0, T]$, кроме того, отображение $J_i(x, \mu)$, $i = \overline{1, p}$, определено в некоторой окрестности точки $(x_0(t), 0)$ и решение $x(t, \mu)$ в силу неравенства (3) не касается ни одной из поверхностей разрыва. Обозначим через ξ_i, $i = \overline{1, p}$, моменты встречи решения $x(t, \mu)$ с поверхностями разрыва $t = \tau_i(x, \mu)$.

Нетрудно проверить, что это решение во всех точках $t \in [t_0, T]$, за исключением, быть может, точек из промежутков $(t, \xi_i]$, принимает одинаковые значения с решением $y(t, \mu)$, $y(t_0, \mu) = x_0$ уравнения с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени, имеющего вид

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y, \mu), t \neq t_i, \Delta y|_{t=t_i} = J_i(y, \mu). \qquad (6)$$

Будем говорить, что решение $x(t, \mu)$ имеет B-асимптотическое представление, если при достаточно малом $|\mu|$ для всех точек $t \in [t_0, T]$, расположенных вне промежутков $[t_i, \xi_i]$, верно равенство

$$x(t, \mu) = \sum_{j=0}^{k} x_j(t) \mu^j + O(\mu^{k+1}), \qquad (7)$$

в котором x_j — кусочно-непрерывные с разрывами первого рода в точках t_i вектор-функции. Кроме того, для всех $i = \overline{1, p}$ справедливо соотношение

$$\xi_i - t_i = \sum_{j=1}^{k} \varkappa_{ij} \mu^j + O(\mu^{k+1}), \qquad (8)$$

в котором $\varkappa_{ij}$ — действительные постоянные.

Существование разложений (7), (8) показано в [5]. Здесь рассмотрим задачу определения коэффициентов x_j и $\varkappa_{ij}$. В силу установленного выше соответствия между решениями $x(t, \mu)$ и $y(t, \mu)$ достаточно определить коэффициенты x_j исходя из уравнения (6), считая, что во всех точках $t \in [t_0, T]$ справедливо асимптотическое представление

$$y(t, \mu) = \sum_{j=0}^{k} x_j(t) \mu^j + O(\mu^{k+1}). \qquad (9)$$

Подставив (9) в (6) и использовав гладкость функций f и J_i, найдем, что $x_0(t)$ является решением задачи Коши $x_0(t_0) = x_0$ уравнения (2). Для каждого $j = \overline{1, k}$ коэффициенты x_j есть решения задачи Коши $x_j(t_0) = 0$ уравнения вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t), 0) x + F(t, x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}), \quad t \neq t_i, \\ \Delta x|_{t=t_i} &= \frac{\partial J_i}{\partial x}(x_0(t_i), 0) x + G_i(x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}), \end{aligned} \qquad (10)$$

в котором функции F и G_i полностью определены коэффициентами x_0, $x_1, \ldots, x_{j-1}$ и частными производными функций f и J_i при значениях $x = x_0(t)$ и $\mu = 0$ до j-го порядка включительно.

Займемся определением частных производных функций J_i в точках $(x_0(t_i), 0)$. Зафиксируем i и для краткости в дальнейшем индекс i опустим. Кроме того, обозначим $t_i = \eta$ и если $x = x_0(\eta)$, $t = \eta$, $\mu = 0$ или $x = x_0(\eta+)$, $t = \eta$, $\mu = 0$, то все используемые ниже функции будем указывать без значений аргументов, отличая второй случай от первого верхним индексом $+$. При этом для обозначения производных применяются кратные нижние индексы x, t, μ. Векторы x, f, I, J и их производные будем считать векторами-столбцами, а производные от функций τ и ξ — векторами-строками. Произведение векторов и матриц определим по правилу умножения прямоугольных матриц.

Точка разрыва $t = \xi$ решения $x(t, \mu)$ определяется из уравнения $\xi = \tau(x(\xi, \mu), \mu)$ как функция $\xi = \xi(x, \mu)$, где $x = x(\eta, \mu)$. Поэтому, применяя известные теоремы анализа для неявной функции и переходя к пределу при $\mu \to 0$ получаем

$$\xi_x = \tau_x (1 - \tau_x f)^{-1}, \quad \xi_\mu = \tau_\mu (1 - \tau_x f)^{-1},$$
$$\xi_{x\mu} = \tau_{x\mu} (1 - \tau_x f)^{-1} + (\tau_x (\tau_{x\mu} f + \tau_x f_\mu)) (1 - \tau_x f)^{-2},$$
$$\xi_{\mu\mu} = (\tau_\mu (\tau_{x\mu} f + \tau_x f_\mu)) (1 - \tau_x f)^{-2} + \tau_{\mu\mu} (1 - \tau_x f)^{-1}, \tag{11}$$
$$\xi_{xx_j} = 2\tau_{xx_j} (1 - \tau_x f)^{-1} + (\tau_x (2\tau_{xx_j} f + \tau_x f_{x_j})) (1 - \tau_x f)^{-2}.$$

Применяя полученные выражения, аналогичным образом, исходя из (5), находим

$$J_x = \xi_x (f - f^+) + I_x (E + \xi_x f), \quad J_\mu = (f - f^+) \xi_\mu + I_x f \xi_\mu + I_\mu,$$
$$J_{x\mu} = \xi_x (f_t - f_t^+) \xi_\mu + \xi_{x\mu} (f - f^+) + (f_x - f_x^+ (E + I_x)) \xi_\mu +$$
$$+ \Big(\sum_{i=1}^{n} I_{xx_i} f_i \xi_\mu + I_{x\mu} \Big) (E + \xi_x f) + I_x (\xi_x f_\mu + f_x \xi_\mu + \xi_{x\mu} f),$$
$$J_{xx_j} = \xi_x [(f_t - f_t^+) \xi_{x_j} + f_{x_j} - f_{x_j}^+] + \xi_{xx_j} (f - f^+) + \xi_{x_j} (f_x - f_x^+ + f_x^+ I_x) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} I_{xx_i} (\delta_{ij} + f_i \xi_{x_j}) (E + \xi_x f) + I_x (\xi_x (f_{x_j} + f_t \xi_{x_j})) + \xi_{xx_j} f + \xi_{x_j} f_x, \tag{12}$$
$$J_{\mu\mu} = (f_t - f_t^+) \xi_\mu^2 + (f^- - f^+) \xi_{\mu\mu} + (f_\mu + I_{x\mu} f) \xi_\mu + \Big(\sum_{i=1}^{n} I_{xx_i} f_i \xi_\mu \Big) (f \xi_\mu + I_\mu) +$$
$$+ I_x (f_t \xi_\mu^2 + 2 f_\mu \xi_\mu + f \xi_{\mu\mu}) + \sum_{i=1}^{n} I_{\mu x_j} f_i + I_{\mu\mu},$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Очевидно, что таким образом с помощью значений производных функций f, I, τ в точках $(\eta, x_0(\eta), 0)$ и $(\eta, x_0(\eta +), 0)$ могут быть вычислены производные функции J в точке $(x_0(\eta), 0)$ до k-го порядка включительно. Кроме того, исходя из (11) определяются коэффициенты в (8). Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть система* (1) *и решение $x_0(t)$ вырожденной системы* (2) *удовлетворяют указанным выше условиям. Тогда при достаточно малом $|\mu|$ решение $x(t, \mu)$, $x(t_0, \mu) = x_0$ определено на участке $[t_0, T]$ и допускает на нем B-асимптотическое представление. Коэффициенты x_j разложения* (7) *определяются рекуррентным способом как решения линейных неоднородных систем* (10), $j = \overline{1, k}$, *с помощью выражений вида* (11), (12). *Постоянные $\varkappa_{ij}$ в равенстве* (8) *равны значениям функций $\frac{1}{j!} \frac{\partial^j \xi_i}{\partial \mu^j}$ в точке $(x_0(t_i), 0)$ и вычисляются по формулам вида* (11).

Рассмотрим теперь систему (1), предполагая, что функции f, I, τ голоморфны по x, μ в множестве G, а функция f, кроме того, голоморфна по t, x, μ в области $G_\varepsilon \times G_x \times G_\mu$. Предположим также, что равномерно относительно $(t, x, \mu) \in G$ выполняются неравенства

$$\| f \| \leqslant M < +\infty, \quad \left\| \frac{\partial \tau}{\partial x} \right\| \leqslant C < +\infty, \tag{13}$$

справедливо соотношение

$$MC < 1 \tag{14}$$

и для всех i, x, μ верно $\tau_i(x, \mu) \geqslant \tau_i(x + I_i(x, \mu), \mu)$. Тогда каждое решение системы (1) может встретиться с любой из поверхностей разрыва не больше одного раза [2]. Из результатов работы [5] следует, что при выполнении указанных условий при достаточно малом $|\mu|$ решение $x(t, \mu)$ B-аналитическим образом зависит от параметра μ, т. е. существуют кусочно-непрерывные с разрывами первого рода в точках t_i вектор-функции x_j, $j = 1, 2, \ldots$, и последовательность действительных чисел $\{\varkappa_{ij}\}_j$, $i = \overline{1, p}$, такие, что 1) при всех $t \in [t_0, T]$, лежащих вне промежутков $(t_i, \xi_i]$, справедливо равенство

$$x(t, \mu) = \sum_{j=0}^{\infty} x_j(t)\mu^j; \tag{15}$$

2) для всех $i = \overline{1, p}$ выполняется соотношение

$$\xi_i - t_i = \sum_{j=1}^{\infty} \varkappa_{ij}\mu^j. \tag{16}$$

Подставляя выражение (15) в уравнение (6) и приравнивая последовательно слагаемые с одинаковыми степенями μ, убеждаемся, что справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть система* (1) *и решение* $x_0(t)$ *вырожденного уравнения* (2) *удовлетворяют указанным условиям. Тогда решение* $x(t, \mu)$, $x(t_0, \mu) = x_0$ *системы* (1), *расположенное в окрестности функции* $x_0(t)$, B-*аналитическим образом зависит от* μ *и коэффициенты* x_j *в* (15) *определяются из линейных неоднородных уравнений* (10), $j = 1, 2, 3, \ldots$ *с помощью выражений вида* (11), (12). *Постоянные* $\varkappa_{ij}$ *равны значениям функций* $\frac{1}{j!}\frac{\partial^j \xi_i}{\partial \mu^j}$ *в точках* $(x_0(t_i), 0)$.

Дальше будем исследовать задачу об асимптотическом представлении решения системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью. Для этого будем применять методику, изложенную выше для импульсных систем.

Дифференциальные свойства решений уравнений с разрывной правой частью изучались в работах [3, 4]. В [3] выведены уравнения в вариациях, которым удовлетворяет главная часть разности двух близких решений в случаях, когда решения пересекают поверхность разрыва, входят на эту поверхность или сходят с нее. Там же показано, что исследование дифференциальных свойств решений для указанных случаев, вообще говоря, не отличается. Поэтому будем рассматривать задачу, считая, что решения пересекают поверхность разрыва.

Пусть в области G дана система

$$dx/dt = f(t, x, \mu), \tag{17}$$

в которой функция f терпит разрыв на поверхности $\Gamma(\mu)$, заданной уравнением $t = \tau(x, \mu)$. Предположим, что решение $x_0(t)$, $x_0(t_0) = x_0$, соответствующего вырожденного уравнения

$$dx/dt = f(t, x, 0), \tag{18}$$

существует на промежутке $[t_0, T]$ и встречается с поверхностью $\Gamma(0)$ в точке t_1, $t_0 < t_1 < T$ так, что справедливо соотношение

$$1 - \langle f(t_1 \pm, x_0(t_1), 0), \frac{\partial \tau(x_0(t_1), 0)}{\partial x} \rangle \neq 0, \tag{19}$$

в котором указаны предельные значения функции f. Предположим также, что поверхность $\Gamma(\mu)$ разбивает при каждом фиксированном μ множество G на две области $G_+(\mu)$ и $G_-(\mu)$. Для определенности будем считать, что точка $(t_0, x_0, 0)$ принадлежит области $G(0)$ и, значит, при достаточно малом $|\mu|$ точки (t_0, x_0, μ) принадлежат области $G_-(\mu)$. Пусть G_0 — некоторая окрестность поверхности $\Gamma(0)$ в множестве G. Будем считать, что при каждом фиксированном μ

$$f \in C^{(0,k+1,k+1)}(G_+ \cup G_-) \cap C^{(k,k+1,k+1)}((G_+ \cup G_-) \cap G_0),$$
$$\tau \in C^{(k+1)}(G),$$

функция f и каждая ее частная производная имеют конечные пределы в точках множества Γ.

Сделаем полезное в дальнейшем построение. Разобьем интервал G_t на два непересекающихся участка G_t^- и G_t^+, содержащих соответственно точки $t < t_1$ и $t > t_1$. Функцию f продолжим вместе со всеми ее частными производными непрерывным образом с множества $G_+ \cap (G_t^+ \times G_x \times G_\mu)$ на область $G_t^+ \times G_x \times G_\mu$ и с множества $G_- \cap (G_t^- \times G_x \times G_\mu)$ на область $G_t^- \times G_x \times G_\mu$ так, чтобы в каждой точке плоскости $t = t_1$ они имели конечные пределы. Подобное расширение функции f обозначим f_1.

Пусть теперь $x^0(t, \mu) = x(t, t_1, x, \mu)$ — решение задачи Коши для уравнения (17) и $t = \xi$ — момент встречи его с поверхностью $\Gamma(\mu)$, а $x^1(t, \mu) = x(t, \xi, x^0(\xi, \mu), \mu)$ — решение уравнения

$$dx/dt = f_1(t, x, \mu), \tag{20}$$

определенное на участке $[t_1^\cdot, \xi[$. Построим отображение

$$J(x, \mu) = \int_{t_1}^{\xi} f(u, x^0(u, \mu)\, du + \int_{\xi}^{t_1} f(u, x^1(u, \mu), \mu)\, du.$$

Пусть $x(t, \mu)$, $x(t_0, \mu) = x_0$ — решение системы (17) и $t = \xi_1$ — момент встречи этого решения с поверхностью $\Gamma(\mu)$. Нетрудно проверить, что решение $x(t, \mu)$, которое при достаточно малом $|\mu|$ существует на промежутке $[t_0, T]$, вне участка $[t_1^\cdot, \xi_1]$ принимает одинаковые значения с решением $y(t, \mu)$, $y(t_0, \mu) = x_0$ импульсной системы

$$\frac{dy}{dt} = f_1(t, y, \mu), \quad t \neq t_1, \quad \Delta y|_{t=t_1} = J(y, \mu). \tag{21}$$

Так как к уравнениям (21) можно применить все рассуждения относительно системы (6), то на основании доказательства теоремы 1 можно заключить, что для всех $t \in [t_0, T]$, лежащих вне отрезка $[t^\cdot, \xi_1]$, верно равенство вида (7) и справедливо соотношение (8) при $i = 1$. При этом $x_0(t)$ есть решение уравнения (18) с начальным условием $x_0(t_0) = x_0$, а каждое x_j, $j = \overline{1, k}$, является решением системы вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(t, x_0(t), 0)\, x + F(t, x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}), \quad t \neq t_1, \\ \Delta x|_{t=t_1} &= \frac{\partial J}{\partial x}(x_0(t_1), 0)\, x + G(x_0, x_1, \ldots, x_{j-1}). \end{aligned} \tag{22}$$

Частные производные функции $J(x, \mu)$, используемые при построении систем (22), находим, исходя из выражений вида (11), (12), полагая, что $I(x, \mu) \equiv 0$ и функция f вместе со своими частными производными имеет в точке $(t_1, x_0(t_1), 0)$ лишь предельные значения при $\mu \to 0$. Тогда для этих производных до второго порядка имеем

$$\xi_x = \tau_x (1 - \tau_x f^-)^{-1}, \quad \xi_\mu = \tau_\mu (1 - \tau_x f^-)^{-1},$$
$$\xi_{x\mu} = \tau_{x\mu} (1 - \tau_x f^-)^{-1} + (\tau_x (\tau_{x\mu} f^- + \tau_x f_\mu^-))(1 - \tau_x f^-)^{-2},$$
$$\xi_{xx_j} = 2\tau_{xx_j} (1 - \tau_x f^-)^{-1} + (\tau_x (2\tau_{xx_j} f^- + \tau_x f_{x_j}^-))(1 - \tau_x f^-)^{-2},$$
$$\xi_{\mu\mu} = (\tau_\mu (\tau_{x\mu} f + \tau_x f_\mu^-))(1 - \tau_x f^-)^{-2} + \tau_{\mu\mu} (1 - \tau_x f^-)^{-1}$$

и

$$J_x = \xi_x (f^- - f^+), \quad J_\mu = (f^- - f^+)\xi_\mu,$$

$$J_{xx_j} = \xi_x [(f_t^- - f_t^+)\xi_{x_j} + f_{x_j}^- - f_{x_j}^+] + \xi_{xx_j}(f^- - f^+) + \xi_{x_j}(f_x^- - f_x^+),$$

$$J_{x\mu} = \xi_x (f_t^- - f_t^+)\xi_\mu + \xi_{x\mu}(f^- - f^+) + (f_x^- - f_x^+)\xi_\mu,$$

$$J_{\mu\mu} = (f_t^- - f_t^+)\xi_\mu^2 + (f^- - f^+)\xi_{\mu\mu} + f_\mu \xi_\mu.$$

Таким образом справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть система* (17) *удовлетворяет указанным условиям. Тогда при достаточно малом* $|\mu|$ *решение* $x(t, \mu)$, $x(t_0, \mu) = x_0$ *системы* (17) *существует на промежутке* $[t_0, T]$ *и допускает B-асимптотическое представление, заданное выражениями* (7), (8) (*при* $i = 1$). *Коэффициенты* x_j *разложения* (7) *определяются рекуррентным способом как решения уравнений* (23), $j = \overline{1, k}$, *а постоянные* $\varkappa_{1j}$ *равны значению функций* $\frac{1}{j!}\frac{\partial^j \xi}{\partial \mu^j}$ *в точке* $(x_0(t_1), 0)$.

Аналогично теореме 2 доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть в системе* (17) *функция* f *голоморфна по* x *и* μ *в области* $G_+ \cup G_-$ *и голоморфна по* t *в области* $(G_+ \cup G_-) \cap G_0$, *функция* τ *голоморфна в области* $G_+ \cup G_-$. *Пусть также равномерно в области* $G_+ \cup G_-$ *выполняются неравенства* $\|f\| \leqslant M$, $\|\partial\tau/\partial x\| \leqslant C$, $MC < 1$. *Решение* $x_0(t)$ *вырожденного уравнения* (18), *удовлетворяющее начальному условию* $x_0(t_0) = x_0$, *существует на промежутке* $[t_0, T]$ *и удовлетворяет условию* (19).

Тогда решение $x(t, \mu)$, $x(t_0, \mu) = x_0$ *системы* (17) *при достаточно малом* $|\mu|$ *существует на промежутке* $[t_0, T]$ *и для всех точек* $t \in [t_0, T]$, *за исключением множества* $[t_1, \xi_1]$, *справедливы разложение* (15) *и разложение* (16) *при* $i = 1$. *Коэффициенты* x_j *определяются рекуррентным способом как решения уравнений* (23), $j = 1, 2, \ldots$, *а постоянные* $\varkappa_{1i}$ *равны значению функций* $\frac{1}{j!}\frac{\partial^j \xi}{\partial \mu^j}$ *в точке* $(x_0(t_1), 0)$.

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1963.— 410 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Вища шк., 1987.— 287 с.
3. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.— М. : Наука, 1985.— 224 с.
4. *Айзерман М. А., Гантмахер Ф. Р.* Устойчивость по линейному приближению периодического решения системы дифференциальных уравнений с разрывными правыми частями // Прикл. математика и механика.— 1957.— 21, № 5.— С. 658—669.
5. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А., Ахметов М. У.* Дифференциальные свойства решений и интегральных поверхностей нелинейных импульсных систем.— Киев, 1990.— 50 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.37).
6. *Ахметов М. У., Перестюк Н. А.* О дифференцируемой зависимости решений импульсных систем от начальных данных // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 8.— С. 1028—1033.

Получено 11.12.90