УДК 517. 5

А. В. Бондарь, д-р физ.-мат. наук,
Е. А. Лукьянова, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

О ПСЕВДОАНАЛИТИЧНОСТИ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, ОБЛАДАЮЩИХ σ–КОНСЕРВАТИЗМОМ УГЛОВ

We prove a theorem that a continuous function satisfying the condition K'_σ, which is a generalization of the well-known D. E. Men'shov condition from the theory of analytic functions, is pseudo-analytic.

Доводиться теорема про псевдоаналітичність неперервних функцій, які задовольняють умові K'_σ, що є узагальненням відомої умови Д. Є. Меньшова з теорії аналітичних функцій.

В настоящей статье продолжается исследование условий псевдоаналитичности, начатое в работах [1, 2].

Через $C(D)$ и $C^k_\alpha(D)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, обозначаем классы непрерывных в области $D \subset \mathbb{C}$ функций и функций, имеющих в D непрерывные по Гельдеру с показателем α, $0 < \alpha \le 1$, k-е частные производные; полагаем $C_\alpha(D) \equiv C^o_\alpha(D)$.

Если $z \in \mathbb{C}$ и $z \ne 0$, то $\arg z$ обозначает главное значение аргумента комплексного числа z, определенное неравенствами $0 \le \arg z < 2\pi$.

***Определение* 1.** *Пусть* $\sigma = p - iq$ *и* $f = u + iv$ — *функции, определенные в области* $D \subset \mathbb{C}$. *Будем говорить, что функция* f *обладает свойствами* K'_σ *в точке* $a \in D$, *если существуют три луча* $l_1(a)$, $l_2(a)$, $l_3(a)$, *выходящие из точки* a *и лежащие на различных прямых, вдоль которых существуют пределы*

$$\lim_{\substack{\Delta z \to 0 \\ \Delta z \in E_\nu(a)}} \left[\frac{\Delta_\sigma \; f(a, \Delta z)}{\Delta z}\right] = \varphi_\nu(a), \; \nu = 1, 2, 3, \tag{1}$$

совпадающие по модулю 2π: $\varphi_1(a) = \varphi_2(a) (\mathrm{mod}\, 2\pi)$, $\varphi_2(a) = \varphi_3(a) (\mathrm{mod}\, 2\pi)$, *где*

$$\Delta_\sigma f(a, \Delta z) = \sigma(a)\,[u(a + \Delta z) - u(a)] + i[v(a + \Delta z) - v(a)],$$

$$E_\nu(a) = \{\Delta z \in \mathbb{C} : \Delta z \ne 0, \quad a + \Delta z \in l_\nu(a) \cap D, \quad \Delta_\sigma f(a, \Delta z) \ne 0\}.$$

Для краткости в этом случае будем также говорить, что вдоль $l_\nu(a)$ *существует один и тот же по* $\mathrm{mod}\, 2\pi$ *предел* $\varphi(a)$ *аргумента разностного отношения, фигурирующего в* (1).

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* D — *область в* $\mathbb{C}$, $\sigma = p - iq$ — *функция класса* $C^1_\alpha(D)$ *и* f — *непрерывная в* D *функция, имеющая свойство* K'_σ *в каждой точке* $a \in D$, *возможно, за исключением не более чем счетного их множества* S. *Тогда функция* f σ-*аналитична в* D *и имеет вторые частные производные, принадлежащие классу* $C_\gamma(D)$ *с показателем* γ, *сколь угодно близким к* α. *Кроме того, а) если* $\sigma \in C^k_\alpha(D)$, $k \ge 1$, *то* $f \in C^{k+1}_\gamma(D)$, *где* γ *сколь угодно близко к* α; *б) если* $\sigma \in C^\infty(D)$, *то* $f \in C^\infty(D)$; *в) если* σ *является аналитической функцией от* x *и* y, *то этим же свойством обладает и функция* f.

Докажем две лемы, необходимые для доказательства теоремы 1.

Лемма 1. *Если функция* f *в точке* $a \in D$ $\mathbb{R}$-*дифференцируема и удовлет-*

воряет условию K'_σ, *то она* σ-*моногенна* ([1], *определение* 2) *в этой точке.*

Доказательство. Если $\mathbb{R}$-производная $f'(a)$ равна нулю, то, очевидно, f σ-моногенна в точке a. Если же $f'(a) \neq 0$, то из леммы 2 [1] вытекает, что вдоль лучей $l_\nu(a)$, $\nu = 1, 2, 3$, существуют (не равны нулю) σ-производные числа

$$\lambda_\nu = f_z^\sigma(a) + f_{\bar z}^\sigma(a) e^{-2i\alpha_\nu}, \tag{2}$$

где α_ν — угол между лучом $l_\nu(a)$ и осью OX, а из условия K'_σ получаем равенство $\arg\lambda_1 = \arg\lambda_2 = \arg\lambda_3 = \varphi(a)$, т. е. эти σ-производные числа лежат на прямой $\arg z = \varphi(a)$. Кроме того, из (2) следует, что λ_ν лежат на окружности с центром $f_z^\sigma(a)$ и радиусом $r = \left| f_{\bar z}^\sigma(a) \right|$. Так как эта окружность и прямая $\arg z = \varphi(a)$ могут пересекаться не более чем в двух точках, то два из σ-производных чисел, например, λ_1 и λ_2, должны совпадать. В этом случае $f_{\bar z}^\sigma(a)[e^{-2i\alpha_1} - e^{-2i\alpha_2}] = 0$, $\alpha_1 - \alpha_2 \neq k\pi$, и следовательно, $f_{\bar z}^\sigma(a) = 0$, т. е. f σ-моногенна в точке a. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Пусть* f — *непрерывная в области* $D \subset \mathbb{C}$ *функция и* $F \subset D$ — *совершенное подмножество. Предположим, что* f *имеет свойство* K'_σ *во всех точках множества* $Q \subset F$ *не первой категории на* F. *Тогда найдутся непустая порция* $P = F \cap B$, *где* B — *круг, числа* $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$, $\delta = \delta(p) > 0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(p) > 0$ *такие, что из каждой точки* $a \in P$ *исходят три луча* $t_\nu(a)$, $\nu = 1, 2, 3$, *обладающие свойствами*:

а) $4\varepsilon \leq [\widehat{t_\nu(a), t_\mu(a)}] \leq \pi - 4\varepsilon$ *при* $\nu \neq \mu$, $\mu, \nu = 1, 2, 3$, $a \in P$;

б) $[\widehat{t_\nu(a'), t_\nu(a'')}] \leq \varepsilon$ $\forall\, a', a'' \in P$;

в) расстояние от множества P *до границы области* D *не меньше* 2δ;

г) существует в плоскости w *фиксированный луч* T *с начальной точкой* $w = 0$ *такой, что замкнутый угол* Ω_ε *раствора* 2ε, *с вершиной* $w = 0$ *и биссектрисой* T *содержит значения отношения*

$$\frac{\Delta_\sigma f(a, \Delta z)}{\Delta z} = \frac{\sigma(a)[u(z) - u(a)] + i[v(z) - v(a)]}{z - a}$$

для $a \in P$ *при* $a + \Delta z \in t_\nu(a)$, $\nu = 1, 2, 3$, *для всех* Δz, *удовлетворяющих неравенству* $0 < |\Delta z| \leq \delta$;

д) найдутся такие постоянные ψ, $0 < |\psi| < 2\pi$, *и* $c > 0$, *что при любом* $d > 0$ *функция* $g(z) = f(z) + de^{i\psi} f_0(z)$, *где* f_0 — *глобальный гомеоморфизм* $(f(z) \sim z$ *при* $z \to \infty)$ *уравнения*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} + \frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}\,\frac{\partial \bar f}{\partial \bar z} = 0, \tag{3}$$

удовлетворяет неравенству $|g(z) - g(a)| \geq cd\,|z - a|$ *при* $a \in P$, $z \in t_\nu(a)$, $\nu = 1, 2, 3$, $|z - a| \leq \delta$;

е) если P' — *образ множества* P *при отображении* g, *то из каждой точки* $b \in P'$ *как из вершины исходят три угла* $\Omega_\nu(b)$, $\nu = 1, 2, 3$, *раствора* ε_1 *каждый, полученных параллельным переносом фиксированной тройки углов* Ω_ν *с общей вершиной и обладающих тем свойством, что образ* $L_\nu(b)$ *(при отображении* g*) отрезка луча* $t_\nu(a)$, *имеющего длину* δ, *расположен в угле* $\Omega_\nu(b)$;

при этом $8\varepsilon_1 < [\widehat{\Omega_\nu, \Omega_\mu}] < \pi - 8\varepsilon_1$ *при* $\nu \neq \mu$, $\nu, \mu = 1, 2, 3$, *если понимать* $[\widehat{\Omega_\nu, \Omega_\mu}]$ *как угол между биссектрисами углов* Ω_ν, Ω_μ;

ж) функция g *однолистна на порции* P.

Доказательство. Для каждой точки $a \in Q$ обозначим через $\alpha(a)$ наименьший из углов между лучом $l_\nu(a)$ и прямой, проходящей через луч $l_\mu(a)$, $\mu \neq \nu$, $\mu, \nu = 1, 2, 3$, где l_ν — лучи из определения свойства K'_σ, которое, по условию, выполняется $\forall a \in Q$, и положим $Q_n = \{a \in Q : \alpha(a) \geq 1/n\}$, $n = 1, 2, \ldots$.

Так как лучи $l_\nu(a)$ лежат на различных прямых, то $\alpha(a) > 0$ $\forall\, a \in Q$ и поэтому $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$, а так как Q — не первой категории на F, то найдется такое натуральное n, что Q_n — не первой категории на F. Тогда для точек $a \in Q' \equiv Q_n$ условие а) выполняется при любом $\varepsilon \leq 1/n$ для $t_\nu(a) = l_\nu(a)$, $\nu = 1, 2, 3$. Положим $\varepsilon = 1/4n$.

Пусть $\psi_\nu(a)$, $0 \leq \psi_\nu(a) < 2\pi$, — угол между лучом $l_\nu(a)$ и осью OX. Тогда $(\psi_1(a), \psi_2(a), \psi_3(a))$ — некоторая точка из $\mathbb{R}^3$, а их множество, когда a пробегает Q', обозначим через M. Так как это множество сепарабельно, то в нем существует счетное всюду плотное подмножество $M' = \{(\psi_1(a_m), \psi_2(a_m), \psi_3(a_m))\}_{m=1}^{\infty}$. Обозначим через Q'_m множество всех тех точек $a \in Q'$, для которых $|\psi_\nu(a) - \psi_\nu(a_m)| \leq \varepsilon/2$, $\nu = 1, 2, 3$. Из плотности множества M' в M вытекает, что $Q' = \bigcup_{m=1}^{\infty} Q'_m$ и, следовательно, найдется такое m, что $Q'' = Q'_m$ — не первой категории на F. Тогда на множестве $Q'' \subset Q'$ условия а) и б) выполняются одновременно, если положить $t_\nu(a) = l_\nu(a)$, $\nu = 1, 2, 3$.

Пусть $\{e^{i\beta_s}\}_{s=1}^{\infty}$ — счетное всюду плотное подмножество единичной окружности $|z| = 1$ и T_s — луч, выходящий из начала координат и проходящий через точку $e^{i\beta_s}$, $s = 1, 2, \ldots$. Обозначим через Q''_{sp} множество всех тех точек $a \in Q''$, для которых расстояние до границы области D не меньше $2/p$ и значения отношения

$$\frac{\Delta_\sigma f(a, \Delta z)}{\Delta z} = \frac{\sigma(a)[u(z) - u(a)] + i[v(z) - v(a)]}{z - a}, \quad \Delta z = z - a,$$

принадлежат замкнутому углу $\Omega(T_s, \varepsilon)$ с вершиной в нуле, раствора 2ε и биссектрисой T_s при $z \in l_\nu(a)$, $|z - a| \leq 1/p$. Из условия K'_σ, а точнее формулы (1), и непрерывности f и σ следует

$$Q'' = \bigcup_{s,p=1}^{\infty} Q''_{sp},$$

и поэтому найдутся такие s, p, что множество $Q''' = Q''_{sp}$ — не первой категории на F. Поэтому найдется такой круг $B_1 \subset \overline{B}_1 \subset D$, что множество Q''' всюду плотно на порции $P_1 = B_1 \cap F$. Положим $\delta_1 = 1/p$; тогда для $P = P_1$ и $\delta = \delta_1$ выполняется условие в).

Определим теперь лучи $t_\nu(a)$, $\nu = 1, 2, 3$, для всех точек $a \in P_1$. Если $a \in Q''' \cap P_1$, то полагаем $t_\nu(a) = l_\nu(a)$, $\nu = 1, 2, 3$. Если же $a \in P \setminus Q'''$, то найдется последовательность точек $a_k \in Q'''$, сходящаяся к a. Переходя, если потребуется, к подпоследовательности, можно считать, что лучи $l_\nu(a_k)$ при $k \to \infty$ сходятся к некоторым лучам l_ν, которые и принимаем за лучи $t_\nu(a)$, $\nu = 1, 2, 3$. Из непрерывности f и σ, а также замкнутости угла $\Omega(T_s, \varepsilon)$ вытекает, что утверждение г) будет выполнено $\forall a \in P_1$, если положить $T = T_s$ и $\Omega_\varepsilon = \Omega(\mathrm{T}_s, \varepsilon)$, где, напомним, s, p такие, что $Q''' = Q''_{sp}$. Очевидно также, что условия а) и б), выполняющиеся на множестве $Q''' \cap P$, по непрерывности продолжаются на все множество P_1. Тем самым полностью доказаны утверждения а) – г) для $P = P_1$, $\delta = \delta_1$, $\varepsilon \le 1/n$.

Докажем утверждение д). Гомеоморфизм $f_0 = u_0 + iv_0$ уравнения (3) имеет в D непрерывную отличную от нуля σ-производную

$$\partial_\sigma f_0(a) \;=\; \lim_{z\to a} \frac{\sigma(a)\big[u_0(z) - u_0(a)\big] + i\big[v_0(z) - v_0(a)\big]}{z-a};$$

здесь, в отличие от [1], мы отказываемся от несущественного множителя $t(a)$, что упрощает выкладки, но не сказывается на окончательном результате.

Рассмотрим точку $a_0 \in P_1 = B_1 \cap F$. Тогда найдется настолько малый круг $B_2 \subset B$ с центром a_0 и диаметром $\delta_2 \le \delta_1$, что неравенство

$$\left| \frac{\sigma(a)\big[u_0(z) - u_0(a)\big] + i\big[v_0(z) - v_0(a)\big]}{z-a} - \partial_\sigma f_0(a) \right| \;\le\; \sin\varepsilon\, |\partial_\sigma f_0(a_0)| \tag{4}$$

будет выполняться $\forall a \in B_0$ и $|z - a| \le \delta_2$, и вместо P_1 будем рассматривать меньшую порцию $P_2 = B_2 \cap F$. Очевидно, что на P_2 выполняются все условия а) – г). Пусть ψ_1 — угол наклона луча T к вещественной оси и $\psi_2 = \arg \partial_\sigma f_0(a)$. Положим $\psi = \psi_1 - \psi_2$. Тогда для функции $g = u_1 + iv_1 = f + e^{i\psi} f_0$ имеем

$$\frac{\Delta_\sigma g(a, \Delta z)}{\Delta z} \;=\; \frac{\Delta_\sigma f(a, \Delta z)}{\Delta z} + d e^{i\psi} \frac{\Delta_\sigma f_0(a, \Delta z)}{\Delta z} \;=$$

$$= \frac{\sigma(a)\big[u(z) - u(a)\big] + i\big[v(z) - v(a)\big]}{z-a} + d e^{i\psi} \partial_\sigma f_0(a_0) +$$

$$+ \; d e^{i\psi} \left\{ \frac{\sigma(a)\big[u_0(z) - u_0(a)\big] + i\big[v_0(z) - v_0(a)\big]}{z-a} - \partial_\sigma f_0(a) \right\}. \tag{5}$$

В этом выражении точка $e^{i\psi}\partial_\sigma f_0(a_0)$ принадлежит биссектрисе T угла Ω_ε. Из (4) следует, что $\forall a \in P_2$ сумма последних двух слагаемых в (5) представляет собой точку $w(a)$ плоскости $\mathbb{C}$, принадлежащую углу Ω_ε, причем

$$|w(a)| \;\ge\; d\, |\partial_\sigma f_0(a_0)|\, (1 - \sin\varepsilon) \tag{6}$$

при $|z - a| \le \delta_2$.

Согласно пункту г) при $a \in P_2 \subset P_1$, $a + \Delta z \in t_\nu(a)$ и $|\Delta z| \le \delta_2 \le \delta_1$ $\Delta_\sigma f(a, \Delta z)/\Delta z \in \Omega_\varepsilon$. Поэтому из (5) и (6) следует $\forall a \in P_2$ и $|\Delta z| \le \delta_2$

$$\frac{\Delta_\sigma g(a, \Delta z)}{\Delta z} \;=\; \frac{\Delta_\sigma f(a, \Delta z)}{\Delta z} + w(a) \in \Omega_\varepsilon,$$

$$\left| \frac{\Delta_\sigma g}{\Delta z} \right| \;\ge\; d\, |\partial_\sigma f_0(a_0)|\, (1 - \sin\varepsilon).$$

Отсюда, как и в ([1], (14)), следует, что найдутся постоянная $c > 0$, не зависящая от d, и положительное $\delta_3 \le \delta_2$ такие, что неравенство $|\Delta g(a, \Delta z)/\Delta z| \ge \ge dc > 0$ будет выполнено $\forall a \in P_2$, $a + \Delta z \in t_\nu(a)$, $|\Delta z| \le \delta_3$, т. е. утверждение д) справедливо для $P = P_2$ и $\delta = \delta_3$. Докажем, что при $\Delta U_1 \ne 0$ выполняется

$$\operatorname{tg}[\arg(\Delta g(a, \Delta z))] = p(a)\operatorname{tg}[\arg(\Delta_\sigma g(a, \Delta z))] + q(a). \tag{7}$$

Действительно, так как $\Delta_\sigma g = \sigma\Delta u_1 + i\Delta v_1 = p\Delta u_1 + i[\Delta v_1 - q\Delta u_1]$, то

$$\operatorname{tg}[\arg(\Delta_\sigma g)] = \frac{\Delta v_1 - q\Delta u_1}{p\Delta u_1} = \frac{\Delta v_1}{p\Delta u_1} - \frac{q}{p}. \tag{8}$$

Отсюда $\operatorname{tg}[\arg(\Delta g)] \equiv \Delta v_1 / \Delta u_1 \equiv p \operatorname{tg}[\arg(\Delta_\sigma g)] + q$, что и требовалось доказать.

Теперь покажем, что для любой точки $a \in P_2$ найдутся такие три попарно непересекающихся угла $\Omega'_\nu(b)$, $\nu = 1, 2, 3$, с вершиной в точке $b = g(a)$, что образы начальных отрезков лучей $t_\nu(a)$ длины $\delta(a) > 0$ лежат в $\Omega'_\nu(b)$. Если бы таких углов $\Omega'_\nu(b)$ не существовало, то нашлись бы такие индексы $\mu \ne \nu$ и две последовательности $\{z'_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{z''_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящиеся к нулю, для которых $a + \Delta z'_n \in t_\nu(a)$, $a + \Delta z''_n \in t_\mu(a)$, $n = 1, 2, \ldots$, и существуют пределы

$$\lim_{n\to\infty} \arg\left[\frac{\Delta_\sigma g(a, \Delta z'_n)}{\Delta z'_n}\right] = \Phi', \quad \lim_{n\to\infty} \arg\left[\frac{\Delta_\sigma g(a, \Delta z''_n)}{\Delta z''_n}\right] = \Phi'',$$

$$\lim_{n\to\infty} \arg\left[\Delta g(a, \Delta z'_n)\right] = \psi_\nu, \quad \lim_{n\to\infty} \arg\left[\Delta g(a, \Delta z''_n)\right] = \psi_\mu,$$

причем $\psi_\nu = \psi_\mu (\operatorname{mod} 2\pi)$, а из утверждения г) следует, что $|\Phi' - \Phi''| \le 2\varepsilon$.

Обозначим через α_ν, $0 \le \alpha_\nu < 2\pi$, угол наклона луча $t_\nu(a)$ к вещественной оси и заметим, что $\Phi' - \alpha_\nu$ и $\Phi'' - \alpha_\mu$ не могут быть одновременно равны по $\operatorname{mod} 2\pi$ одному из чисел $\pi/2$ или $3\pi/2$. Действительно, если бы, например, одновременно выполнялись равенства $\Phi' - \alpha_\nu = (\pi/2)(\operatorname{mod} 2\pi)$ и $\Phi'' - \alpha_\mu = (\pi/2)(\operatorname{mod} 2\pi)$, то выполнялось бы равенство $\alpha_\nu - \alpha_\mu = \Phi' - \Phi'' \ (\operatorname{mod} 2\pi)$ и, следовательно, $|\alpha_\nu - \alpha_\mu| \le 2\varepsilon$, что противоречит утверждению а).

Рассмотрим теперь два возможных случая.

1. Предположим, что $\Phi' - \alpha_\nu$ совпадает по $\operatorname{mod} 2\pi$ с одним из чисел $\pi/2$ или $3\pi/2$, а $\Phi'' - \alpha_\mu$ это свойство не имеет. Так как

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} \arg\left[\Delta_\sigma g(a, \Delta z'_n)\right] = \Phi' - \alpha_\nu \quad (\operatorname{mod} 2\pi), \\ &\lim_{n\to\infty} \arg\left[\Delta_\sigma g(a, \Delta z''_n)\right] = \Phi'' - \alpha_\mu \quad (\operatorname{mod} 2\pi), \end{aligned} \tag{9}$$

то из (8) получаем

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\Delta v_1(a, \Delta z'_n)}{\Delta u_1(a, \Delta z''_n)}\right| = \infty,$$

т. е. ψ_ν должно совпадать по $\operatorname{mod} 2\pi$ либо с $\pi/2$, либо с $3\pi/2$, но тогда и ψ_μ, равное по $\operatorname{mod} 2\pi$ ψ_ν, имеет то же свойство, а из (8) и (9) вытекает, что это возможно лишь в случае, когда $\Phi'' - \alpha_\mu$ совпадает по $\operatorname{mod} 2\pi$ с одним из чисел $\pi/2$ или $3\pi/2$, что противоречит предположению и, таким образом, случай 1 невозможен.

2. Пусть теперь и $\Phi' - \alpha_\nu$, и $\Phi'' - \alpha_\mu$ не совпадают по $\bmod 2\pi$ ни с одним из чисел $\pi/2$ или $3\pi/2$. В этом случае из формулы (7) получаем соотношения

$$\operatorname{tg}\psi_\nu = p\operatorname{tg}(\Phi' - \alpha_\nu) + q, \quad \operatorname{tg}\psi_\mu = p\operatorname{tg}(\Phi'' - \alpha_\mu) + q$$

и, следовательно,

$$\operatorname{tg}(\psi_\nu - \psi_\mu) = p\,\frac{\operatorname{tg}(\Phi' - \alpha_\nu) - \operatorname{tg}(\Phi'' - \alpha_\mu)}{1 + [p\operatorname{tg}(\Phi' - \alpha_\nu) + q][p\operatorname{tg}(\Phi'' - \alpha_\mu) + q]}. \tag{10}$$

Числитель правой части (10) равен

$$\frac{\sin(\Phi' - \Phi'' + \alpha_\mu - \alpha_\nu)}{\cos(\Phi' - \alpha_\nu)\cos(\Phi'' - \alpha_\mu)}.$$

Так как $\psi_\nu = \psi_\mu$, то этот числитель должен быть равен нулю, что возможно лишь в случае, когда $\Phi' - \Phi'' + \alpha_\mu - \alpha_\nu = 0 \pmod{2\pi}$. Но тогда $|\alpha_\mu - \alpha_\nu|$ отличается от нуля или π не больше, чем на 2ε, что противоречит утверждению а). Тем самым доказано, что предположение о несуществовании углов $\Omega'_\nu(b)$ во всех случаях приводит к противоречию с условиями доказанной леммы.

Далее, используя метод категорий, подобно тому, как этот метод был использован в доказательстве утверждений а) – г), находим меньшую порцию $P_3 \subset \subset P_2$, константы $\varepsilon_1 > 0$, $0 < \delta \le \delta_3$, фиксированную тройку углов Ω_ν и углы $\Omega'_\nu(b)$, $\nu = 1, 2, 3$, удовлетворяющие условию е).

Используя предыдущие выкладки и почти дословно повторяя доказательство леммы 35 [3, с. 134], находим порцию $P \subset P_3$, на которой функция g однолистна. Таким образом, определены порция P, лучи $t_\nu(a)$, $\nu = 1, 2, 3$, и числа $\varepsilon, \varepsilon_1, \delta$, для которых выполняются все условия а) – ж). Лемма 2 доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Докажем сначала, что существует открытое всюду плотное подмножество $O \subset D$, на котором функция f псевдоаналитична. Пусть $V \subset \overline{V} \subset D$ — произвольная подобласть области D. Положим в лемме 2 $F = \overline{V}$ и $Q = F \setminus S$. Тогда найдется такая порция $P = \overline{B} \subset V$, где B — круг, числа $\varepsilon, \varepsilon_1, \delta > 0$ и лучи $t_\nu(a)$, $a \in P$, удовлетворяющие условиям а) – ж) этой леммы. В частности, согласно утверждению ж) функция g однолистна в круге B и, следовательно, отображает этот круг на некоторую область W. Из утверждения а) леммы 2 следует, что для обратной к g функции $h = g^{-1}$ выполнены все условия леммы 14 [3, с. 57], из которой следует, что функция h удовлетворяет в W условию Липшица с некоторой константой L и, следовательно, $\mathbb{R}$-дифференцируема почти всюду в W. Согласно лемме 36 [3, с. 135] из утверждения е) леммы 2 вытекает, что для любой точки $b \in W$, в которой существует $h'(b)$, либо якобиан h отличен от нуля, либо же $h'(b) = 0$. Если $b \in \in W \setminus g(S)$ и $h'(b) \ne 0$, то по лемме 37 [3, с. 137] функция g, а следовательно, и функция f $\mathbb{R}$-дифференцируемы в точке $a = h(b)$, а так как f, кроме того, удовлетворяет в точке a условию K'_σ, то f, а следовательно, и g σ-моногенны в точке a. Тогда h удовлетворяет в точке b уравнению Бельтрами [4, с. 58]

$$\frac{\partial h}{\partial \overline{w}} - q\frac{\partial h}{\partial w} = 0, \tag{11}$$

где

$$q(w) = \frac{\sigma(h(w))-1}{\sigma(h(w))+1}. \tag{12}$$

Очевидно также, что в точках $b \in V$, в которых $h'(b) = 0$, уравнение (11) также удовлетворяется. Поскольку h липшицева, то отсюда следует, что h является обобщенным решением уравнения (11) в смысле Соболева, а так как функция g также липшицева, то по теореме 2.4 [4, с. 104] функция h принадлежит классу $C^1_\gamma(W)$ $\forall \gamma < 1$. Отсюда следует, что обратная к ней функция g, а следовательно, и функция f непрерывно дифференцируемы в B. С учетом условия K'_σ и леммы 1 отсюда вытекает σ-аналитичность функции f в круге $B \subset V$. Из произвольности области $V \subset D$ вытекает, что точки, в которых f σ-аналитична, образуют открытое всюду плотное в D множество O.

Если множество $F = D \setminus O$ не пустое, то оно совершенно и f не является σ-аналитической ни в одной из точек $a \in F$. Пусть $G_1, G_2, \ldots$ — все компоненты открытого множества $D \setminus F$. Если для компоненты G_k найдется такая константа $d > 0$, что $|\delta_\sigma f(z)| = d |\delta_\sigma f_0(z)|$ $\forall z \in G_k$, то положим $d_k = d$, в противном случае полагаем $d_k = 0$. В лемме 2 положим $Q = F \setminus S$. Тогда найдется такая порция $P = B \cap F$, где B — круг, числа $\varepsilon, \varepsilon_1, \delta > 0$ и лучи $t_\nu(a), a \in P$, для которых справедливы утверждения а) – ж) этой леммы. Рассмотрим функцию g, $g(z) = f(z) + de^{i\psi} f_0(z)$, из утверждения д) леммы 2, где $d > 0$ выбрано так, чтобы оно не совпадало ни с одним из чисел d_k, $k = 1, 2, \ldots$. Тогда g не является константой ни в одной компоненте открытого множества $B \setminus F$. А так как для g выполнены и все остальные условия теоремы 3.30 [4, с. 219], то, уменьшив, если потребуется, круг B, можно считать, что в круге B функция g однолистна и отображает этот круг на некоторую область W. По лемме 14 [3, с. 57] обратная к g функция $h = g^{-1}$ удовлетворяет на множестве $F' = g(F \cap B)$ условию Липшица. Отсюда, как и в лемме 3 [2], с использованием рассуждений, проведенных выше, получаем, что h является обобщенным решением в смысле Соболева уравнения Бельтрами (11). Из теорем 2.14 [4, с. 110] и 2.16 [4, с. 115] вытекает, что h принадлежит некоторому классу $C_\gamma(W)$, $0 < \gamma < 1$, а так как $\sigma \in C^1_\alpha(D)$, то согласно (12) функция q также принадлежит классу $C_\gamma(W)$. Тогда по теореме 2.4 [4, с. 104] функция h принадлежит классу $C^1_\gamma(W)$. Отсюда, как и выше, вытекает, что функция f σ-аналитична в круге B и, в частности, во всех точках непустого пересечения $F \cap B$, что противоречит определению множества F. Тем самым доказано, что должно быть $F = \varnothing$, т. е. f σ-аналитична в D. Утверждения о гладкости f вытекают из теорем 3 – 5 [5, с. 134]. Теорема 1 доказана.

1. *Бондарь А. В., Лукьянова Е. А.* О структуре множеств σ-моногенности непрерывных функций // Укр. мат. жур. – 1993. – **45**, №2. – С. 226 – 232.
2. *Бондарь А. В., Лукьянова Е. А.* О псевдоаналитичности непрерывных функций с постоянным σ-растяжением // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, №4. – С. 459 – 465.
3. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. – М.: Физматгиз, 1963. – 211 с.
4. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.
5. *Положий Г. Н.* Обобщение теории аналитических функций комплексного переменного. – Киев: Изд-во Киев. ун-та, 1965. – 441 с.

Получено 03.04.92