УДК 519.21

Ю. В. Коломиец, канд. физ.-мат. наук
(Ин-т прикл. математики и механики АН Украины, Донецк)

УСРЕДНЕНИЕ СЛУЧАЙНО ВОЗМУЩЕННЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Evolutionary equations with the coefficients perturbed by diffuzion process are considered. It is proved that the solutions of the equations weakly converge, in the sense of distributions, as a small parameter tends to zero, to a unique solution of the martingale problem which corresponds to the evolutionary stochastic equation in the case where the powers of the small parameter are disjoint.

Розглядаються еволюційні рівняння з коефіцієнтами, збуреними дифузійними процесами. Доводиться слабка збіжність у розумінні розподілів розв'язків даних рівнянь при прямуванні малого параметра до нуля, до єдиного розв'язку мартингальної проблеми, що відповідає еволюційному стохастичному рівнянню, у випадку неузгодженості степенів малого параметра.

Рассматривается система уравнений

$$\frac{d}{dt}u_t^\varepsilon + A\Big(\frac{t}{\varepsilon^k}, z_t^\varepsilon\Big)u_t^\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}B\Big(\frac{t}{\varepsilon^k}, z_t^\varepsilon\Big)u_t^\varepsilon = 0, \tag{1}$$

$$dz_t^\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2}b\Big(\frac{t}{\varepsilon^k}, z_t^\varepsilon\Big)dt + \frac{1}{\varepsilon}\sigma\Big(\frac{t}{\varepsilon^k}, z_t^\varepsilon\Big)dw_t, \tag{2}$$

с начальными условиями

$$u_0^\varepsilon = u^0, \quad z_0^\varepsilon = z^0, \tag{3}$$

где $k \in (2, +\infty)$, $A(t, z)$, $B(t, z)$ — дифференциальные операторы соответственно второго и первого порядков по переменной $x \in R^n$, z_t^ε — диффузионные процессы со значениями в R^d, $b(t, z)$ — d-мерный вектор, $\sigma(t, z)$ — матрица размера $d \times d$, w_t — d-мерный винеровский процесс на некотором вероятностном пространстве $(\overline{\Omega}, F, P)$, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Изучается поведение решений u_t^ε, $t \in [0, T]$, при $\varepsilon \to 0$. Предполагается периодичность коэффициентов, входящих в уравнения системы. Известно, что в случае $k \in (0, 2)$ решения u_t^ε слабо сходятся в смысле распределений к решению проблемы мартингалов, коэффициенты которой зависят от принадлежности k одному из множеств: $(0, 2)$ и $[2]$ (см. [1, 2]). В каждом случае решение проблемы мартингалов является единственным. В работе [3] изучено асимптотическое поведение решений (1) при $\varepsilon \to 0$ в случае, когда z_t^ε — стационарный диффузионный процесс, $A(t, z) = A$, $B(t, z) = B(z)$. Доказана слабая сходимость решений к единственному решению проблемы мартингалов.

Будем пользоваться соглашением о суммируемости по повторяющимся индексам в одночленах. Буквой C будем обозначать постоянные, не зависящие от ε. Символ "$\Rightarrow$" обозначает слабую сходимость мер. Если H — гильбертово пространство, $x, y \in H$, то $x \otimes y$ — элемент $\mathfrak{L}(H)$ такой, что $(x \otimes y)u = (y, u)_H x$, $u \in H$. Обозначим через $|\cdot|$ и $(\cdot,\cdot)$ норму и скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L^2(R^n)$, через $\|\cdot\|$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ норму на $H^1(R^n)$ и отношение двойственности между $H^1(R^n)$- и $H^{-1}(R^n)$-пространством, сопряженным к пространству Соболева $H^1(R^n)$. $C_{t,z,b}^{m,l}$ — класс функций $f(t, z)$, m раз непрерывно дифференцируемых по t и l раз — по z; наличие символа b указывает на ограниченность этих функций и их производных указанного порядка. Символ $\langle g(\cdot)\rangle$ обозначает среднее по периоду периодической функции $g(z)$.

Предположим, что операторы $A(t, z)$ и $B(t, z)$ имеют вид

$$A(t,z) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\,\overline{a}_{ij}(t,z,x)\frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot)\Big) + \overline{a}_i(t,z,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \overline{a}_0(t,z,x),$$

$$B(t,z) = \overline{b}_i(t,z,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \overline{b}_0(t,z,x), \quad i,j = 1,\ldots,n,\ t\in R_+,\ x\in R^n,\ z\in R^d.$$

Обозначим через a_{ij} элементы матрицы $a = \sigma\times\sigma'$. Введем следующие предположения:

Z1. Существует постоянная $\alpha > 0$ такая, что $\forall\ t\in R_+,\ z,\xi\in R^d$

$$a_{ij}(t,z)\xi_i\xi_j \ \ge\ \alpha|\xi|^2.$$

B1. Коэффициенты $\overline{b}_i \in C^3_{x,b}$, $\overline{b}_0 \in C^2_{x,b}$, $\overline{a}_{ij}\in C^1_{x,b}$, $\overline{a}_i, \overline{a}_0 \in C^0_{x,b}$.

B2. Существует постоянная $\gamma > 0$ такая, что $\forall\ x,\eta\in R^n,\ t\in R_+,\ z\in R^d$

$$\overline{a}_{ij}(t,z,x)\eta_i\eta_j \ \ge\ \gamma|\eta|^2.$$

B3. Функция $u^0\in H^1(R^n)$.

ZB1. Коэффициенты операторов $A(t,z)$, $B(t,z)$, коэффициенты b_j, a_{ij}, $i,j = 1,\ldots,d$, являются периодическими по t,z с периодом 1 функциями из класса $C^{1,2}_{t,z}$.

При этих предположениях выполнены условия $A_1 - A_5$ [4] при $p = 2$, $H = L^2(R^n)$, $V = H^1(R^n)$, $f = 0$ и, следовательно, уравнение (1) имеет единственное V-решение и существует его H-непрерывная модификация. Кроме того, $\forall\ T > 0$

$$M\sup_{t\le T}|u^\varepsilon_t|^2 + M\int_0^t \|u^\varepsilon_t\|^2\,dt \ \le\ C(\varepsilon,T)M|u^0|^2.$$

Зафиксируем $T > 0$ и, следуя [5], введем пространство

$$\Omega = C([0,T];\overline{L^2(R^n)}) \cap L^2(0,T;H^1(R^n)),$$

наделенное супремумом из топологий равномерной сходимости на $C([0,T];\overline{L^2(R^n)})$ ($\overline{L^2(R^n)}$ обозначает пространство $L^2(R^n)$ со слабой топологией) и слабой топологии на $L^2(0,T;H^1(R^n))$, $\mathcal{F}$ — борелевская σ-алгебра на Ω. Определим процесс $u_t(\omega) = \omega(t)$ и поток σ-алгебр на $\mathcal{F}_t = \sigma\{u_r,\ r\in[0,t]\}$.

Будем говорить, что мера μ на $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathcal{F}_t)$ является решением проблемы мартингалов с коэффициентами $\hat{A}$, $R(u)$ [5] (в дальнейшем П. М. $(\hat{A}, R(u))$), если $\forall\ \theta\in H^1(R^n)$

$$N^\theta_t \ =\ (u_t,\theta) - (u^0,\theta) + \int_0^t \langle \hat{A}u_r,\theta\rangle dr$$

является $(\mu - \mathcal{F}_t)$-мартингалом, квадратическая вариация которого имеет вид $\langle N^\theta\rangle_t = \int_0^t (R(u_r)\theta,\theta)\,dr$.

При фиксированном k для всех $\varepsilon > 0$ через μ^ε_k будем обозначать вероятностную меру на $(\Omega,\ \mathcal{F})$, порождаемую $\{u^\varepsilon_t,\ t\in[0,T]\}$. При каждом k доказывается слабая компактность семейства мер $\{\mu^\varepsilon_k,\ \varepsilon > 0\}$ на $(\Omega,\ \mathcal{F})$, затем показывается, что любая предельная точка μ^0 является единственным решением проблемы мартингалов с определенными коэффициентами, не зависящими от $k\in(2,+\infty)$.

Итак, введем разбиение интервала $(2, +\infty)$ точками $(2p+1)p^{-1}$, $p \in N$, на множества

$$\ldots\left(\frac{2p+3}{p+1}, \frac{2p+1}{p}\right], \ldots, \left(\frac{7}{3}, \frac{5}{2}\right], \left(\frac{5}{2}, 3\right], \ (3, +\infty).$$

Интервал с правым концом $(2p+1)p^{-1}$ будем называть интервалом I_p, интервал $(3, +\infty)$ — интервалом I_0. Введем операторы

$$L = \frac{1}{2} a_{ij}(t, z) \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_i} + b_i(t, z) \frac{\partial}{\partial z_i},$$

$$\overline{L} = \frac{1}{2} \langle a_{ij}(\cdot, z)\rangle \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial z_i} + \langle b_i(\cdot, z)\rangle \frac{\partial}{\partial z_i},$$

и рассмотрим уравнение

$$\overline{L}^* h(z) = 0 \tag{4}$$

($*$ обозначает формальную сопряженность оператора). Известно [6], что уравнение (4) имеет единственное периодическое решение, удовлетворяющее условию $\langle h(\cdot)\rangle = 1$ и имеющее ту же гладкость, что и коэффициенты оператора $\overline{L}$.

Сформулируем дополнительно два условия:

ZB2. Если $k \in I_p$, $p \geq 1$, то коэффициенты b_j, $\overline{b}_i$, a_{mj}; $i = 1, \ldots, n$; $m, j = 1, \ldots, d$, принадлежат классу C_z^{p+1}.

ZB3. Для всех $x \in R^n$, $j = 1, \ldots, n$,

$$\langle\langle \overline{b}_j(\cdot, \cdot, x) h(\cdot)\rangle\rangle = 0.$$

Последнее условие является существенно важным в задачах такого типа и является условием согласованности уравнений системы (1), (2).

Лемма 1. *Пусть* u_t^ε *— решение системы* (1)–(3). *Тогда* $\exists\, C > 0$ *такая, что* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, k \in (2, +\infty)$

$$M\left\{\sup_{0 \leq t \leq T} |u_t^\varepsilon|^4\right\} + M\int_0^T |u_s^\varepsilon|^2 \| u_s^\varepsilon\|^2\, ds \leq C, \quad M\int_0^T \| u_s^\varepsilon\|^2\, ds \leq C.$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Пусть $k \in I_p$. Введем функцию $\varphi(u) = |u|^4$ и определим функции $g_i^0(z, x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, как решения уравнений

$$\overline{L}\, g_i^0(z, x) = \langle \overline{b}_i(\cdot, z, x)\rangle, \tag{5}$$

удовлетворяющих условиям $\langle g_i^0(\cdot, x)\rangle = 0$ $\forall\, i$ (x — параметр). Из условий ZB2, ZB3 следует существование единственного решения уравнения (5) из класса C_z^{p+1} для всех i [6].

Введем вспомогательную функцию

$$f_i^0(t, z, x) = -\int_0^t (L g_i^0(z, x) - \overline{b}_i(r, z, x))\, dr,$$

которая является периодической по t и z с периодом 1 из класса $C_{t,z}^{2,p+1}$. Далее рекуррентным способом определим функции $g_i^j(z, x)$ и $f_i^j(t, z, x)$, $j = 1, \ldots, p$, $i = 0, 1, \ldots, n$:

$$\overline{L}\, g_i^j(z, x) = -\langle L f_i^{j-1}(\cdot, z, x)\rangle, \tag{6}$$

$$\langle g_i^j(\cdot, x)\rangle = 0, \tag{7}$$

$$f_i^j(t, z, x) = -\int_0^t (L g_i^j(z, x) - L f_i^{j-1}(r, z, x))\, dr.$$

Функции $f_i^j(t, z, x)$ являются 1-периодическими по t и z. Для существования решений уравнений (6) необходимо выполнение следующего условия:

ZB4. Для всех i, j, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, p-1$, $\langle\langle L f_i^j(\cdot, \cdot, x) h(\cdot)\rangle\rangle = 0$.

Соотношение (7) фиксирует единственное решение (6) при каждых i и j. Определим оператор

$$G_j(z) = g_i^j(z, x)\frac{\partial}{\partial x_i} + g_0^j(z, x),$$

$$F_j(t, z) = f_i^j(t, z, x)\frac{\partial}{\partial x_i} + f_0^j(t, z, x), \; j = 0, 1, 2, \ldots, p,$$

и введем функции

$$\tilde{G}_j(z, u) = (G_j(z)u, \varphi'(u)), \quad \tilde{F}_j(t, z, u) = (F_j(t, z)u, \varphi'(u)),$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$\overline{L}\,\tilde{G}_0(z, u) = \langle (B(\cdot, z)u, \varphi'(u))\rangle, \quad \overline{L}\,\tilde{G}_m(z, u) = \langle L\,\tilde{F}_{m-1}(\cdot, z, u)\rangle, \; m = 1, \ldots, p.$$

Применив формулу Ито, запишем приращение функции

$$\varphi(u_t^\varepsilon) + \sum_{i=0}^{p} \varepsilon^{i(k-2)}\Big[\varepsilon\,\tilde{G}_i(z_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon) + \varepsilon^{k-1}\tilde{F}_i\Big(\frac{t}{\varepsilon^k}, z_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon\Big)\Big].$$

Произведя сокращения и обозначив операторы нулевого порядка $G_i(z) + G_i^*(z)$ и $F_i(t, z) + F_i^*(t, z)$ соответственно через $\hat{G}_i(z)$ и $\hat{F}_i(t, z)$, получим

$$|u_t^\varepsilon|^4 + 2|u_t^\varepsilon|^2 \sum_{i=0}^{p} \varepsilon^{i(k-2)}\Big[\varepsilon\,(\hat{G}_i(z_t^\varepsilon)u_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon) + \varepsilon^{k-1}\Big(\hat{F}_i\Big(\frac{t}{\varepsilon^k}, z_t^\varepsilon\Big)u_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon\Big)\Big] +$$

$$+ 4\int_0^t \Big\langle A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big\rangle |u_r^\varepsilon|^2\, dr = |u^0|^4 + 2|u^0|^2 \sum_{i=0}^{p} \varepsilon^{i(k-2)}\Big[\varepsilon(\hat{G}_i(z^0)\,u^0, u^0) +$$

$$+ \varepsilon^{k-1}(\hat{F}_i(0, z^0)u^0, u^0)\Big] - 4\int_0^t \Big\langle\Big[\varepsilon A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big) +$$

$$+ B\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)\Big]u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big\rangle\Big(\sum_{i=0}^{p} \varepsilon^{i(k-2)}\,\hat{G}_i(z_r^\varepsilon)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big)\, dr - 4\int_0^t \Big\langle\Big[\varepsilon A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big) +$$

$$+ B\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)\Big]u_r^\varepsilon, \sum_{i=0}^{p} \varepsilon^{i(k-2)}\,\hat{G}_i(z_r^\varepsilon)u_r^\varepsilon\Big\rangle |u_r^\varepsilon|^2\, dr - 4\int_0^t \Big\langle\Big[\varepsilon A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big) +$$

$$+ B\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)\Big]u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big\rangle\Big(\sum_{i=0}^{p} \varepsilon^{(i+1)(k-2)}\,\hat{F}_i\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big)\, dr -$$

$$- 4\int_0^t \Big\langle\Big[\varepsilon A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big) + B\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)\Big]u_r^\varepsilon, \sum_{i=0}^{p} \varepsilon^{(i+1)(k-2)}\,\hat{F}_i\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)u_r^\varepsilon\Big\rangle |u_r^\varepsilon|^2 dr -$$

$$- \varepsilon^{(p+1)(k-2)-1}\, 2\int_0^t |u_r^\varepsilon|^2\Big(L\hat{F}_p\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big)\, dr +$$

$$2\int_0^t \sum_{i=0}^p \varepsilon^{i(k-2)}\Big[\Big(\nabla_z \hat{G}_i(z_r^\varepsilon)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big) + \varepsilon^{k-2}\Big(\nabla_z \hat{F}_i\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big)\Big]|u_r^\varepsilon|^2 \sigma\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)dw_r.$$

Далее, использовав свойство коэрцитивности оператора $A(t, z)$ в виде $\langle A(t, z)u, u\rangle + \overline{\lambda}|u|^2 \geq \overline{\gamma}\|u\|^2$ при положительных $\overline{\lambda}$ и $\overline{\gamma}$, вычислим математическое ожидание полученного выражения, и для достаточно малых ε будем иметь

$$M\Big\{\sup_{s\le t}|u_s^\varepsilon|^4\Big\} + \overline{\gamma}M\int_0^t |u_r^\varepsilon|^2\|u_r^\varepsilon\|^2\,dr \le$$

$$\le C|u^0|^4 + CM\int_0^t |u_r^\varepsilon|^4\,dr + CM\Big\{\sup_{s\le t}\Big|\int_0^s \sum_{i=0}^p \Big[\Big(\nabla_z \hat{G}_i(z_r^\varepsilon)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big) +$$

$$+ \Big(\nabla_z \hat{F}_i\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)u_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big)\Big]|u_r^\varepsilon|^2 \sigma\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)dw_r\Big|\Big\}.$$

Стохастический интеграл в последнем выражении является локальным мартингалом по отношению к последовательности $\tau_n = \inf\{t:\ |u_t^\varepsilon|^4 \ge n\}\wedge T$. Применяя неравенство Дэвиса, окончательно имеем

$$\frac{1}{2}M|u_s^\varepsilon|^4 \le \frac{1}{2}M\Big\{\sup_{s\le t}|u_s^\varepsilon|^4\Big\} + \overline{\gamma}M\int_0^t |u_r^\varepsilon|^2\|u_r^\varepsilon\|^2\,dr \le C|u^0|^4 + CM\Big(\int_0^t |u_r^\varepsilon|^4\,dr\Big).$$

Отсюда после применения леммы Гронуолла получаем справедливость первого неравенства леммы.

Второе неравенство доказывается аналогично.

Пусть $\theta \in H^3(R^n)$, $\eta > 0$, $\overline{\omega} \in \overline{\Omega}$. Определим модуль непрерывности функции $(u_t^\varepsilon, \theta)$

$$\gamma_\varepsilon(\overline{\omega}, \eta) = \sup\{|(u_t^\varepsilon(\overline{\omega}), \theta) - (u_r^\varepsilon(\overline{\omega}), \theta)|,\ |t-r| \le \eta,\ r, t \in [0, T]\}.$$

Лемма 2. *Существует R_+-значная функция $\rho(\nu, \eta)$, определенная для $0 < \nu \le 1$ и $0 < \eta \le T$, такая, что $\forall\, k \in (2, +\infty)$:*

1) *для всех фиксированных $\nu \in (0, 1]$ $\rho(\nu, \eta) \to 0$ при $\eta \to 0$;*

2) $P(\gamma_\varepsilon(\overline{\omega}, \eta) \le \rho(\nu, \eta)\ \ \forall\, \eta \in]0, T]) \ge 1 - \nu$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\nu \in (0, 1]$.

Доказательство. Пусть $k \in I_p$. Использовав определенные в лемме 1 операторы $G_i(z)$ и $F_i(t, z)$, $i = 0, 1, \ldots, p$, введем в рассмотрение функцию

$$\delta_t^\varepsilon = (u_t^\varepsilon, \theta) - \Big(u_t^\varepsilon, \sum_{i=0}^p \varepsilon^{i(k-2)}\Big[\varepsilon G_i^*(z_t^\varepsilon) + \varepsilon^{k-1}F_i^*\Big(\frac{t}{\varepsilon^k}, z_t^\varepsilon\Big)\Big]\theta\Big)$$

и запишем ее приращение, используя формулу Ито. Произведя сокращения, получим

$$\delta_t^\varepsilon - \delta_0^\varepsilon + \int_0^t \Big(u_r^\varepsilon, A^*\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)\theta\Big)dr - \int_0^t \Big(u_r^\varepsilon, \Big[\varepsilon A^*\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big) +$$

$$+ B^*\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)\Big]\sum_{i=0}^p \varepsilon^{i(k-2)}\Big[G_i^*(z_r^\varepsilon) + \varepsilon^{k-2}F_i^*\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)\Big]\theta\Big)dr -$$

$$- \int_0^t \Big(u_r^\varepsilon, \varepsilon^{(k-2)(p+1)-1}LF_p^*\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)\theta\Big)dr = \sum_{i=0}^p \varepsilon^{i(k-2)}(N_i^{(\varepsilon)}(t) + \varepsilon^{k-2}D_i^{(\varepsilon)}(t)),$$

где

$$N_i^{(\varepsilon)}(t) = \int_0^t \left(u_r^\varepsilon, \nabla_z G_i^*(z_r^\varepsilon)\theta \right) \sigma\left(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \right) dw_r,$$

$$D_i^{(\varepsilon)}(t) = \int_0^t \left(u_r^\varepsilon, \nabla_z F_i^*\left(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \right)\theta \right) \sigma\left(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \right) dw_r.$$

Воспользовавшись неравенством Буркхольдера – Ганди для всех $m = 0, 1, \dots$ $\dots, p$, будем иметь

$$M\,|N_m^{(\varepsilon)}(t) - N_m^{(\varepsilon)}(s)|^4 \le CM\left\{ \left[\int_s^t \left(u_r^\varepsilon, \frac{\partial}{\partial z_i} G_m^*(z_r^\varepsilon)\theta \right) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times \left(u_r^\varepsilon, \frac{\partial}{\partial z_j} G_m^*(z_r^\varepsilon)\theta \right) a_{ij}\left(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \right) dr \right]^2 \right\} \le C\,|t-s|^2, \; t > s.$$

Аналогичную оценку можно записать для $D_m^{(\varepsilon)}(t)$. Таким образом,

$$M\,|\delta_t^\varepsilon - \delta_s^\varepsilon|^4 \le |t-s|^2 (C + C(\varepsilon)),$$

где $C(\varepsilon) \to 0$, убывая при $\varepsilon \to 0$. Далее доказательство леммы аналогично доказательству предложения 2.4 из [3].

Из лемм 1, 2 вытекает [3] следующее утверждение.

Теорема 1. *Семейство вероятностных мер* $\{\mu_k^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ *на* $(\Omega, \mathcal{F})$ *слабо компактно при любом* $k \in (2, +\infty)$.

Пусть μ^0 — некоторая предельная точка семейства $\{\mu_k^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$, $k \in (2, +\infty)$. Введем операторы

$$\hat{A} = \langle\langle [A(\cdot,\cdot) + G_0(\cdot)B(\cdot,\cdot)]\, h(\cdot) \rangle\rangle,$$

$$R(u) = -\langle\langle (G_0(\cdot)u \otimes B(\cdot,\cdot)u + B(\cdot,\cdot)u \otimes G_0(\cdot)u)\, h(\cdot) \rangle\rangle.$$

Оператор $G_0(z)$ определен в лемме 1.

Теорема 2. *Для любого* $k \in (2, +\infty)$ *мера* μ^0 *является решением П. М.* $(\hat{A}, R(u))$.

Доказательство. Согласно [5] достаточно показать, что $\forall\, \theta \in H^4(R^n)$ и функций $\varphi(x) = x$ или $\varphi(x) = x^2$ выражение

$$\varphi((u_t, \theta)) - \varphi((u^0, \theta)) + \int_0^t \langle \hat{A} u_r, \theta \rangle \varphi'((u_r, \theta))\, dr - \frac{1}{2}\int_0^t (R(u_r)\theta, \theta)\, \varphi''((u_r, \theta))\, dr$$

является $(\mu - \mathcal{F}_t)$-мартингалом.

Произвольным образом выберем интервал I_p. Пусть $k \in I_p$. При каждом $i =$ $= 0, 1, \dots, p$ определим функции

$$\overline{G}_i(z, u) = (G_i(z)u, \theta)\varphi'((u, \theta)), \quad \overline{F}_i(t, z, u) = (F_i(t, z)u, \theta)\varphi'((u, \theta)),$$

которые согласно (5) и (6) удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\overline{L}\,\overline{G}_0(z, u) = \langle (B(\cdot, z)u, \theta) \rangle \varphi'((u, \theta)),$$

$$\overline{L}\,\overline{G}_m(z, u) = -\langle L\overline{F}_{m-1}(\cdot, z, u) \rangle, \; m = 1, \dots, p.$$

Пусть $U_s\colon \Omega \to R$ — ограниченный $\mathcal{F}_s$-согласованный функционал. Воспользовавшись формулой Ито, запишем приращение функции

$$\varphi((u_t^\varepsilon, \theta)) + \sum_{i=0}^p \varepsilon^{i(k-2)} \left[\varepsilon \overline{G}_i(z_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon) + \varepsilon^{k-1} \overline{F}_i\left(\frac{t}{\varepsilon^k}, z_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon \right) \right]$$

при $t > s$ и возьмем условное математическое ожидание

$$M\Big\{ U_s(u^\varepsilon)\Big[\varphi((u_t^\varepsilon, \theta)) - \varphi((u_s^\varepsilon, \theta)) + \int_s^t \Big\langle \Big[A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) +$$

$$+ G_0(z_r^\varepsilon) B\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) \Big] u_r^\varepsilon, \theta \Big\rangle \varphi'((u_r^\varepsilon, \theta)) dr + \int_s^t \Big(B\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) u_r^\varepsilon, \theta \Big) \Big(G_0(z_r^\varepsilon) u_r^\varepsilon, \theta \Big) \times$$

$$\times \varphi''((u_r^\varepsilon, \theta)) dr \Big] \Big\} = \sum_{i=0}^{p} \varepsilon^{i(k-2)} M\Big\{ U_s(u^\varepsilon)\Big[\varepsilon(\overline{G}_i(z_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon) - \overline{G}_i(z_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon)) +$$

$$+ \varepsilon^{k-1}\Big(\overline{F}_i\Big(\frac{s}{\varepsilon^k}, z_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon \Big) - \overline{F}_i\Big(\frac{t}{\varepsilon^k}, z_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon \Big) \Big) \Big] \Big\} - \varepsilon M\Big\{ U_s(u^\varepsilon) \times$$

$$\times \Big[\int_0^t \Big\langle A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) u_r^\varepsilon, G_0^*(z_r^\varepsilon)\theta \Big\rangle \varphi'((u_r^\varepsilon, \theta)) dr + \int_s^t \Big\langle A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) u_r^\varepsilon, \theta \Big\rangle \times$$

$$\times (G_0(z_r^\varepsilon) u_r^\varepsilon, \theta)\, \varphi''((u_r^\varepsilon, \theta))\, dr \Big] \Big\} - \sum_{i=0}^{p} \varepsilon^{(i+1)(k-2)} M\Big\{ U_s(u^\varepsilon)\Big[\int_s^t \Big\langle \Big[\varepsilon A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) +$$

$$+ B\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) u_r^\varepsilon, G_i^*\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big)\theta \Big\rangle \varphi'((u_r^\varepsilon, \theta)) dr +$$

$$+ \int_s^t \Big\langle \Big[\varepsilon A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) + B\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) \Big] u_r^\varepsilon, \theta \Big\rangle \Big(F_i\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) u_r^\varepsilon, \theta \Big)\, \varphi''((u_r^\varepsilon, \theta)) dr \Big] \Big\} -$$

$$- \sum_{i=0}^{p-1} \varepsilon^{(i+1)(k-2)} M\Big\{ U_s(u^\varepsilon)\Big[\int_s^t \Big\langle \Big[\varepsilon A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) +$$

$$+ B\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) \Big] u_r^\varepsilon, G_{i+1}^*(z_r^\varepsilon)\theta \Big\rangle \varphi'((u_r^\varepsilon, \theta)) dr +$$

$$+ \int_s^t \Big\langle \Big[\varepsilon A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) + B\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) \Big] u_r^\varepsilon, \theta \Big\rangle \Big(G_{i+1}(z_r^\varepsilon) u_r^\varepsilon, \theta \Big)\, \varphi''((u_r^\varepsilon, \theta)) dr \Big] \Big\} -$$

$$- \varepsilon^{(p+1)(k-2)-1} M\Big\{ U_s(u^\varepsilon)\Big[\int_s^t L\overline{F}_p\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon \Big) dr \Big] \Big\}. \qquad (8)$$

Определим функции $k_{ij}(z, x)$, $l_{ij}(z, x)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $m_{\lambda\mu}(z, x, y)$, $\lambda, \mu = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$, как решения соответствующих уравнений

$$\overline{L} k_{ij}(z, x) = \langle\langle \overline{a}_{ij}(\cdot, \cdot, x) h(\cdot) \rangle\rangle - \langle \overline{a}_{ij}(\cdot, z, x) \rangle, \quad \langle k_{ij}(\cdot, x) \rangle = 0;$$

$$\overline{L} l_{ij}(z, x) = \langle\langle g_i^0(\cdot, x) \overline{b}_j(\cdot, \cdot, x) h(\cdot) \rangle\rangle - \langle g_i^0(z, x) \overline{b}_j(\cdot, z, x) \rangle, \quad \langle l_{ij}(\cdot, x) \rangle = 0;$$

$$\overline{L} m_{ij}(z, x, y) = \langle\langle \overline{b}_j(\cdot, \cdot, x) g_j^0(\cdot, y) h(\cdot) \rangle\rangle - \langle \overline{b}_i(\cdot, z, x) g_j^0(z, y) \rangle, \quad \langle m_{ij}(\cdot, x, y) \rangle = 0.$$

Поскольку средние по периоду правых частей этих уравнений с функцией $h(z)$ равны нулю, то эти уравнения имеют единственные периодические решения из класса C_z^2. Аналогично определяются функции $k_i(z, x)$ и $l_i(z, x)$. Определим операторы

$$\mathcal{K}(z) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\Big[k_{ij}(z, x) \frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot) \Big] + k_i(z, x) \frac{\partial}{\partial x_i} + k_0(z, x),$$

$$\mathfrak{L}(z) = -\frac{\partial}{\partial x_j}\Big[l_{ij}(z,x)\frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot)\Big] + l_i(z,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + l_0(z,x).$$

Обозначим $u_i(x) = \dfrac{\partial}{\partial x_i}u(x)$, $u_0(x) = u(x)$ и введем функцию

$$Y(z,u) = \langle (\mathcal{K}(z) + \mathfrak{L}(z))u, \theta\rangle \varphi'((u,\theta)) +$$

$$+ \int_{R^n}\int_{R^n}\sum_{i,j=0}^{n} m_{ij}(z,x,y)u_i(x)u_j(y)\theta(x)\theta(y)\,dx\,dy\,\varphi''((u,\theta)),$$

которая удовлетворяет соотношению

$$\bar{L}Y(z,u) = \mathcal{M}(z,u), \tag{9}$$

где $\mathcal{M}(z,u) = \Big\langle [\langle\langle A(\cdot,\cdot) + G_0(\cdot)B(\cdot,\cdot)h(\cdot)\rangle\rangle - \langle (A(\cdot,z) + G_0(z)B(\cdot,z))\rangle]u, \theta\Big\rangle \times$

$\times\, \varphi'((u,\theta)) + [\langle\langle (B(\cdot,\cdot)u,\theta)(G_0(\cdot)u,\theta)h(\cdot)\rangle\rangle - (\langle B(\cdot,z)\rangle u,\theta)(G_0(z)u,\theta)]\varphi''((u,\theta))$.

Нам понадобится еще функция $V(t,z,u)$, которую можно сконструировать аналогично функции $Y(z,u)$, периодическая по t и z с периодом 1 из класса $C^{2,2}_{t,z}$ и удовлетворяющая следующему соотношению:

$$V(t,z,u) = -\int_0^t \Big\{ LY(z,u) + \Big\langle [A(r,z) + G_0(z)B(r,z) -$$

$$- \Big\langle [A(\cdot,z) + G_0(z)B(\cdot,z)]\Big\rangle]u,\theta\Big\rangle\varphi'((u,\theta)) +$$

$$+ [(B(r,z)u,\theta)(G_0(z)u,\theta) - (\langle B(\cdot,z)\rangle u,\theta)(G_0(z)u,\theta)]\varphi''((u,\theta))\Big\}\,dr. \tag{10}$$

Далее, применив формулу Ито, запишем приращение функции

$$\varepsilon^2 Y(z_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon) + \varepsilon^k V\Big(\frac{t}{\varepsilon^k}, z_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon\Big)$$

и, взяв условное математическое ожидание, получим

$$\varepsilon^2 M\Big\{ U_s(u^\varepsilon)\Big[Y(z_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon) - Y(z_t^\varepsilon, u_t^\varepsilon) + \int_s^t \Big\langle A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)u_r^\varepsilon, \frac{\partial}{\partial u}Y(z_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon)\Big\rangle dr\Big]\Big\} +$$

$$+ \varepsilon^k M\Big\{ U_s(u^\varepsilon)\Big[V\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big) - V\Big(\frac{s}{\varepsilon^k}, z_s^\varepsilon, u_s^\varepsilon\Big) +$$

$$+ \int_s^t \Big\langle A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)u_r^\varepsilon, \frac{\partial}{\partial u}V\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big)\Big\rangle dr\Big]\Big\} +$$

$$+ \varepsilon M\Big\{ U_s(u^\varepsilon)\Big[\int_s^t \Big(B\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)u_r^\varepsilon, \frac{\partial}{\partial u}Y(z_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon)\Big)\,dr\Big]\Big\} +$$

$$+ \varepsilon^{k-1} M\Big\{ U_s(u^\varepsilon)\Big[\int_s^t \Big(B\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon\Big)u_r^\varepsilon, \frac{\partial}{\partial u}V\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big)\Big)\,dr\Big]\Big\} -$$

$$- \varepsilon^{k-2} M\Big\{ U_s(u^\varepsilon)\Big[\int_s^t LV\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big)dr\Big]\Big\} =$$

$$= M\Big\{ U_s(u^\varepsilon)\Big[\int_s^t \Big[LY(z_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon) + \frac{\partial}{\partial r}V\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon, u_r^\varepsilon\Big)\Big]dr\Big]\Big\}. \tag{11}$$

Правая часть (11) с учетом (9), (10) примет вид

$$M\Big\{ U_s(u^\varepsilon)\Big[\int_s^t \Big\langle \langle\langle A(\cdot,\cdot)h(\cdot)\rangle\rangle u_r^\varepsilon, \theta \Big\rangle - \Big\langle A\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) u_r^\varepsilon, \theta \Big\rangle +$$

$$+ \Big\langle \langle\langle G_0(\cdot)B(\cdot,\cdot)h(\cdot)\rangle\rangle u_r^\varepsilon, \theta \Big\rangle - \Big\langle G_0(z_r^\varepsilon)B\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) u_r^\varepsilon, \theta \Big\rangle \Big]\varphi'((u_r^\varepsilon, \theta))dr +$$

$$+ \int_s^t \Big[\langle\langle (B(\cdot,\cdot)u_r^\varepsilon, \theta)(G_0(\cdot)u_r^\varepsilon, \theta)h(\cdot)\rangle\rangle -$$

$$- \Big(B\Big(\frac{r}{\varepsilon^k}, z_r^\varepsilon \Big) u_r^\varepsilon, \theta \Big)(G_0(z_r^\varepsilon)u_r^\varepsilon, \theta) \Big]\varphi''((u_r^\varepsilon, \theta))dr \Big] \Big\}.$$

Теперь, прибавив к (8) соотношение (11) и перейдя к интегрированию по мере μ_k^ε (математическое ожидание по мере μ_k^ε обозначим через M_k^ε), получим в левой части выражение

$$M_k^\varepsilon\Big\{ U_s(u)\Big[\varphi((u_t, \theta)) - \varphi((u_s, \theta)) + \int_s^t \Big\langle \langle\langle A(\cdot,\cdot) + G_0(\cdot)B(\cdot,\cdot)h(\cdot)\rangle\rangle u_r, \theta \Big\rangle \varphi'((u_r, \theta))dr +$$

$$+ \int_s^t \langle\langle (B(\cdot,\cdot)u_r, \theta)(G_0(\cdot)u_r, \theta)h(\cdot)\rangle\rangle\ \varphi''((u_r, \theta))dr \Big] \Big\},$$

в котором под знаком математического ожидания стоит непрерывный ограниченный функционал на Ω. Следовательно, в силу оценки леммы 1 можно перейти к пределу по подпоследовательности ε_m такой, что $\varepsilon_m \to 0$ и меры $\mu_k^{\varepsilon_m}$ сходятся слабо. В правую часть входят ограниченные слагаемые, содержащие сомножителем ε в некоторой положительной степени. Поэтому правая часть стремится к нулю. Заметим, что предельные коэффициенты не зависят от $k \in I_p$. В силу произвольности выбора интервала I_p получаем утверждение теоремы.

Как и в теореме 2 из [2], легко получить следующие два утверждения.

Лемма 3. *Для всех* $u, \theta \in H^1(R^n)$

$$(R(u)\theta, \theta) = \langle\langle a_{ij}(\cdot,\cdot)(G_0^{(i)}(\cdot)u, \theta)(G_0^{(j)}(\cdot)u, \theta)h(\cdot)\rangle\rangle.$$

Здесь $G_0^{(i)}(z)$ *обозначает оператор* $G_0(z)$, *коэффициенты которого продифференцированы по* z_i.

Теорема 3. *Мера* μ^0 *— единственное решение П. М.* $(\hat{A}, R(u))$.

Осталось заметить, что из теорем 1–3 вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Для любого* $k \in (2, +\infty)$ *при* $\varepsilon \to 0$ $\mu_k^\varepsilon \Rightarrow \mu^0$ *— единственному решению П. М.* $(\hat{A}, R(u))$.

1. *Коломиец Ю. В.* Усреднение эволюционных уравнений с возмущенными коэффициентами // Бесконечномерный стохастический анализ. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1990. – С. 67–76.
2. *Коломиец Ю. В.* Усреднение эволюционных уравнений со случайными возмущениями // Теория случайн. процессов и ее прил. – Киев: Наук. думка, 1990. – С. 72–81.
3. *Bouc R., Pardoux E.* Asymptotic analysis of P. D. E. s with wide-band noise disturbances, and expansion of the moments // Stochast. Anal. and Appl. – 1984. – **2**, № 4. – P. 369–422.
4. *Крылов Н. В., Розовский Б. Л.* Об эволюционных стохастических уравнениях // Итоги науки и техники. Совр. пробл. математики / ВИНИТИ. – 1979. – **14**. – С. 72–147.
5. *Viot M.* Solutiouce et unicite de diffusions a valeurs un espace de Hilbert // Ann. Inst. H. Poincare. – 1974. – № 10. – 152 p.
6. *Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. – Amsterdam etc.: North-Holland Publ., 1978. – 700 p.

Получено 22.10.92