Тогда если $x = x(t) \in L^{\infty}$ — решение уравнения (2), где $v = v(t) \in L^{\infty}$ и $|v(t)| \leqslant \alpha w(t)$ μ-п. в., то существует такая постоянная c, $|c| \leqslant \alpha$, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{t \in T \setminus T_k} |x(t)/z(t) - c| \to 0, \quad k \to \infty. \tag{12}$$

Доказательство. Из условия единственности решения уравнения $z_0 = Az_0$, в силу упоминавшихся в начале работы результатов Л. В. Канторовича, следует, что z, x — главные решения уравнений (1), (2) соответственно. Для применения теоремы 1 в качестве компонент X_k K-пространства $X = L^{\infty}$ возьмем компоненты, порождаемые характеристическими функциями μ-измеримых множеств T_k. Тогда пространство $X_0 = \{y(t) \in L^{\infty} : \exists k$, что $y(t) = 0$ для μ-п. в. $t \in T \setminus T_k\}$ и условие 1 теоремы 1 будет выполнено с функционалом $f(y) = \int\limits_T y(t)\, d\mu(t)$ в силу условия 1 теоремы 2. Условие 2 теоремы 2 обеспечивает выполнимость условия 2 из теоремы 1 [5].

Таким образом, по теореме 1 существует такая постоянная c, $|c| \leqslant \alpha$, что $\forall \varepsilon > 0$ найдется номер n, для которого $|x(t) - cz(t)| \leqslant \varepsilon z(t)$ для μ-п. в. $t \in T \setminus T_n$, откуда, так как $z(t) > 0$ μ-п. в. вместе с $w(t) > 0$ μ-п. в., следует утверждение (12).

1. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.— М. : Физматгиз, 1961.— 408 с.
2. *Коялович Б. М.* Исследование о бесконечных системах линейных алгебраических уравнений // Изв. Физ.-мат. ин-та АН СССР.— 1930.— **3**.— С. 41—167.
3. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Методы приближенного решения уравнений в частных производных.— Л.; М. : ОНТИ, 1936.— 528 с.
4. *Гринченко В. Т.* Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров.— Киев : Наук. думка, 1978.— 264 с.
5. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1977.— 744 с.

Ин-т гидромеханики АН УССР, Киев

Получено 24.07.85

УДК 517.94

Г. С. Жукова, Н. П. Черных

Асимптотические свойства формальных решений

1. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

$$M[x] \equiv \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon^{p_\nu} a_\nu(t, \varepsilon)\, x^{(\nu)} = 0, \tag{1}$$

где $t \in [0, T]$, $x^{(\nu)} \equiv d^{\nu}x(t, \varepsilon)/dt^{\nu}$, ε — вещественный параметр, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $a_n(t, \varepsilon) \neq 0$ и $a_0(t, \varepsilon) \not\equiv 0$. Те из коэффициентов $a_\nu(t, \varepsilon)$, $\nu = \overline{0, n}$, которые отличны от тождественного нуля, являются, во-первых, элементами пространства E непрерывных по $t \in [0, T]$ и $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ функций $y(t, \varepsilon)$, для которых $y(t, 0) \not\equiv 0$, и, во-вторых, вещественнозначны, допускают при $\varepsilon \to +0$ равномерные на интервале $[0, T]$ асимптотические представления $a_\nu(t, \varepsilon) \sim \sim \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s} a_{\nu s}(t)$, где $a_{\nu s}(t) \in \mathbb{C}^{\infty}[0, T]$. Показатели p_ν, $\nu = \overline{0, n}$, предполагаются неотрицательными целыми числами, причем $p_0 = 0$, $p_n > 0$ и для некоторого индекса ν_0, $0 \leqslant \nu_0 \leqslant n - 1$,

$$p_{\nu_0} = 0, \quad p_\nu > 0 \quad \forall \nu = \overline{\nu_0 + 1, n}. \tag{2}$$

В работе [1] для дифференциального уравнения (1) предложен критерий выбора формы разложения его решений по числам p_ν и коэффициентам $a_{\nu 0}(t)$, $\nu = \overline{0, n}$, а также найдены условия, достаточные для построения в аналитической форме n формальных решений. В настоящей статье устанавливаются асимптотические свойства этих решений.

Напомним, что в случае $\nu_0 = 0$ диаграмма дифференциального уравнения (1) имеет только возрастающий участок — ломаную с началом в точке $(0; 0)$ и концом в точке $(n; p_n)$, для каждого звена которой коэффициент наклона отрицателен. Если же $\nu_0 \geqslant 1$, то диаграмма содержит два участка: постоянный — одно звено на оси абсцисс, соединяющее точки $(0; 0)$ и $(\nu_0; 0)$, и возрастающий — с началом в точке $(\nu_0; 0)$ и концом в точке $(n; p_n)$. Таким образом, в общем случае исходной точкой возрастающего участка является $(\nu_0; 0)$, а число звеньев постоянного участка равно $\delta \equiv 1 - \delta_{\nu_0, 0}$, где $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Пусть возрастающий участок диаграммы дифференциального уравнения (1) содержит q звеньев, $1 \leqslant q \leqslant n$. Для j-го звена обозначим: n_j — коэффициент наклона; $(s_j; p_{s_j})$ — начальная точка, где $s_1 = \nu_0$ и $s_{q+1} = n$; $r_j \in \mathbb{N}$ — знаменатель в записи числа $n_j \in \mathbf{Q}$ как несократимой дроби; $\mu_{i0}(t)$, $i = \overline{s_j + 1, s_{j+1}}$ — корни определяющего уравнения.

Пусть $k_i = n_j$, $i = \overline{s_j + 1, s_{j+1}}$, $j = \overline{1, q}$. Тогда, воспользовавшись условиями (2) и свойствами диаграммы, заключаем

$$0 > k_{s_1+1} = \ldots = k_{s_2} > \ldots > k_{s_q+1} = \ldots = k_{s_{q+1}}, \quad 0 \leqslant s_1 < \ldots < s_{q+1} = n, \quad (3)$$

и

$$k_{s_1+1} + \ldots + k_n = -p_n. \quad (4)$$

Пусть с помощью рассуждений работы [1] для дифференциального уравнения (1) построено n формальных решений. Из них s_1 решений имеют вид

$$\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \mu_{is}(t), \quad i = \overline{1, s_1}, \quad (5)$$

а остальные $n - s_1$ решений — вид

$$\exp\left(\varepsilon^{n_j} \int_0^t \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s/r_j} \mu_{is}(\tau)\, d\tau\right), \quad i = \overline{s_j + 1, s_{j+1}}, \quad j = \overline{1, q}. \quad (6)$$

Напомним, что при этом функции $\mu_{is}(t)$, $s \geqslant 0$, $i = \overline{1, n}$, обладают следующими свойствами.

1. $\mu_{is}(t) \in \mathbb{C}^\infty [0, T]$.

2. При $\nu_0 \geqslant 1$ функции $\mu_{i0}(t)$, $i = \overline{1, s_1}$, образуют фундаментальную систему решений некоторого линейного однородного дифференциального уравнения s_1-го порядка. Поэтому, в частности, их вронскиан $\det \| \mu_{i0}^{(j-1)}(t) \|_{\overline{1, s_1}}$ не обращается в нуль на интервале $[0, T]$.

3. $\mu_{i_1, 0}(t) \neq \mu_{i_2, 0}(t) \forall s_j + 1 \leqslant i_1 \neq i_2 \leqslant s_{j+1}$, $j = \overline{1, q}$, и $\mu_{i0}(t) \neq 0$ $\forall i = \overline{1 + s_{2-\delta}, n}$. Поэтому для любого $j = \overline{1, q}$ определитель Вандермонда функций $\mu_{i0}(t)$, $i = \overline{s_j + 1, s_{j+1}}$, отличен от нуля на $[0, T]$ и, следовательно, будут отличны от нуля на $[0, T]$ определители $\det \| \mu_{i0}^{j-1}(t) \|_{\overline{s_j+1, s_{j+1}}}$, $j = \overline{1, q}$.

4. Если функция $\mu_{i_1, 0}(t)$, $s_j + 1 \leqslant i_1 \leqslant s_{j+1}$, $1 \leqslant j \leqslant q$, является комплекснозначной, то найдется i_2, $s_j + 1 \leqslant i_2 \leqslant s_{j+1}$, что $\mu_{i_2, s}(t) = \overline{\mu_{i_1, s}(t)}$ $\forall s \geqslant 0$.

2. m-**Асимптотические решения и их свойства.** По разложениям (5) и (6) введем в рассмотрение n функций

$$\varphi_i(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m_1} \varepsilon^s \mu_{is}(t), \quad i = \overline{1, s_1}, \quad (7)$$

$$\varphi_i(t,\varepsilon)=\exp\left(\varepsilon^{n_j}\int\limits_0^t\sum_{s=0}^{m_{j+\delta}}\varepsilon^{s/r_j}\mu_{is}(\tau)\,d\tau\right),\quad i=\overline{s_j+1,s_{j+1}},\quad j=\overline{1,q},\tag{8}$$

где m_l, $l=\overline{1,q+\delta}$, — некоторые неотрицательные целые числа. (В случае $\nu_0=0$ функции (7) отсутствуют.)

Непосредственно проверяется справедливость следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть числа $m_2,\ldots,m_{q+\delta}$ выбраны по правилу*

$$m_{j+\delta}=(m+1-n_js_j-p_{s_j})\,r_j-1,\quad j=\overline{2-\delta,q},\tag{9}$$

где $m=m_1$ при $\nu_0\geqslant1$ и $m=(m_1+1)/r_1-1$ при $\nu_0=0$. Тогда каждая из функций (7), (8) является m-асимптотическим решением линейного однородного дифференциального уравнения (1) и справедливы представления

$$M[\varphi_i]=\begin{cases}\varepsilon^{m+1}v_i(t,\varepsilon), & i=\overline{1,s_1},\\ \varepsilon^{m+1}v_i(t,\varepsilon)\,\varphi_i(t,\varepsilon), & i=\overline{s_1+1,n},\end{cases}\tag{10}$$

где $v_i(t,\varepsilon)\in E\ \forall i=\overline{1,n}$.

Установим некоторые свойства асимптотических решений.

Теорема 2. *При достаточно малом ε_0 функции $\varphi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, линейно независимы на интервале $[0,T]$ и их вронскиан $W(t,\varepsilon)$ допускает представление*

$$W(t,\varepsilon)=\varepsilon^{\alpha}\eta(t,\varepsilon)\prod_{i=s_1+1}^{n}(\varphi_i(t,\varepsilon)),\tag{11}$$

где $\alpha=\sum\limits_{i=s_1+1}^{n}k_i(i-1)$ и $\eta(t,\varepsilon)\in E$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу свойства 1 все функции (7) и (8) дифференцируемы по t достаточное число раз. Причем, при дополнительном предположении $k_1=\ldots=k_{s_1}=0$ при $\nu_0\geqslant1$ с учетом неравенства (3) для любого натурального числа ν справедливы представления

$$\varphi_i^{(\nu-1)}(t,\varepsilon)=\begin{cases}\varepsilon^{(\nu-1)k_i}z_{i\nu}(t,\varepsilon), & i=\overline{1,s_1},\\ \varepsilon^{(\nu-1)k_i}z_{i\nu}(t,\varepsilon)\,\varphi_i(t,\varepsilon), & i=\overline{s_1+1,n},\end{cases}\tag{12}$$

где $z_{i\nu}(t,\varepsilon)\in E\ \forall i=\overline{1,n}$, $\nu\geqslant1$ и главный член функции $z_{i\nu}(t,\varepsilon)$ равен

$$z_{i\nu}(t,0)=\begin{cases}\mu_{i0}^{(\nu-1)}(t), & i=\overline{1,s_1},\\ \mu_{i0}^{\nu-1}(t), & i=\overline{s_1+1,n}.\end{cases}\tag{13}$$

Поэтому, воспользовавшись свойствами определителей, получим $W(t,\varepsilon)\equiv$ $\equiv\det\|\varphi_i^{(\nu-1)}(t,\varepsilon)\|_{\overline{1,n}}=V_1(t,\varepsilon)\prod\limits_{i=s_1+1}^{n}(\varphi_i(t,\varepsilon))$, где

$$V_1(t,\varepsilon)=\det\|\varepsilon^{k_i(\nu-1)}z_{i\nu}(t,\varepsilon)\|_{\overline{1,n}}\tag{14}$$

и с учетом (3) $V_1(t,\varepsilon)=\varepsilon^{\alpha_1}\det U_1(t,\varepsilon)$, $\alpha_1=k_{s_1}\sum\limits_{\nu=1}^{n}(\nu-1)$, $U_1(t,\varepsilon)=$ $=\|\varepsilon^{(\nu-1)(k_i-k_{s_1})}z_{i\nu}(t,\varepsilon)\|_{\overline{1,n}}$.

Заметим, что матрица $U_1(t,\varepsilon)$ обладает следующей особенностью: элементы первых s_1 строк имеют по ε порядок $O(1)$, а начиная со строки $i=s_1+1$ порядок главного члена элементов одной и той же строки убывает по мере роста номера ν столбца. Поэтому, используя для вычисления $\det U_1(t,\varepsilon)$ разложение Лапласса по первым s_1 строкам, заключаем, что его главным членом будет член с наименьшей степенью параметра ε в разложении произведения минора $W_1(t,\varepsilon) \equiv \det \| z_{i\nu}(t,\varepsilon) \|_{\overline{1,s_1}}$ на его алгебраическое дополнение

$$V_2(t,\varepsilon) \equiv \det \| \varepsilon^{(\nu-1)(k_i-k_{s_1})} z_{i\nu}(t,\varepsilon) \|_{\overline{s_1+1,n}}.$$

Нетрудно видеть, что $V_2(t,\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_2} \det U_2(t,\varepsilon)$, где $\alpha_2 = (k_{s_2} - k_{s_1}) \times \times \sum_{\nu=s_1+1}^{n} (\nu-1)$ и $U_2(t,\varepsilon) = \| \varepsilon^{(\nu-1)(k_i-k_{s_2})} z_{i\nu}(t,\varepsilon) \|_{\overline{s_1+1,n}}$, причем матрица $U_2(t,\varepsilon)$ обладает свойствами, аналогичными описанным выше для $U_1(t,\varepsilon)$. Поэтому, воспользовавшись для вычисления определителя $U_2(t,\varepsilon)$ разложением Лапласса по первым $s_2 - s_1$ строкам, убеждаемся, что главный член функции $\det U_2(t,\varepsilon)$ совпадает с членом при наименьшей степени ε в разложении произведения минора $W_2(t,\varepsilon) \equiv \det \| z_{i\nu}(t,\varepsilon) \|_{\overline{s_1+1,n}}$ на его алгебраическое дополнение $V_3(t,\varepsilon) = \det \| \varepsilon^{(\nu-1)(k_i-k_{s_2})} z_{i\nu}(t,\varepsilon) \|_{\overline{s_2+1,n}}$. При этом возможно представление $V_3(t,\varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_3} \det U_3(t,\varepsilon)$, где $\alpha_3 = (k_{s_3} - k_{s_2}) \sum_{\nu=s_2+1}^{n} \times \times (\nu-1)$, $U_3(t,\varepsilon) = \| \varepsilon^{(\nu-1)(k_i-k_{s_3})} z_{i\nu}(t,\varepsilon) \|_{\overline{s_2+1,n}}$. И так далее.

В результате конечного числа шагов с учетом обозначений $s_0 = 0$, $W_j(t,\varepsilon) = \det \| z_{i\nu}(t,\varepsilon) \|_{\overline{s_{j-1}+1,\ s_j}}$, $\alpha_j = (k_{s_j} - k_{s_{j-1}}) \sum_{\nu=s_{j-1}+1}^{n} (\nu-1)$ и свойств $W_j(t,\varepsilon) \in E$, $W_j(t,0) = \det \| z_{i\nu}(t,0) \|_{\overline{s_{j-1}+1,\ s_j}} \neq 0$ приходим к представлению (11), где $\eta(t,0) = \prod_{j=1}^{q+1} W_j(t,0)$ и $\alpha = \sum_{j=1}^{q+1} \alpha_j$.

Таким образом, $\eta(t,0) \neq 0$ $\forall t \in [0,T]$, что следует из формулы (13) и свойств 2, 3. Воспользовавшись непрерывностью функции $\eta(t,\varepsilon)$ в прямоугольнике $[0,T] \times [0,\varepsilon_0]$ заключаем, что при достаточно малом ε_0

$$\eta(t,\varepsilon) \neq 0 \quad \forall t \in [0,T], \quad \varepsilon \in [0,\varepsilon_0]. \tag{15}$$

Кроме того, учитывая формулу (8) и свойство 4, получаем $\prod_{i=s_1+1}^{n} (\varphi_i(t,\varepsilon)) > 0$, $t \in [0,T]$, $\varepsilon \in]\,0,\varepsilon_0]$. Поэтому $W(t,\varepsilon) \neq 0$ $\forall t \in [0,T]$ при каждом фиксированном $\varepsilon \in]\,0,\varepsilon_0]$, что гарантирует линейную независимость функций (7), (8). Теорема 2 доказана.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что в формуле (11) число α равно сумме показателей степеней параметра ε членов главной диагонали определителя (14).

Теорема 3. *Функции $\varphi_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1,n}$, вычисленные по формулам* (7), (8) *и* (9), *образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка*

$$L[x] \equiv \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon^{p_\nu} a_\nu(t,\varepsilon) x^{(\nu)} + \varepsilon^{m+1-\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^{n-j} A_j(t,\varepsilon) x^{(j)} / \eta(t,\varepsilon), \tag{16}$$

где

$$A_j(t,\varepsilon) \equiv \det \begin{pmatrix} v_1 & z_{11} & \varepsilon^{k_1} z_{12} & \dots & \varepsilon^{k_1(j-1)} z_{1j} & \dots & \varepsilon^{k_1(j+1)} z_{1,j+2} & \dots & \varepsilon^{k_1(n-1)} z_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ v_n & z_{n1} & \varepsilon^{k_n} z_{n2} & \dots & \varepsilon^{k_n(j-1)} z_{nj} & \dots & \varepsilon^{k_n(j+1)} z_{n,j+2} & \dots & \varepsilon^{k_n(n-1)} z_{nn} \end{pmatrix}. \tag{17}$$

(Здесь и при доказательстве для сокращения записи аргументы t и ε всех фигурирующих функций не указываются.)

Доказательство. Воспользовавшись свойствами определителей [2, с. 36], формулами (1), (10), (12), дифференциальное уравнение с известной фундаментальной системой решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ может быть последовательно преобразовано следующим образом:

$$\det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_1' & \ldots & \varphi_1^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \varphi_n & \varphi_n' & \ldots & \varphi_n^{(n)} \\ x & x' & \ldots & x^{(n)} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} z_{11} & \varepsilon^{k_1} z_{12} & \ldots & \varepsilon^{nk_1} z_{1,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{n1} & \varepsilon^{k_n} z_{n2} & \ldots & \varepsilon^{nk_n} z_{n,n+1} \\ x & x' & \ldots & x^{(n)} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} z_{11} & \varepsilon^{k_1} z_{12} & \ldots & \varepsilon^{k_1(n-1)} z_{1n} & \varepsilon^{m+1} v_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ z_{n1} & \varepsilon^{k_n} z_{n2} & \ldots & \varepsilon^{k_n(n-1)} z_{nn} & \varepsilon^{m+1} v_n \\ x & x' & \ldots & x^{(n-1)} & M[x] \end{pmatrix} = 0. \tag{18}$$

Раскрывая теперь определитель (18) по элементам n-й строки и учитывая (1), (11), (15), приходим к формулам (16)—(17). Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Элементы определителя (17) обладают тем же свойством, что и определитель (14). Это позволяет аналогично доказательству теоремы 2 указать для функции (17) порядок малости по ε и приводит к представлению $A_j(t,\varepsilon) = \varepsilon^{\beta_j} u_j(t,\varepsilon)$, где $u_j(t,\varepsilon) \in E$ и по замечанию 1 $\beta_j = \sum_{i=2}^{j+1} k_i (i-2) + \sum_{i=j+2}^{n} k_i (i-1)$. Причем с учетом обозначения α получаем $\beta_j = \alpha + \gamma_j$, где

$$\gamma_0 = 0, \quad \gamma_j = -\sum_{i=2}^{j+1} k_i \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n-1}. \tag{19}$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 4. *Функции $\varphi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$, вычисленные по формулам* (7)—(9), *образуют фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка*

$$L[x] \equiv M[x] + \varepsilon^{m+1} f(x(t,\varepsilon)), \tag{20}$$

где

$$f(x(t,\varepsilon)) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{\gamma_j} b_j(t,\varepsilon)\, x^{(j)}(t,\varepsilon) \text{ и } b_j(t,\varepsilon) \equiv (-1)^{n-j} u_j(t,\varepsilon)/\eta(t,\varepsilon) \in E,$$
$$j = \overline{0, n-1}. \tag{21}$$

3. Оценка близости асимптотических решений к точным. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть функции $\mu_{i0}(t)$, $i = \overline{s_1+1, n}$, удовлетворяют условиям*

$$\operatorname{Re}\mu_{i0}(t) < 0, \quad i = \overline{s_j+1, s_j+l_j}, \quad j = \overline{1, q}, \quad t \in [0, T], \tag{22}$$

и

$$\operatorname{Re}\mu_{i0}(t) > 0, \quad i = \overline{s_j+l_j+1, s_{i+1}}, \quad j = \overline{1, q}, \quad t \in [0, T], \tag{23}$$

где $0 \leqslant l_j \leqslant s_{j+1} - s_j$, $l_j \in \mathbb{Z}\ \forall j = 1, q$. Тогда линейное однородное дифференциальное уравнение (1) *имеет фундаментальную систему решений $x_i(t,\varepsilon)$, $i = 1, n$, для которой при достаточно малом ε_0 выполняются неравенства*

$$\| x_i^{(\nu)}(t,\varepsilon) - \varphi_i^{(\nu)}(t,\varepsilon) \| \leqslant c\varepsilon^{m+1+q_\nu}, \quad i = 1, s_1, \tag{24}$$

$$\| x_i^{(\nu)}(t,\varepsilon) - \varphi_i^{(\nu)}(t,\varepsilon) \| \leqslant c\varepsilon^{m+1+q_\nu} \| \varphi_i(t,\varepsilon) \|, \quad i = \overline{s_1+1, n},$$
$$t \in [0, T], \quad \varepsilon \in]0, \varepsilon_0], \quad \nu = \overline{0, n-1}, \tag{25}$$

где постоянная $c > 0$ *не зависит от* t, ε, i, ν *и числа* q_ν, $\nu = \overline{0, n-1}$, *находятся по формуле*

$$q_\nu = 0, \quad \nu = \overline{0, s_1 - 1}, \quad q_\nu = \sum_{r=s_1+1}^{\nu+1} k_r, \quad \nu = \overline{s_1, n-1}. \tag{26}$$

Доказательство. Отметим, что все решения линейного однородного дифференциального уравнения (1) являются также решениями линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$L[x] = \varepsilon^{m+1} f(x(t, \varepsilon)) \tag{27}$$

и наоборот. Поэтому общее решение уравнения (1) представимо в виде $x(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} B_i \varphi_i(t, \varepsilon) + \psi(t, \varepsilon)$, где $B_1, \dots, B_n$ — произвольные постоянные и $\psi(t, \varepsilon)$ — некоторое частное решение уравнения (27).

Пусть $\psi_1(t, \varepsilon)$ — частное решение уравнения (27), построенное методом вариации. Тогда с учетом (11), (12) и [3, с. 94] получаем

$$\psi_1^{(\nu)}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{m+1-\alpha-p_n} \Big[\sum_{i=1}^{s_1} (-1)^{n+i} \int_0^t F_i(\tau, \varepsilon) \varphi_i^{(\nu)}(t, \varepsilon) f(x(\tau, \varepsilon))/(a_n(\tau, \varepsilon) \times$$
$$\times \eta(\tau, \varepsilon))\, d\tau + \sum_{i=s_1+1}^{n} (-1)^{n+i} \int_0^t F_i(\tau, \varepsilon) \varphi_i^{(\nu)}(t, \varepsilon) f(x(\tau, \varepsilon))/(a_n(\tau, \varepsilon) \times$$
$$\times \eta(\tau, \varepsilon) \varphi_i(\tau, \varepsilon))\, d\tau \Big], \quad \nu = \overline{0, n-1},$$

где

$$F_i(t, \varepsilon) \equiv \det \begin{pmatrix} z_{11}(t, \varepsilon) & \varepsilon^{k_1} z_{12}(t, \varepsilon) & \dots & \varepsilon^{k_1(n-2)} z_{1,n-1}(t, \varepsilon) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{i-1,1}(t, \varepsilon) & \varepsilon^{k_{i-1}} z_{i-1,2}(t, \varepsilon) & \dots & \varepsilon^{k_{i-1}(n-2)} z_{i-1,n-1}(t, \varepsilon) \\ z_{i+1,1}(t, \varepsilon) & \varepsilon^{k_{i+1}} z_{i+1,2}(t, \varepsilon) & \dots & \varepsilon^{k_{i+1}(n-2)} z_{i+1,n-1}(t, \varepsilon) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{n1}(t, \varepsilon) & \varepsilon^{k_n} z_{n2}(t, \varepsilon) & \dots & \varepsilon^{k_n(n-2)} z_{n,n-1}(t, \varepsilon) \end{pmatrix},$$
$$i = \overline{1, n}.$$

Причем, воспользовавшись замечанием 1 и ограниченностью функции $1/(a_n(t, \varepsilon)\eta(t, \varepsilon))$, получим представление $(-1)^{n+i} F_i(t, \varepsilon)/(a_n(t, \varepsilon)\eta(t, \varepsilon)) = w_i(t, \varepsilon)\, \varepsilon^{\alpha - k_i(i-1) - \sum_{r=i+1}^{n} k_r}$, где $w_i(t, \varepsilon) \in E$, $i = \overline{1, n}$. Поэтому

$$\psi_1^{(\nu)}(t, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{s_1} \varepsilon^{\sigma_i} \int_0^t w_i(\tau, \varepsilon) \varphi_i^{(\nu)}(t, \varepsilon) f(x(\tau, \varepsilon))\, d\tau +$$
$$+ \sum_{i=s_1+1}^{n} \varepsilon^{\sigma_i} \int_0^t w_i(\tau, \varepsilon) \varphi_i^{(\nu)}(t, \varepsilon) f(x(\tau, \varepsilon))/\varphi_i(\tau, \varepsilon)\, d\tau, \quad \nu = \overline{0, n-1}, \tag{28}$$

где $\sigma_i = m + 1 - k_i(i-1) + \sum_{r=1}^{i} k_r$.

Введем в рассмотрение второе частное решение дифференциального уравнения (27): $\psi_2(t, \varepsilon) \equiv \psi_1(t, \varepsilon) + \sum_{i=s_1+1}^{n} c_i \varphi_i(t, \varepsilon)$, где $c_i = -\varepsilon^{\sigma_i} \int_0^{t_i} w_i(\tau, \varepsilon) f(x(\tau, \varepsilon))/\varphi_i(\tau, \varepsilon)\, d\tau$, $t_i = 0$, если $i = \overline{s_j + 1, s_j + l_j}$, $j = \overline{1, q}$ и $t_i = T$ при

$i=\overline{s_j+l_j+1,\ s_{j+1}},\ j=\overline{1,q}$. Тогда с учетом (12) и (28) для общего решения дифференциального уравнения (1) справедливы равенства

$$x^{(\nu)}(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}B_i\varphi_i^{(\nu)}(t,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{s_1}\varepsilon^{\sigma_i+\nu k_i}\int_0^t w_i(\tau,\varepsilon)\,z_{i,\nu+1}(t,\varepsilon)\,f(x(\tau,\varepsilon))\,d\tau+$$

$$+\sum_{i=s_1+1}^{n}\varepsilon^{\sigma_i+\nu k_i}\int_{t_i}^{t}w_i(\tau,\varepsilon)\,z_{i,\nu+1}(t,\varepsilon)\,\varphi_i(t,\varepsilon)\,f(x(\tau,\varepsilon))/\varphi_i(\tau,\varepsilon)\,d\tau,\quad \nu=\overline{0,n-1}. \tag{29}$$

Зафиксируем индекс s, $1\leqslant s\leqslant n$. Пусть $x_s(t,\varepsilon)$ — решение дифференциального уравнения (1), которое получается из (29) при $B_i=0$, $i\neq s$, и $B_s=1$. Пользуясь линейной независимостью функций $\varphi_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, можно показать, что аналогичным свойством обладают построенные решения $x_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$.

Обозначим

$$y_s(t,\varepsilon)\equiv x_s(t,\varepsilon)-\varphi_s(t,\varepsilon). \tag{30}$$

Так как в силу формулы (21) $f(x_s(t,\varepsilon))=f(y_s(t,\varepsilon))+f(\varphi_s(t,\varepsilon))$, то из (29) и (30) получаем

$$y_s^{(\nu)}(t,\varepsilon)=\sum_{i=1}^{s_1}\varepsilon^{\sigma_i+\nu k_i}\Big[\int_0^t w_i(\tau,\varepsilon)\,z_{i,\nu+1}(t,\varepsilon)\,f(y_s(\tau,\varepsilon))\,d\tau+\int_0^t w_i(\tau,\varepsilon)\,z_{i,\nu+1}(t,$$

$$\varepsilon)\,f(\varphi_s(\tau,\varepsilon))\,d\tau\Big]+\sum_{i=s_1+1}^{n}\varepsilon^{\sigma_i+\nu k_i}\Big[\int_{t_i}^{t}w_i(\tau,\varepsilon)\,z_{i,\nu+1}(t,\varepsilon)\,\varphi_i(t,\varepsilon)\,f(y_s(\tau,\varepsilon))/$$

$$/\varphi_i(\tau,\varepsilon)\,d\tau+\int_{t_i}^{t}w_i(\tau,\varepsilon)\,z_{i,\nu+1}(t,\varepsilon)\,\varphi_i(t,\varepsilon)f(\varphi_s(\tau,\varepsilon))/\varphi_i(\tau,\varepsilon)\,d\tau\Big],\quad \nu=\overline{0,n-1}. \tag{31}$$

При этом с учетом формул (10), (20) и (21)

$$f(y_s(t,\varepsilon))=\sum_{\nu=0}^{n-1}\varepsilon^{\gamma_\nu}b_\nu(t,\varepsilon)\,y_s^{(\nu)}(t,\varepsilon),$$

$$f(\varphi_s(t,\varepsilon))=\begin{cases}-v_s(t,\varepsilon), & s=\overline{1,s_1},\\ -v_s(t,\varepsilon)\,\varphi_s(t,\varepsilon), & s=\overline{s_1+1,n}.\end{cases} \tag{32}$$

Заметим, что при каждом фиксированном $\nu=\overline{0,n-1}$ в силу неравенства $k_i-k_{i-1}\leqslant 0\ \forall i=\overline{2,n}$ и представления $\sigma_i+\nu k_i=\sigma_{i-1}+\nu k_{i-1}+(k_i-k_{i-1})(\nu+1-i)$ получаем $\min\limits_{i=\overline{1,n}}(\sigma_i+\nu k_i)=\sigma_{\nu+1}+\nu k_{\nu+1}=m+1+q_\nu$, где q_ν — то же, что и в формуле (26). Кроме того, ввиду указанного выше способа определения чисел t_i, $i=\overline{s_1+1,n}$, будут равномерно ограничены в области $t\in[0,T]$, $\varepsilon\in]0,\varepsilon_0]$ функции $\int\limits_{t_i} w_i(\tau,\varepsilon)\,z_{i,\nu+1}(t,\varepsilon)\,\varphi_i(t,\varepsilon)/\varphi_i(\tau,\varepsilon)\,d\tau$, $i=\overline{s_1+1,n}$. Функции $\int w_i(\tau,\varepsilon)\,z_{i,\nu+1}(t,\varepsilon)\,d\tau$, $i=\overline{1,s_1}$, также равномерно ограничены (даже в прямоугольнике $[0,T]\times[0,\varepsilon_0]$), что следует из (7).

Таким образом, учитывая ограниченность функций $b_\nu(t,\varepsilon)$, $\nu=\overline{0,n-1}$, и $v_s(t,\varepsilon)$, $s=\overline{1,n}$, из (31) получаем оценки

$$|y_s^{(\nu)}(t,\varepsilon)|\leqslant\begin{cases}\varepsilon^{m+1+q_\nu}A_1(1+Y_s), & s=\overline{1,s_1},\quad \nu=\overline{0,n-1},\\ \varepsilon^{m+1+q_\nu}A_1(\|\varphi_s\|+Y_s), & s=\overline{s_1+1,n},\quad \nu=\overline{0,n-1},\end{cases} \tag{33}$$

где $A_1 > 0$ не зависит от t, ε, s, ν; $\| u \| = \max\limits_{t \in [0,T]} | u(t, \varepsilon) |$ и

$$Y_s \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1} \varepsilon^{\gamma_\nu} \| y_s^{(\nu)} \|. \tag{34}$$

Так как для любого $\nu = \overline{0, n-1}$ числа q_ν и γ_ν связаны равенством $q_\nu = q_0 - \gamma_\nu$, то из (33) следует справедливость n неравенств

$$\varepsilon^{\gamma_\nu} \| y_s^{(\nu)} \| \leqslant \begin{cases} \varepsilon^{m+1+q_0} A_1 (1 + Y_s), & s = 1, s_1, \quad \nu = \overline{0, n-1}, \\ \varepsilon^{m+1+q_0} A_1 (\| \varphi_s \| + Y_s), & s = \overline{s_1 + 1, n}, \quad \nu = \overline{0, n-1}, \end{cases} \tag{35}$$

просуммировав которые, придем к оценкам $Y_s \leqslant \varepsilon^{m+1+q_0} A_2 (1 + Y_s)$, $s = \overline{1, s_1}$, $Y_s \leqslant \varepsilon^{m+1+q_0} A_2 (\| \varphi_s \| + Y_s)$, $s = \overline{s_1 + 1, n}$, где $A_2 = nA_1$.

Отсюда следует существование константы $c > 0$ такой, что $Y_s \leqslant c\varepsilon^{m+1+q_0}$, $s = \overline{1, s_1}$, и $Y_s \leqslant c\varepsilon^{m+1+q_0} \| \varphi_s \|$, $s = \overline{s_1 + 1, n}$. Поэтому из (35), (34) получаем $\| y_s^{(\nu)} (t, \varepsilon) | \leqslant c \varepsilon^{m+1+q_\nu}$, $s = \overline{1, s_1}$, $| y_s^{(\nu)} (t, \varepsilon) | \leqslant c\varepsilon^{m+1+q_\nu} \| \varphi_s \|$, $s = \overline{s_1 + 1, n}$, $\nu = \overline{0, n-1}$, что с учетом обозначения (30) приводит к оценкам (24), (25) и доказывает справедливость теоремы 5.

Заметим, что в случае $\operatorname{Re} \mu_{i0} (t) < 0$ $\forall i = \overline{s_1 + 1, n}$ функция $x_s (t, \varepsilon)$ является решением дифференциального уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям $x_s^{(\nu)} (0, \varepsilon) = \varphi_s^{(\nu)} (0, \varepsilon)$, $\nu = \overline{0, n-1}$.

4. Асимптотика общего решения. Анализ теоремы 5 позволяет сделать следующие выводы:

формальные разложения (5), (6) являются асимптотическими представлениями при $\varepsilon \to +0$ для фундаментальной системы решений $x_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$, линейного однородного дифференциального уравнения (1);

формальные ряды, полученные почленным дифференцированием по t разложений (5) или (6) ν раз $(1 \leqslant \nu \leqslant n-1)$, являются асимптотическими представлениями при $\varepsilon \to +0$ для соответствующих функций $x_i^{(\nu)} (t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$;

функции $\varphi_i (t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$, вычисленные по формулам (7) — (9), могут быть приближенно с погрешностью порядка $O (\varepsilon^{m+1+q_0})$ приняты за фундаментальную систему решений уравнения (1) $\Bigl($в этом случае функция $\sum\limits_{i=1}^{n} B_i \varphi_i (t, \varepsilon)$, где $B_1, \ldots, B_n$ — произвольные постоянные, с той же погрешностью является общим решением уравнения (1)$\Bigr)$;

функции $\varphi_i^{(\nu)} (t, \varepsilon)$, $i = 1, n$, $\nu = \overline{1, n-1}$, приближают соответствующую функцию $x_i^{(\nu)} (t, \varepsilon)$ с точностью порядка $O (\varepsilon^{m+1+q_\nu})$.

1. *Жукова Г. С., Черных Н. П.* Структура формальных решений сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений n-го порядка // Укр. мат. журн.— 1985.— **37, № 6.**— С. 695—702.
2. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике.— М. : Наука, 1978.— 832 с.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— М. : Наука, 1976.— 576 с.

Воронеж. ун-т

Получено 18.09.86