$$\times [P(t,r,\beta) - P(t,r,\pi-\beta)]\,dt \leqslant \max_{0\leqslant\varphi\leqslant\pi} \Big\{ \int_0^{+\infty} N(t,0,F)\,P(t,r,\varphi)\,dt +$$

$$+ \int_0^{+\infty} N(t,\infty,F)\,P(t,r,\pi-\varphi)\,dt \Big\} = T(r,F).$$

Следствие. *Пусть* $n(r,0,f) \geqslant n(r,\infty,f)$ $\forall r>0$. *Тогда* $(\forall r>0)$ $[T(r,f) \leqslant T(r,F)]$.

Доказательство. Имеем $f(z) = \prod_{j=1}^{\infty} f_j(z)$, где $f_j(z) = (1 - z/a_j)/(1 + z/b_j)$, или $f_j(z) = (1 - z/a_j)$ для $j \geqslant n+1$, если число полюсов функции f равно $n < \infty$.

Из условия $n(r,0,f) \geqslant n(r,\infty,f)$ следует, что $(\forall j>0)$ $[a_j \leqslant b_j]$. Тогда при $r>0$ $|f_j(ir)| = |1 - ir/a_j|/|1 + ir/b_j| \geqslant 1$. Если число полюсов конечно, то при $r>0$ имеем $|f_j(ir)| = |1 - ir/a_j| \geqslant 1$, $j \geqslant n+1$. Таким образом, $|f(ir)| \geqslant 1$ для всех $r>0$ и, учитывая теорему 2, получаем утверждение следствия.

1. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 592 с.
2. *Заболоцкий Н. В.* Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик мероморфных функций нулевого рода // Укр. мат. журн.— 1980.— **33**, № 6.— С. 805—810.
3. *Гольдберг А. А., Заболоцкий Н. В.* Индекс концентрации субгармонической функции нулевого порядка // Мат. заметки.— 1983.— **34**, № 2.— С. 227—236.
4. *Hellerstein S., Williamson J.* Entire functions with negative zeros and a problem of R. Nevanlinna // J. anal. math.— 1969.— **22**.— P. 233—267.
5. *Заболоцкий Н. В.* Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик δ-субгармонических функций порядка <1 // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1983.— Вып. 39.— С. 49—56.
6. *Кондратюк А. А.* Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями // Лит. мат. сб.— 1967.— **7**, № 1.— С. 79—117.

Львов. ун-т

Получено 14.06.85,
после доработки — 05.12.85

УДК 517.5

Н. В. Зорий

Функциональные характеристики пространственных конденсаторов: их свойства, соотношения между ними

1. Пусть $\mathbb{R}^p$, $p \geqslant 3$, — евклидово пространство размерности p, а $\overline{\mathbb{R}^p}$ — его одноточечная компактификация ($\overline{\mathbb{R}^p} = \mathbb{R}^p \cup \{\infty\}$) с обычной топологией, определенной с помощью стереографической проекции. Для области $B \subset \overline{\mathbb{R}^p}$ и множества Q через $\mathrm{Cl}_B Q$, $\mathrm{Int}_B Q$, $\partial_B Q$ обозначим соответственно замыкание, внутренность и границу Q относительно B. Положим также $\mathrm{Cl}_{\mathbb{R}^p} Q = \bar{Q}$, $\partial_{\mathbb{R}^p} Q = \partial Q$, $\mathrm{Cl}_{\overline{\mathbb{R}^p}} Q = \overline{Q}$, $\partial_{\overline{\mathbb{R}^p}} Q = \overline{\partial Q}$.

Пусть Ω — либо $\mathbb{R}^p$, либо $\overline{\mathbb{R}^p}$, а $E^+, E^- \subset \Omega$ — непустые, замкнутые относительно Ω множества, удовлетворяющие условию $\overline{E^+} \cap \overline{E^-} = \varnothing$. Тройку $E = (E^+, E^-; \Omega)$ назовем конденсатором (в Ω), а множество $Z_E = \Omega \setminus (E^+ \cup E^-)$ — его зазором. Для E рассмотрим семейство $\mathscr{L}(E)$ всех функций $f: \Omega \to \mathbb{R}$, которые непрерывны в Ω, абсолютно непрерывны на линиях в $\mathbb{R}^p$ [1] и принимают значения 1 и 0 соответственно на E^+ и E^-.

Функции класса $\mathscr{L}(E)$ назовем допустимыми для E. Для $f \in \mathscr{L}(E)$ определен интеграл Дирихле $D(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^p} |\operatorname{grad} f(x)|^2\, dm(x)$, где m — p-мера Лебега.

Положим

$$\operatorname{Cap} E = \operatorname{Cap}(E^+, E^-; \Omega) = \inf_{f \in \mathscr{L}(E)} D(f). \tag{1}$$

Если для конденсатора E выполнено условие

$$\overline{E^+ \cup E^-} \subset \Omega, \tag{2}$$

то данное определение характеристики Cap E совпадает с известным определением 2-емкости E [2, 3]. При $\Omega = \mathbb{R}^p$ и неограниченном множестве $E^+ \cup E^-$ характеристика Cap E в литературе ранее не встречалась.

Получено представление $\operatorname{Cap} E$ через точные нижние грани ньютоновой энергии по некоторым классам зарядов, ассоциированных с E. Доказано равенство $\operatorname{Cap}(E^+, E^-; \mathbb{R}^p)$ и 2-модуля семейства кривых, соединяющих E^+ и E^- в $\mathbb{R}^p$ (в случае $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p}$ такое утверждение получено в [3]). Установлены свойства непрерывности характеристик конденсатора E.

Пусть $|x|$ — обычная евклидова норма $x \in \mathbb{R}^p$. В $\mathbb{R}^p$ будем рассматривать борелевские заряды [4] ν, их носители $S(\nu)$, ньютоновы энергии $I(\nu) = \iint\limits_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p} |x-y|^{2-p} d\nu(x)\, d\nu(y)$ и потенциалы $U^\nu(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^p} |x-y|^{2-p} d\nu(y)$. Евклидово пространство зарядов ν конечной энергии со скалярным произведением $(\nu_1, \nu_2) = \iint\limits_{\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p} |x-y|^{2-p} d\nu_1(x)\, d\nu_2(y)$ обозначим через $\mathfrak{E}$.

Будем считать, что функционал ньютоновой емкости $C_2(\cdot)$, определенный на алгебре C-измеримых множеств $Q \subset \mathbb{R}^p$, определен также на множествах $Q \cup \{\infty\}$, причем $C_2(Q \cup \{\infty\}) = C_2(Q)$. Если $0 < C_2(Q) < +\infty$, положим $\gamma_{Q \cup \{\infty\}} = \gamma_Q$, где γ_Q — равновесная мера множества Q.

Пусть $\breve{F}$ — приведенное ядро [4] множества $F \subset \mathbb{R}^p$. Для $F_1 = F \cup \cup \{\infty\}$ положим $\breve{F}_1 = \breve{F} \cup \{\infty\}$. Открытое множество $\Omega \setminus (\breve{E}^+ \cup \breve{E}^-)$ состоит из счетного числа областей Z_i. Объединение тех Z_i, у которых $\partial_\Omega Z_i$ имеет непустое пересечение и с $\breve{E}^+$, и с $\breve{E}^-$ (соответственно только с $\breve{E}^+$, только с $\breve{E}^-$), обозначим через $G = G_E$ (соответственно через $G^+ = G_E^+$, $G^- = G_E^-$). Заметим, что в этих определениях ∞ и конечные точки не равноправны, а именно: здесь мы обращаемся с бесконечно удаленной точкой как с массивным множеством. Это обусловлено той особой ролью, которую играет точка ∞ в определении 2-емкости E (см., например, следствие 5).

Пусть $I_{\partial G}$ — множество иррегулярных точек $x \in \partial G$ открытого множества G (для задачи Дирихле). Конденсатор E назовем регулярным, если $I_{\partial G} = \varnothing$ и $E^+ = \breve{E}^+$, $E^- = \breve{E}^-$.

2. Для определенности далее будем предполагать, что $\infty \notin \overline{E^+}$.

Пусть $g(x, y)$ — обобщенная функция Грина открытого множества $\mathbb{R}^p \setminus E^-$, а $C_g(E^+)$ и μ_{E^+} — соответственно емкость и равновесная мера E^+ относительно ядра $g(x, y)$. Для величины $W(E) = 1/C_g(E^+)$ верно $W(E) = \inf\limits_{\nu \in \mathfrak{N}^{(1)}(E)} I(\nu)$, где $\mathfrak{N}^{(1)}(E) = \{\nu = \nu^+ - \nu^- : S(\nu^+) \subset E^+,\ S(\nu^-) \subset E^-,$ $\nu^+(\mathbb{R}^p) = 1,\ \nu^-(\mathbb{R}^p) \leqslant 1\}$. Если $W(E) < +\infty$, то существует единственный заряд $\omega = \omega_E \in \mathfrak{N}^{(1)}(E)$ с энергией $I(\omega) = W(E)$, причем $\omega = [\mu_{E^+} - (\mu_{E^+})'_{E^-}]/C_g(E^+)$, где $(\mu_{E^+})'_{E^-}$ — решение задачи выметания μ_{E^+} на E^- в классе C-абсолютно непрерывных мер.

Введем класс (возможно, пустой) зарядов $\mathfrak{N}^1(E) = \{\nu \in \mathfrak{N}^{(1)}(E) : \nu^-(\mathbb{R}^p) = 1\}$ и определим характеристику $V(E)$ конденсатора E, положив $V(E) =$

$= +\infty$, если $E^- = \{\infty\}$, и $V(E) = \inf\limits_{\nu \in \mathfrak{N}^1(E)} I(\nu)$, если $E^- \neq \{\infty\}$. В случае $V(E) < +\infty$ (или, что равносильно, $C_2(E^+)\,C_2(E^-) > 0$) существует $\lambda = \lambda_E$ из $\mathfrak{N}^{(1)}(E)$ (но, вообще говоря, не из $\mathfrak{N}^1(E)$) с энергией $I(\lambda) = V(E)$, однозначно определенный теоремами 1 и 2 из [5].

Теорема 1 [5, 6]. *Равенство $V(E) = W(E)$ верно в том и только том случае, когда выполняется $C_2(E^+) = 0$, либо $C_2(E^- \cup G^-) = +\infty$.*

Изучим поведение характеристик $V(\cdot)$ и $W(\cdot)$ при аппроксимации $E = (E^+, E^-; \Omega)$ конденсаторами $E_k = (E_k^+, E_k^-; \Omega)$, $k = 1, 2, \ldots,$ в смысле, определяемом следующими леммами. Положим $G_k^- = G_{E_k}^-$.

Лемма 1. *Если выполнены условия $E_1^+ \subset E_2^+ \subset \ldots, E_1^- \subset E_2^- \subset \ldots$ и*

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k^+ = E^+, \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k^- = E^-, \tag{3}$$

то $V(E_k) \searrow V(E)$, $W(E_k) \searrow W(E)$, $k \to +\infty$.

Первое утверждение леммы доказано в [7], второе доказывается аналогично. Очевидно, утверждение леммы не изменится, если условие (3) заменить более слабым в случае $\Omega = \overline{\mathbb{R}}^p$ условием

$$\bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k^+ = E^+, \quad \bigcup_{k=1}^{+\infty} E_k^- \setminus \{\infty\} = E^- \setminus \{\infty\}. \tag{3$'$}$$

Условие (3′) (но не (3)) выполняется, например, для E и E_k с $E^- \underset{\neq}{\supset} \{\infty\}$, $E_k^+ = E^+$, $E_k^- = \{x \in E^- : |x| \leqslant k\}$ $\forall k \geqslant k_0$.

Лемма 2. *Пусть $E_1^+ \supset E_2^+ \supset \ldots, \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} E_k^+ = E^+, E_1^- \supset E_2^- \supset \ldots,$ $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} E_k^- = E^-$. Тогда $V(E_k)$ и $W(E_k)$ возрастают и*

$$\lim_{k\to+\infty} W(E_k) = W(E), \tag{4}$$

$$\lim_{k\to+\infty} V(E_k) \leqslant V(E), \tag{5}$$

причем знак «$<$» в (5) верен тогда и только тогда, когда

$$C_2(E^+) > 0, \quad C_2(E^- \cup G^-) < +\infty, \quad C_2(E_k^- \cup G_k^-) = +\infty \quad \forall k. \tag{6}$$

Доказательство. В условиях леммы классы $\mathfrak{N}^1(E_k)$, $\mathfrak{N}^{(1)}(E_k)$, $k = 1, 2, \ldots,$ упорядочены по включению, откуда следуют неравенства (5) и $\lim\limits_{k\to+\infty} W(E_k) \leqslant W(E)$. Пусть $\lim\limits_{k\to+\infty} W(E_k) < +\infty$ (иначе (4) очевидно), $\omega_k = \omega_{E_k}$. Покажем, что для $\{\omega_k\} \subset \mathfrak{E}$ верно

$$\|\omega_{k+r} - \omega_k\|^2 \leqslant \|\omega_{k+r}\|^2 - \|\omega_k\|^2 \quad \forall k, r \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Рассмотрим заряд $\nu = (1-t)\,\omega_k + t\omega_{k+r}$, где t — произвольное число из $(0, 1]$. Тогда $\nu \in \mathfrak{N}^{(1)}(E_k)$ и, следовательно, $\|\nu\|^2 \geqslant \|\omega_k\|^2$, или, что равносильно, $(\omega_k, \omega_{k+r} - \omega_k) \geqslant -\dfrac{t}{2}\|\omega_{k+r} - \omega_k\|^2$. Устремив t к нулю, имеем $(\omega_k, \omega_{k+r}) \geqslant \|\omega_k\|^2$, из чего получаем (7).

Следовательно, $\{\omega_k\}$ — фундаментальная последовательность.

Из следствия 2 из [7] о полноте пространства $\mathring{\mathfrak{N}}^{(1)}(E_k) = \mathfrak{N}^{(1)}(E_k) \cap \mathfrak{E}\ \forall k$ (напомним, что само $\mathfrak{E}$ не полно), включения $\{\omega_{k+r}\}_{r=1}^{+\infty} \subset \mathring{\mathfrak{N}}^{(1)}(E_k)$ и равенства $\mathfrak{N}^{(1)}(E) = \bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} \mathfrak{N}^{(1)}(E_k)$ следует существование заряда $\gamma \in \mathfrak{N}^{(1)}(E)$, $\omega_k \to$

$\to \gamma$ сильно. Цепочка соотношений $W(E) \leqslant \|\gamma\|^2 = \lim\limits_{k\to+\infty} W(E_k) \leqslant W(E)$ доказывает (4).

Если выполнены условия (6), то в силу теоремы 1 и (4) имеем $\lim\limits_{k\to+\infty} V(E_k) = \lim\limits_{k\to+\infty} W(E_k) = W(E) < V(E)$. Пусть теперь (6) не выполнено. Поскольку мы доказываем равенство

$$\lim_{k\to+\infty} V(E_k) = V(E), \tag{8}$$

то будем предполагать выполненным условие

$$\lim_{k\to+\infty} V(E_k) < +\infty. \tag{9}$$

И пусть

$$C_2(E^+) > 0, \quad C_2(E^- \cup G^-) < +\infty, \tag{10}$$

ибо в противном случае верна цепочка соотношений $V(E) = W(E) = \lim\limits_{k\to+\infty} W(E_k) \leqslant \lim\limits_{k\to+\infty} V(E_k)$, которая доказывает (8). В наших предположениях существует $k_0 \in \mathbb{N}$, для которого $C_2(E_{k_0}^- \cup G_{k_0}^-) < +\infty$. Учитывая, что в условиях леммы

$$G_1^- \subset G_2^- \subset \ldots \subset G^-, \tag{11}$$

отсюда и из (10) имеем

$$C_2(E_k^- \cup G_k^-) < +\infty \quad \forall k \geqslant k_0. \tag{12}$$

Из (9), (12) в силу теоремы 4 работы [7] имеем оценки $V(E_k) \geqslant [C_2(E_k^+)]^{-1} + [C_2(E_k^-)]^{-1} - 2/\inf\limits_{x\in E_k^+, y\in E_k^-} |x-y|^{p-2}$ $\forall k \geqslant k_0$, из которых заключаем, что доказательство достаточно провести в случае $\lim\limits_{k\to+\infty} C_2(E_k^-) > 0$. Рассуждая аналогично [4, с. 185], можно видеть, что при этом условии $C_2(E^-) > 0$ и

$$\lim_{k\to+\infty} \|\gamma_{E_k^-} - \gamma_{E^-}\| = 0. \tag{13}$$

В предположениях (9), (12) существуют [5] заряды $\lambda_k \in \mathfrak{N}^1(E_k)$ с энергией $\|\lambda_k\|^2 = V(E_k)$.

Рассуждая так же, как ранее для ω_k, убеждаемся, что λ_k сильно сходятся к некоторому заряду $\varkappa \in \mathfrak{N}^{(1)}(E)$. Пользуясь описанием $U^{\lambda k}(x)$ [5] и соотношениями (9), (13), можно видеть, что для λ_k и $\varkappa$ справедливы утверждения (13) — (22) из [5] в обозначениях $E = L$, $E_k = L_k$, которые показывают, что $\varkappa^-(\overline{\mathbb{R}}^p) = 1$, а значит, $\varkappa \in \mathfrak{N}^1(E)$. Цепочка соотношений $V(E) \leqslant \|\varkappa\|^2 = \lim\limits_{k\to+\infty} V(E_k) \leqslant V(E)$ доказывает (8). Лемма 2 доказана.

Если для E и $\{E_k\}$ выполнены условия леммы 1 (соответственно леммы 2), то условимся говорить, что $\{E_k\}$ аппроксимирует E извне (соответственно изнутри) зазора.

Для $Q_1, Q_2 \subset \overline{\mathbb{R}}^p$, $Q_1 \subset Q_2$, положим $\rho(Q_1, Q_2) = \sup\limits_{x\in Q_2\setminus\{\infty\}} \inf\limits_{y\in Q_1\setminus\{\infty\}} |x-y|$.

Следствие 1. *Пусть $\{E_k\}$ аппроксимирует E изнутри зазора и $\lim\limits_{k\to+\infty} \rho(E^-, E_k^-) = 0$. Тогда верно* (8).

Действительно, в условиях следствия верно $C_2(E^-) = \lim\limits_{k\to+\infty} C_2(E_k^-)$, откуда с учетом (11) видно, что в рассматриваемом случае совокупность условий (6) несовместима.

Следствие 2. *Для всякого E существует последовательность регулярных конденсаторов $\{E_k\}$, аппроксимирующая E изнутри зазора, для которой выполняется* (8).

Доказательство. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим разбиение $\overline{\mathbb{R}}^p$ на счетное множество p-мерных интервалов $A_m^k = \{x \in \overline{\mathbb{R}}^p : m/2^k \leqslant x_i \leqslant (m+$

$+1)/2^k,\ i=1,\dots,p\},\ m=0,\pm 1,\dots$ Положим

$$Z_k=\mathrm{Int}_\Omega\Big(\Big[\bigcup_{m:A_m^k\subset Z_E}A_m^k\Big]\cup[\{\infty\}\cap Z_E]\Big). \tag{14}$$

При достаточно больших k множество $\Omega\setminus Z_k$ может быть представлено как $E_k^+\cup E_k^-$, где E_k^+, E_k^- замкнуты относительно Ω и такие, что $\overline{E_k^+}\cap\overline{E_k^-}=\varnothing$ $E_k^+\cap E^-=E_k^-\cap E^+=\varnothing$. Конденсаторы $E_k=(E_k^+, E_k^-;\Omega)$ регулярны и удовлетворяют условиям следствия 1.

3. Пусть $B(x_0,r)=\{x\in\mathbb{R}^p:|x-x_0|<r\}$, $\omega_p=pm(B(0,1))$. Тогда 2-емкость конденсатора E допускает следующее представление.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega=\overline{\mathbb{R}^p}$. *Тогда*

$$\operatorname{Cap}E=\begin{cases}(p-2)\,\omega_p/W(E), & \text{если } \infty\in E^-,\\ (p-2)\,\omega_p/V(E), & \text{если } \infty\notin E^-.\end{cases} \tag{15}$$

Как видно из теорем 1 и 2, 2-емкость E, вообще говоря, не представима через класс зарядов $\mathfrak{R}^1(E)$, как это имеет место в случае плоских конденсаторов и логарифмического ядра [8, 9]. С тем, чтобы определить некоторую другую характеристику E, которая имела бы такое представление, нужно расширить класс допустимых функций, отказавшись от условия их непрерывности в бесконечно удаленной точке.

Теорема 3 *Пусть* $\Omega=\mathbb{R}^p$. *Тогда*

$$\operatorname{Cap}E=(p-2)\,\omega_p/V(E). \tag{16}$$

Следствие 3. $0\leqslant\operatorname{Cap}E<+\infty$, *причем* $\operatorname{Cap}E=0$ *в том и только том случае, когда либо* $C_2(E^+)=0$, *либо* $E^-\not\ni\infty$ *и* $C_2(E^-)=0$ (*или, что равносильно, если одно из множеств* $\check{E}^+, \check{E}^-$ *пусто*).

По $E=(E^+,E^-;\Omega)$ с $\operatorname{Cap}E>0$ определим конденсаторы $\check{E}=(\check{E}^+,\check{E}^-;\Omega)$ и $E_0=(E_0^+,E_0^-;\Omega)$, $E_*=(E_*^+,E_*^-;\Omega)$, положив $E_0^+=\check{E}^+\cup G_E^+$, $E_0^-=\check{E}^-\cup G_E^-$, $E_*^+=E^+\cap\partial_\Omega G_E$, $E_*^-=E^-\cap\partial_\Omega G_E$.

Следствие 4. $\operatorname{Cap}E_*=\operatorname{Cap}\check{E}=\operatorname{Cap}E=\operatorname{Cap}E_0$.

Теоремы 2, 3 проясняют роль бесконечно удаленной точки в определении 2-емкости конденсатора E. С этой же целью приведем следующее следствие из теорем 2 и 1.

Следствие 5. *Пусть* $E=(E^+,E^-;\overline{\mathbb{R}^p})$, $C_2(E^+)>0$, $x_0\in G\cup G^+$ — *произвольная точка. Тогда* $\operatorname{Cap}(E^+,E^-\cup\{x_0\};\overline{\mathbb{R}^p})$ *равно* $\operatorname{Cap}E$, *если* $x_0\neq\infty$, *и строго больше* $\operatorname{Cap}E$, *если* $x_0=\infty$

Для конденсатора $E=(E^+,E^-;\Omega)$ определим функцию $u(x)=u_E(x)=U^\omega(x)/\|\omega\|^2$, если $W(E)<+\infty$, и функцию $v(x)=v_E(x)=[U^\lambda(x)-(\lambda^-,\lambda)]/\|\lambda\|^2$, если $V(E)<+\infty$. Положим

$$\varphi(x)=\varphi_E(x)=\begin{cases}v(x) & \text{при } E^-\not\ni\infty,\\ u(x) & \text{при } E^-\ni\infty.\end{cases}$$

Учитывая равенство [4] $D(U^\nu(x))=(p-2)\,\omega_p\|\nu\|^2$ $\forall\nu\in\mathfrak{E}$, из теорем 2, 3 получаем такое следствие

Следствие 6. *Если* $\operatorname{Cap}E>0$, *то* $D(\varphi)=\operatorname{Cap}E$.

Из свойств $U^\omega(x)$ и $U^\lambda(x)$ [4—6] следует, что функция φ абсолютно непрерывна на линиях в $\mathbb{R}^p$, непрерывна в $\Omega\setminus I_{\partial G}$, гармонична в $\mathbb{R}^p\setminus\partial G$, равна 1 и 0 соответственно на $\check{E}^+\cup G^+\setminus I_{\partial G}$ и $\check{E}^-\cup G^-\setminus I_{\partial G}$. Поэтому, если E регулярен, то φ — допустимая и экстремальная функция в задаче (1).

4. Для доказательства теорем 2 и 3 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $E=(E^+,E^-;\overline{\mathbb{R}^p})$ *удовлетворяет совокупности условий*: а) E *регулярен*; б) $\infty\notin\overline{\partial G}$; в) $m(\partial G)=0$. *Тогда* $D(\varphi)=\operatorname{Cap}E=(p-2)\,\omega_p/V(E)$.

Доказательство. Из условия б) следует, что если бесконечно удаленная точка принадлежит E^-, то она принадлежит $E^-\cup G^-$ вместе со своей окрестностью, а в этом случае верно [5] $u=v$. Следовательно, в условиях леммы $\varphi=v\in\mathscr{L}(E)$. Учитывая гармоничность функции v на $\mathbb{R}^p\diagdown\partial G$, ее постоянность на связных компонентах множества $\mathbb{R}^p\diagdown\overline{G}$ и свойство в), видим, что искомое утверждение будет доказано, если мы установим равенство

$$\int\limits_{G_0}(\operatorname{grad}v(x),\operatorname{grad}h(x))\,dm(x)=0\quad\forall f=v+h\in\mathscr{L}(E),\tag{17}$$

где G_0 — неограниченная компонента связности G.

При условии б) заряд λ финитен и $\lambda\in\mathfrak{R}^1(E)$ [5], откуда следует, что ограниченная и гармоническая в окрестности бесконечно удаленной точки функция $U^\lambda(x)$ имеет в ней разложение

$$U^\lambda(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}Y_k(\theta)/|x|^{p-2+k}\tag{18}$$

в ряд по гармоническим функциям, равномерно сходящийся при всех x, $|x|>R$. Здесь θ — точка пересечения вектора $\overrightarrow{Ox}$ и единичной сферы. Из (18) следует асимптотическая формула

$$\partial U^\lambda(x)/\partial|x|=O(|x|^{-p}),\ |x|\to+\infty.\tag{19}$$

Пусть $\{a_k\}$ — монотонно убывающая к нулю последовательность достаточно малых чисел, E_0^+ и E_0^- — компактные множества такие, что $\partial E_0^+=E^+\cap\partial G_0$, $\partial E_0^-=E^-\cap\partial G_0$, а $U_k=\bigcup\limits_{x\in E_0^+}B(x,a_k)$. Множество $F_k=\overline{U}_k\diagdown U_{k+1}$ — компакт, состоящий из конечного числа замкнутых областей F_k^i, $i=1,\dots,n_k$, и лежащий в области гармоничности v. Согласно теореме Келлога [10], множество $K=\{x\in F_k:\operatorname{grad}v(x)=0\}$ находится на конечном числе поверхностей уровня $v=\mathrm{const}$, а поэтому существуют $\gamma_k^i\in(\inf\limits_{x\in F_k^i}v(x),\ \sup\limits_{x\in F_k^i}v(x))$, $i=1,\dots,n_k$, такие, что $M_k^i=\{x\in F_k^i:v(x)=\gamma_k^i\}$ имеют пустое пересечение с K. Множество $M_k^+=\bigcup\limits_{i=1}^{n_k}M_k^i$ есть $(p-1)$-мерное аналитическое многообразие (не обязательно связное), отделяющее E_0^+ от E_0^- и лежащее в U_k. Пусть M_k^- — аналогичным образом построенное $(p-1)$-мерное аналитическое многообразие, отделяющее E_0^- от E_0^+ и лежащее в a_k-окрестности E_0^-, $\{r_k\}$ — монотонно стремящаяся к $+\infty$ последовательность достаточно больших чисел, D_k — ограниченная область, определяемая равенством $\partial D_k=M_k^+\cup M_k^-\cup\partial B(0,r_k)$. К области D_k применима формула Грина, согласно которой

$$\int\limits_{D_k}(\operatorname{grad}v(x),\ \operatorname{grad}h(x))\,dm(x)=\int\limits_{\partial D_k}h(x)\,\frac{\partial v(x)}{\partial n}\,d\sigma(x),\tag{20}$$

где σ — «площадь» элемента поверхности ∂D_k, а $\partial/\partial n$ обозначает дифференцирование вдоль внешней нормали.

Как видно из (18), $\int\limits_{\partial B(0,r_k)}[\partial v(x)/\partial n]\,d\sigma(x)=0$. Применяя к D_k и v

стандартные рассуждения [11, с. 84], отсюда имеем

$$\int\limits_{M_k^+}\left|\frac{\partial v(x)}{\partial n}\right|d\sigma(x)=\int\limits_{M_k^-}\left|\frac{\partial v(x)}{\partial n}\right|d\sigma(x)=c\quad\forall k. \tag{21}$$

Функция h, как разность двух функций из $\mathscr{L}(E)$, непрерывна в $\overline{\mathbb{R}^p}$ и принимает значение 0 на $\partial(E_0^+\cup E_0^-)$. Поскольку $E_0^+\cup E_0^-$ — компакт, из (21) с учетом отмеченных свойств h получаем

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{M_k^+\cup M_k^-}h(x)\frac{\partial v(x)}{\partial n}d\sigma(x)=0. \tag{22}$$

То, что верно

$$\lim_{k\to+\infty}\int\limits_{\partial B(0,r_k)}h(x)\frac{\partial v(x)}{\partial n}d\sigma(x)=0, \tag{23}$$

следует из ограниченности h и асимптотической формулы (19). Переходя в (20) к пределу по $k\to+\infty$, из (22), (23) получаем (17). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть E — произвольный конденсатор в $\overline{\mathbb{R}^p}$, $\{E_k\}$ — последовательность конденсаторов, удовлетворяющих условиям лемм 2 и 3. Построение такой последовательности повторяет рассуждения при доказательстве следствия 2 с заменой (14) на

$$Z_k=\begin{cases}\operatorname{Int}_{\overline{\mathbb{R}^p}}\Big(\bigcup\limits_{m:A_m^k\subset Z_E}A_m^k\cup\{\infty\}\Big), & \text{если } \infty\notin E^-,\\ \operatorname{Int}_{\overline{\mathbb{R}^p}}\Big(\bigcup\limits_{m:A_m^k\subset Z_E\cap B(0,k)}A_m^k\Big), & \text{если } \infty\in E^-.\end{cases}$$

На основании леммы 3 и теоремы 3.3 из [3] имеем

$$\operatorname{Cap}E=\lim_{k\to+\infty}\operatorname{Cap}E_k=(p-2)\,\omega_p/\lim_{k\to+\infty}V(E_k). \tag{24}$$

Если $\infty\in E^-$, то, как видно из наших построений, верно $C_2(E_k^-)=+\infty$ $\forall k$. Воспользовавшись теоремой 1, из (24), (4) получаем первое из равенств (15). Если $\infty\notin E^-$ и $C_2(E^-\cup G^-)<+\infty$, то $C_2(E_k^-\cup G_k^-)<+\infty$ $\forall k\geqslant k_0$ (ибо верно (11) и $\infty\notin E_k^-$ $\forall k\geqslant k_0$), а значит, совокупность условий (6) не выполняется. Из (24), (8) получаем второе из равенств (15).

Доказательство теоремы 3. Пусть E — конденсатор в $\mathbb{R}^p$. Если E^- — компакт, то утверждение (16) получаем из теоремы 2 и равенства $\operatorname{Cap}(E^+,E^-;\mathbb{R}^p)=\operatorname{Cap}(\overline{E^+},E^-;\overline{\mathbb{R}^p})$, которое в свою очередь следует из [3] (теорема 5.5). Если $\overline{E^-}\ni\infty$, строим последовательность конденсаторов $\{F_k\}$ с компактными F_k^+, F_k^-, которая аппроксимирует E извне зазора. Тогда $\operatorname{Cap}F_1\leqslant\operatorname{Cap}F_2\leqslant\ldots\leqslant\operatorname{Cap}E$ и, по доказанному, $\operatorname{Cap}F_k=(p-2)\omega_p/V(F_k)$. Отсюда с помощью леммы 1 получаем $\operatorname{Cap}E\geqslant(p-2)\,\omega_p/V(E)$. Если конденсатор E регулярен, то $\varphi=v\in\mathscr{L}(E)$ и, следовательно, верно обратное неравенство

$$\operatorname{Cap}E\leqslant(p-2)\,\omega_p/V(E). \tag{25}$$

В противном случае строим последовательность $\{E_k\}$, о которой говорится в следствии 2. Тогда $\varphi_{E_k}=v_{E_k}\in\mathscr{L}(E_k)\subset\mathscr{L}(E)$, а значит, $\operatorname{Cap}E\leqslant(p-2)\,\omega_p/V(E_k)$ $\forall k$. Устремив k к $+\infty$ и воспользовавшись равенством (8), снова получаем (25).

5. Множество $\gamma\subset\overline{\mathbb{R}^p}$ назовем кривой в $\overline{\mathbb{R}^p}$, если γ есть непрерывный образ открытого одномерного интервала I.

Пусть Γ — некоторое семейство кривых в $\overline{\mathbb{R}^p}$. Обозначим через $J(\Gamma)$ множество всех неотрицательных борелевских функций ρ, которые для каждой локально спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma$ удовлетворяют условию $\int\limits_{\gamma} \rho(x)\,ds(x) \geqslant 1$. Здесь s — длина дуги на γ. Величину

$$M(\Gamma) = \inf_{\rho \in J(\Gamma)} \int\limits_{\mathbb{R}^p} \rho^2(x)\,dm(x)$$

называют 2-модулем семейства Γ.

Пусть $E = (E^+, E^-; \Omega)$ — конденсатор в Ω. Будем говорить, что кривая $\gamma: I \to \overline{\mathbb{R}^p}$ соединяет E^+ и E^- в Ω, если $\gamma(I) \subset \Omega$ и каждое из множеств $E^+ \cap \mathrm{Cl}_\Omega\, \gamma(I)$, $E^- \cap \mathrm{Cl}_\Omega\, \gamma(I)$ непусто. Обозначим через $\Gamma(E)$ семейство всех кривых, соединяющих E^+ и E^- в Ω.

Теорема 4. *Верно равенство*

$$\mathrm{Cap}\, E = M(\Gamma(E)). \tag{26}$$

Для E, удовлетворяющего условию (2), равенство (26) установлено в [3]. Если $\Omega = \mathbb{R}^p$ и E^- неограничено, можно построить последовательность $\{E_k = (E_k^+, E_k^-; \mathbb{R}^p)\}$ с компактными E_k^+, E_k^-, аппроксимирующую E извне зазора. Поскольку для E_k верно (26), из теоремы 3, леммы 1 и леммы 2.3 из [2] получаем требуемое.

6. Справедливы следующие утверждения о непрерывности характеристик $\mathrm{Cap}\, E$ и $M(\Gamma(E))$.

Теорема 5. *Пусть $\{E_k = (E_k^+, E_k^-; \Omega)\}$ аппроксимирует $E = (E^+, E^-; \Omega)$ изнутри зазора. Тогда верны соотношения*

$$\mathrm{Cap}\, E \leqslant \lim_{k \to +\infty} \mathrm{Cap}\, E_k, \quad M(\Gamma(E)) \leqslant \lim_{k \to +\infty} M(\Gamma(E_k)), \tag{27}$$

причем знак «$<$» в (27) *верен тогда и только тогда, когда $\Omega = \mathbb{R}^p$ и выполнено* (6).

Теорема 5 следует из теорем 1—4 и леммы 2. В случае $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p}$ теорема 5 известна [3].

Теорема 6. *Пусть $\{E_k = (E_k^+, E_k^-; \Omega)\}$ аппроксимирует $E = (E^+, E^-; \Omega)$ извне зазора. Тогда*

$$\mathrm{Cap}\, E = \lim_{k \to +\infty} \mathrm{Cap}\, E_k, \quad M(\Gamma(E)) = \lim_{k \to +\infty} M(\Gamma(E_k)). \tag{28}$$

Замечание. Если в условиях теоремы 6 заменить (3) на (3′), то для конденсаторов в $\overline{\mathbb{R}^p}$ утверждение (28) будет верно в том и только том случае, если не выполняется совокупность условий $C_2(E^+) > 0$, $\infty \in E^-$, $C_2(E^- \cup G^-) < +\infty$, $\infty \notin E_k^-$ $\forall k$.

Утверждения теоремы 6 и замечания следуют из теорем 1—4 и леммы 1.

1. *Gering F. W.* Symmetrization of rings in space // Trans. Amer. Math. Soc.— 1961.— **101**, N 3.— P. 499—519.
2. *Ziemer W. P.* Extremal length and p-capacity // Mich. Math. J.— 1969.— **16**, N 1.— P. 43—51.
3. *Hesse J.* A p-extremal length and p-capacity equality // Ark. mat.— 1975.— **13**, N 1.— P. 131—144.
4. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала.—М. : Наука, 1966.— 515 с.
5. *Зорий Н. В.* Экстремальная задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 4.— С. 431—437.
6. *Зорий Н. В.* Некоторые функциональные характеристики пространственных конденсаторов и соотношения между ними.— Киев, 1985.— 48 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.57).
7. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов.— Киев, 1985.— 43 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.06).
8. *Bagby T.* The modulus of a plane condenser // J. Math. and Mech.—1967.—**17**, N 4.— P. 315—329.

9. *Тамразов П. М.* О вариационных задачах теории логарифмического потенциала // Исследования по теории потенциала.— Киев, 1980.— С. 3—13.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.25).
10. *Kellog O. D.* Foundations of potential theory — Berlin : Springer, 1929.— 384 p.
11. *Хейман В. К.* Многолистные функции.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— 180 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 22.07.85

УДК 519.210

Т. С. Иванченко, Л. А. Сахнович

Операторный подход к схеме В. П. Потапова исследования интерполяционных проблем

В последние годы найдены новые плодотворные методы решения классических интерполяционных задач и их обобщений [1—6]. Одним из них является метод В. П. Потапова [3—6]. В настоящей статье проводится унификация схемы В. П. Потапова, опирающаяся на операторные тождества (ОТ) [7]. ОТ позволяют выработать единый подход к формулировке и исследованию интерполяционных задач.

Пусть заданы гильбертовы пространства H, G и G_1, причем

$$G = G_1 \oplus G_1, \quad \dim G_1 < \infty. \tag{1}$$

В дальнейшем будем предполагать, что операторы A, Π, J, S связаны ОТ

$$AS - SA^* = i\Pi J\Pi^*, \tag{2}$$

где A, $S \in [H, H]$, $\Pi \in [G, H]$, $J \in [G, G]$. (Через $[H_1, H_2]$ обозначен класс ограниченных операторов, действующих из H_1 в H_2.) Оператору Π и разложению (1) соответствует представление $\Pi = [\Pi_1, \Pi_2]$, где $\Pi_1, \Pi_2 \in [G_1, H]$.

Предположим дополнительно, что блочное представление J, порожденное разложением (1), имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}, \qquad E \in [G_1, G_1]. \tag{3}$$

Обозначим через N класс операторов из $[H, H]$, спектр которых состоит из конечного или счетного множества точек. Будем предполагать, что $A \in N$. Под множеством $\mathfrak{E}$ будем понимать совокупность неубывающих оператор-функций $\sigma(t)$ со значениями в классе $[G_1, G_1]$, для которых в слабом смысле сходятся интегралы

$$S_\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} (E - At)^{-1} \Pi_2 d\sigma(t) \Pi_2^* (E - A^* t)^{-1}, \tag{4}$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{1 + t^2}. \tag{5}$$

Если $\sigma(t) \in \mathfrak{E}$, то сходится в слабом смысле интеграл [8]

$$\Pi_{1,\sigma} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A (E - tA)^{-1} + \frac{t}{1 + t^2} E \right] \Pi_2 d\sigma(t). \tag{6}$$

Введем операторы

$$\tilde{S} = S_\sigma + FF^*, \ \Pi_1 = \Pi_{1,\sigma} + i(\Pi_2\alpha + F\beta^{1/2}), \tag{7}$$