УДК 517.51

Д. А. Найко

О приближении производных некоторыми комбинациями операторов класса В

1. Введение и вспомогательные факты. Пусть E — множество вещественных, непрерывных функций f, рассматриваемых на действительной оси R и растущих на бесконечности не быстрее экспоненциальных функций, т. е. $\exists a>0$, $\exists M>0$: $|f(t)|\leqslant Me^{a|t|}$ $\forall t\in R$; $C^{(r)}(R)=\{f:f^{(r)}$ непрерывна на $R\}$; $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$.

На множестве E функций f рассмотрим линейный положительный оператор (л. п. о.) $L_n(f;x)$, который определен Ю. И. Волковым [1] следующим образом.

Пусть на измеримом пространстве $(R,\mathfrak{R}(R))$, где $\mathfrak{R}(R)$ — σ-алгебра борелевских множеств на R, задана невырожденная мера U Лебега — Стилтьеса. Если существует функция $u(z)=\int\limits_R e^{-zt}U(dt)$, аналитическая в области $Z=\{z:\operatorname{Re}z\in S\}$, где S — некоторая область в R, то функция $u(z)$ называется двусторонним преобразованием Лапласа меры U и пишется $U\doteqdot u(z)$.

Пусть U_n — такая мера, что $U_n\doteqdot(u(n^{-1}z))^n$, $n\in\mathbb{N}$; $x(s)=-\dfrac{d}{ds}\ln u(s)$; $s(x)$ — отображение, обратное к отображению $x(s)$, $x\in X:=x(S)$. Построим последовательность л. п. о. вида

$$L_n(f;x)=\int\limits_R f(t)\exp(-nw(s(x),t))\,U_n(dt),\quad n\in\mathbb{N},\tag{1}$$

где $w(s(x),t)=s(x)\,t+\ln u(s(x))$, $f\in E$. Последовательность л. п. о. $\{L_n(f;x)\}$ называется последовательностью класса B, порождаемой мерой U.

Будем рассматривать также продифференцированные операторы

$$L_n^{(\nu)}(f;x)=\int\limits_R f(t)\,(\exp(-nw(s(x),t)))_x^{(\nu)}\,U_n(dt),\quad \nu\in\mathbb{N}_0,\tag{2}$$

которые совпадают с производными функции $L_n(f;x)$, если $f(t)$ не зависит от x.

В работе [1] показано, что л. п. о. (1) удовлетворяет соотношениям $L_n(1;x)=1$, $\dfrac{d}{dx}L_n(f(t);x)=nw(x)\,L_n(f(t)(t-x);x)$, где $(v(x))^{-1}:=w(x)=(L_1((t-x)^2;x))^{-1}$ — информационная функция; $v(x)>0$ $\forall x\in X$; $v\in C^\infty$.

Функции

$$S_{k,n}(x)=L_n((t-x)^k;x)\tag{3}$$

и

$$S_{k,n}^{\nu}(x)=L_n^{(\nu)}((t-x)^k;x),\qquad k,\nu\in\mathbb{N}_0,\tag{4}$$

называются центральными моментами операторов L_n и $L_n^{(\nu)}$ соответственно.

Для центральных моментов (3) справедливо представление [2]

$$S_{m,n}(x)=\sum_{r=0}^{[m/2]}a_{r,m-r}(x)\,n^{r-m},\quad m\in\mathbb{N}_0,\tag{5}$$

где функции $a_{r,m-r}=a_{r,m-r}(x)$ не зависят от n и удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$a_{j,r+1}(x)=v(x)\,(a'_{j,r}(x)+(j+r)\,a_{j-1,r}(x)),\tag{6}$$

причем $a_{00}:=1$, $a_{j,k}:=0$, если $j>k$; $a_{-1,k}:=0$; $v(x)=(w(x))^{-1}$, В работе [2] установлено, что если $f \in C^{2k}(R)$, $k \geqslant 1$, то для всякого $x \in X$

$$L_n(f; x) = f(x) + \sum_{s=1}^{k} Y_s f(x) n^{-s} + o(n^{-k}), \qquad n \to \infty, \tag{7}$$

где

$$Y_s := \sum_{j=0}^{s} \frac{a_{j,s}(x)}{(j+s)!} D^{j+s}, \qquad s \in \mathbb{N}, \tag{8}$$

D^{j+s} — оператор дифференцирования порядка $j + s$.

В данной работе рассматриваются некоторые подходы к улучшению сходимости последовательности $\{L_n^{(\nu)}(f; x)\}$ к $f^{(\nu)}(x)$, если $L_n(f; x)$ — оператор класса B, а функция f достаточно гладкая.

2. Операторные комбинации. Пусть $A_0 := \mathcal{J}$ (тождественный оператор),

$$A_k := -\sum_{r=1}^{k} A_{k-r} Y_r, \qquad k \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

где Y_r определяется равенством (8).

Введем линейный оператор

$$L_{n,m}(f; x) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k L_n(f: x) n^{-k}, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

где $L_n(f; x)$ — оператор класса B.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C^{2m+\nu}(R)$. *Тогда* $\forall x \in X$

$$\lim_{n\to\infty} n^m D^\nu (f(x) - L_{n,m}(f; x)) = (A_m f(x))^{(\nu)}. \tag{11}$$

Доказательство. Вначале выразим функции (4) через функции (3). Действуя оператором $L_n(\cdot; x)$ на равенство $t^r = \sum_{i=0}^{k} (x^r)^{(i)} (t-x)^i / i!$, $0 \leqslant r \leqslant k$, получаем

$$L_n(t^r; x) = \sum_{i=0}^{k} (x^r)^{(i)} S_{i,n}(x)/i!, \qquad 0 \leqslant r \leqslant k. \tag{12}$$

Используя (12), а также формулу Лейбница, имеем

$$S_{k,n}^{\nu}(x) = \sum_{r=0}^{k} (-x)^{k-r} \binom{k}{r} L_n^{(\nu)}(t^r; x) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \sum_{r=0}^{k} (-x)^{k-r} \binom{k}{r} D^\nu ((x^r)^{(i)} S_{i,n}(x)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \sum_{j=0}^{\nu} \binom{\nu}{j} x^{k-i-j} (S_{i,n}(x))^{(\nu-j)} \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} (r)_{i+j} = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \sum\nolimits_1, \tag{13}$$

где $(r)_m = r(r-1)\ldots(r-m+1)$ Однако если тождество $(t-x)^k = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} x^{k-r} t^r$ продифференцировать m раз, а затем положить $x = t = 1$, то получим

$$\sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} (r)_m = \begin{cases} k!, \text{ если } m = k, \\ 0, \text{ если } m \neq k. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{j=0}^{\nu} k! \binom{\nu}{j} (S_{i,n}(x))^{(\nu-j)}\Big|_{j=k-i} = k! \binom{\nu}{k-i} (S_{i,n}(x))^{(\nu-k+i)}$$

и тогда из (13) получаем равенство

$$S_{k,n}^{\nu}(x) = k! \sum_{i=0}^{k} \binom{\nu}{k-i} (S_{i,n}(x))^{(\nu-k+i)}/i!, \qquad \nu, k \in \mathbb{N}_0. \tag{14}$$

Теперь покажем, что асимптотическое равенство (7) можно продифференцировать ν раз. Пусть $s = 2m + \nu$ и

$$f(t) = \sum_{k=0}^{s} f^{(k)}(x)(t-k)^k/k! + (f^{(s)}(x + \theta(t-x)) - f^{(s)}(x))(t-x)^s/s! =$$

$$= T_s(t, x) + \rho_s(t, x), \qquad 0 < \theta < 1. \tag{15}$$

Подействуем оператором $L_n^{(\nu)}(\cdot; x)$ на равенство (15). В [1] установлено, что

$$L_n^{(\nu)}(\rho_s(t, x); x) = o(n^{(\nu-s)/2}), \qquad n \to \infty. \tag{16}$$

Используя равенства (15) и (5), меняя, где нужно, порядок суммирования, можно показать, что

$$L_n^{(\nu)}(T_s(t, x); x) = \sum_{k=0}^{s} n^{-k} \sum_{i=0}^{s-k} \left(\sum_{j=0}^{s-k} \binom{\nu}{i-j} a_{j,k}^{(\nu-i+j)}(x)/(j+k)! \right) f^{(k+i)}(x).$$

Отсюда с учетом (15) и (16) имеем

$$L_n^{(\nu)}(f; x) = \sum_{k=0}^{m} Y_{k,s}^{\nu} f(x) n^{-k} + o(n^{-m}), \qquad n \to \infty, \tag{17}$$

где $Y_{k,s}^{\nu} := \sum_{i=0}^{s-k} \sum_{j=0}^{s-k} \left(\binom{\nu}{i-j} a_{j,k}^{(\nu-i+j)}(x)/(j+k)! \right) D^{k+i}$, $k \geqslant 0$, $s \geqslant 2$. Однако для случая $0 \leqslant k \leqslant m$ с учетом (6) получаем

$$Y_{k,s}^{\nu} f(x) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{s-k-j} \binom{\nu}{i} a_{j,k}^{(\nu-i)}(x) f^{(k+i-j)}(x)/(j+k)!,$$

кроме того, $0 \leqslant \nu \leqslant s - k - j$. В таком случае

$$Y_{k,s}^{\nu} f(x) = \Big(\sum_{j=0}^{k} a_{j,k}(x) f^{(k+j)}(x)/(j+k)! \Big)^{(\nu)} = (Y_{k,s} f(x))^{(\nu)} = (Y_k f(x))^{(\nu)}, \tag{18}$$

где Y_k определяется равенством (8). Таким образом, из (17) и (18) следует асимптотическое равенство

$$L_n^{(\nu)}(f; x) = \sum_{k=0}^{m} (Y_k f(x))^{(\nu)} n^{-k} + o(n^{-m}), \qquad n \to \infty, \tag{19}$$

где $f \in C^{2m+\nu}(R)$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}$.

Теперь установим равенство (11). Запишем равенство (7) в виде $L_n(f; x) = f(x) + \sum_{r=1}^{m-k} Y_r f(x) n^{-r} + o(n^{k-m})$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, и подействуем на обе его части линейным дифференциальным оператором $A_k^{\nu} := D^{\nu} A_k$. Тогда с учетом (19) будем иметь $A_k^{\nu} L_n(f; x) = A_k^{\nu} f(x) + A_k^{\nu} \sum_{r=1}^{m-k} Y_r f(x) n^{-r} +$

$+ o(n^{k-m})$, $n \to \infty$. Из последнего равенства и формул (9), (10) следует

$$D^{\nu} L_{n,m}(f; x) = \sum_{k=0}^{m-1} A_k^{\nu} f(x) n^{-k} + \sum_{j=1}^{m} n^{-j} \sum_{k=1}^{j} A_{j-k}^{\nu} Y_k f(x) + o(n^{-m}) =$$

$$= f^{(\nu)}(x) + A_m^{\nu} f(x) n^{-m} + o(n^{-m}), \qquad n \to \infty,$$

откуда и получаем (11). Теорема доказана.

Замечание 1. Если $L_n(f; x) = B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ — многочлен Бернштейна степени n, то $L_{n,m}(f; x)$ — также многочлен степени n.

Замечание 2. При $\nu = 0$, $m = 3$ из (11) получим равенство, указанное Ю. И. Волковым [2] (соотношение (34)).

3. Комбинации итеративных операторов класса B. В [1] установлено, что если $f \in E$, то при достаточно большом n функции $L_n(f; x)$ определены и $L_n(f; x) \in E$. Поэтому представляется возможным рассматривать л. п. о.

$$L_n^1(f; x) := L_n(f; x), \quad L_n^2(f; x) := L_n(L_n(f; t); x), \ldots$$

$$\ldots, L_n^{s+1}(f; x) := L_n(L_n^s(f; t); x), \qquad s \in \mathbb{N},$$

которые будем называть итеративными л. п. о.

Рассмотрим линейный оператор

$$L_{n,m}(f; x) = \sum_{s=1}^{m} (-1)^{s+1} \binom{m}{s} L_n^s(f; x), \qquad s, m \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Теорема 2. *Если* $f \in C^{2m+\nu}(R)$, *то* $\forall x \in X$

$$\lim_{n \to \infty} n^m D^{\nu}(L_{n,m}(f; x) - f(x)) = (-1)^{m+1} (Y_1^m f(x))^{\nu}, \tag{21}$$

где $L_{n,m}(f; x)$ — *оператор вида* (20), $Y_1 f(x) = v(x) f''(x)/2$, $Y_1^m f(x) := = Y_1(Y_1^{m-1} f(x))$, $m \in \mathbb{N}$, $Y_1^0 f(x) := f(x)$.

Доказательство. Учитывая (19) и рассуждая по индукции, вначале показываем, что

$$D^{\nu} L_n^s(f; x) = f^{(\nu)}(x) + \sum_{1 \leqslant k_1 + k_2 + \ldots + k_s \leqslant m} D^{\nu} Y_{k_s} Y_{k_{s-1}} \ldots Y_{k_1} f(x) n^{-k_1 - k_2 - \ldots k_s} +$$

$$+ o(n^{-m}), \qquad n \to \infty,$$

затем находим асимптотическую формулу для $D^{\nu} L_{n,m}(f; x)$ и используем тождество

$$\sum_{k=j}^{m} (-1)^{k+1} \binom{m}{k} \binom{k}{j} = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant j \leqslant m-1, \ m \geqslant 1 \\ (-1)^{m+1}, & \text{если } j = m, \ m \geqslant 0. \end{cases}$$

Замечание 3. Если в (21) положить $\nu = 0$ и $L_n(f; x) = B_n(f; x)$, то получим результат работы [3].

4. Операторы типа комбинаций Бернштейна. Пусть $S_{k,n}(x)$, $k \geqslant 0$, k-й центральный момент оператора L_n. Рекуррентным образом определим функции

$$b_k(x) := S_{k,n}(x)/k! - \sum_{j=1}^{k-1} b_j(x) S_{k-j,n}(x)/(k-j)! =$$

$$= S_{k,n}(x)/k! - \sum_{j=1}^{k-1} b_{k-j}(x) S_j(x)/j!, \qquad k \geqslant 2;$$

$$b_0(x) := -1,\ b_1(x) := S_{1,n}(x)/1! = 0.$$

Определим линейный оператор $Q_{n,m}(f;x) = -\sum_{k=0}^{m} b_k(x)\,L_n(f^{(k)};x)$.

Теорема 3. *Если $f \in C^{2r+\nu}(R)$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, $r \in \mathbb{N}$, то $\forall x \in X$*

$$\lim_{n\to\infty} n^r D^\nu (Q_{n,2r-1}(f;x) - f(x)) =$$

$$= \sum (-1)^{p+1} \left(\prod_{i=1}^{p} ((2m_i)!!)^{-1} (f^{(2r)}(x)(v(x))^r\right)^{(\nu)}, \tag{22}$$

где сумма берется по всем натуральным решениям уравнения $m_1 + m_2 + \ldots + m_p = r$, $1 \leqslant p \leqslant r$.

Доказательство основано на использовании равенств (5), (19) и свойств функций $b_k(x)$.

Замечание 4. Можно показать, что выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty} n^r D^\nu (Q_{n,2r-2}(f;x) - f(x)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^r ((b_{2r-1}(x))^{(\nu)} + (b_{2r}(x))^{(\nu)}),\ f \in C^{2r+\nu}, \qquad r \geqslant 1, \nu \in \mathbb{N}_0,$$

которое при $\nu = 0$, $r = 2$ и $L_n(f;x) = B_n(f;x)$ превращается в равенство, указанное С. Н. Бернштейном [4].

Для многочленов Бернштейна из равенства (22) при $\nu = 0$, $r = 1$ следует теорема Вороновской [4].

4. Бутцеровские комбинации. Пусть

$$\Omega_{n,k}(f;x) := \sum_{j=0}^{k} \alpha_{j,k} L_{n_j}(f;x), \tag{23}$$

где $\alpha_{j,k} = \prod_{i=0,\ j\neq i}^{k} \lambda_j/(\lambda_j - \lambda_i)$, $k \neq 0$, $\alpha_{0,0} := 1$; $n_j = n\lambda_j$, $n \in \mathbb{N}$; λ_j — различные фиксированные числа $\geqslant 1$.

Теорема 4. *Если $f \in C^{2k+\nu}(R)$, $k \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{N}_0$, то $\forall x \in X$*

$$\lim_{n\to\infty} n^k D^\nu (\Omega_{n,k-1}(f;x) - f(x)) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_{j,k-1}}{(\lambda_j)^k} (Y_k f(x))^{(\nu)},$$

где Y_k определяется равенством (8).

Доказательство основано на использовании равенства (19) и свойств чисел $\alpha_{j,k}$.

Замечание 5. Если $\lambda_j = 2^j$ и $L_n(f;x) = B_n(f;x)$, то оператор (23) будет оператором Бутцера [5].

1. *Волков Ю. И.* Многомерные аппроксимационные операторы, порожденные мерами Лебега—Стилтьеса // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1983.— **47**, № 3.— С. 435—454.
2. *Волков Ю. И.* О некоторых линейных положительных операторах // Мат. заметки.— 1978.— **23**, № 5.— С. 659—669.
3. *Джамалов М. Ш.* К одной теореме Е. В. Вороновской.— М., 1982.— 12 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 4286-82.
4. *Бернштейн С. Н.* Добавление к статье Е. В. Вороновской «Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна» // Собр. соч. : В 4-х т.— М. : Изд-во АН СССР, 1954.— Т. 2.— С. 155—158.
5. *Butzer P. L.* Linear combinations of Bernstein polynomials // Can. J. Math.— 1953.— **5**, N 4.— P. 559—567.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 14.02.86