

9. Тамразов П. М. О вариационных задачах теории логарифмического потенциала // Исследования по теории потенциала.— Киев, 1980.— С. 3—13.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 80.25).
10. Kellog O. D. Foundations of potential theory — Berlin : Springer, 1929.— 384 p.
11. Хейман В. К. Многолистные функции.— М. : Изд-во иностр. лит., 1960.— 180 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 22.07.85

УДК 519.210

Т. С. Иванченко, Л. А. Сахнович

Операторный подход к схеме В. П. Потапова исследования интерполяционных проблем

В последние годы найдены новые плодотворные методы решения классических интерполяционных задач и их обобщений [1—6]. Одним из них является метод В. П. Потапова [3—6]. В настоящей статье проводится унификация схемы В. П. Потапова, опирающаяся на операторные тождества (ОТ) [7]. ОТ позволяют выработать единый подход к формулировке и исследованию интерполяционных задач.

Пусть заданы гильбертовы пространства H , G и G_1 , причем

$$G = G_1 \oplus G_1, \quad \dim G_1 < \infty. \quad (1)$$

В дальнейшем будем предполагать, что операторы A , Π , J , S связаны ОТ

$$AS - SA^* = i\Pi\Pi^*, \quad (2)$$

где $A, S \in [H, H]$, $\Pi \in [G, H]$, $J \in [G, G]$. (Через $[H_1, H_2]$ обозначен класс ограниченных операторов, действующих из H_1 в H_2 .) Оператору Π и разложению (1) соответствует представление $\Pi = [\Pi_1, \Pi_2]$, где $\Pi_1, \Pi_2 \in [G_1, H]$.

Предположим дополнительно, что блочное представление J , порожденное разложением (1), имеет вид

$$J = \begin{bmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{bmatrix}, \quad E \in [G_1, G_1]. \quad (3)$$

Обозначим через N класс операторов из $[H, H]$, спектр которых состоит из конечного или счетного множества точек. Будем предполагать, что $A \in N$. Под множеством \mathfrak{E} будем понимать совокупность неубывающих оператор-функций $\sigma(t)$ со значениями в классе $[G_1, G_1]$, для которых в слабом смысле сходятся интегралы

$$S_\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty} (E - At)^{-1} \Pi_2 d\sigma(t) \Pi_2^* (E - A^*t)^{-1}, \quad (4)$$

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma(t)}{1+t^2}. \quad (5)$$

Если $\sigma(t) \in \mathfrak{E}$, то сходится в слабом смысле интеграл [8]

$$\Pi_{1,\sigma} = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A(E - tA)^{-1} + \frac{t}{1+t^2} E \right] \Pi_2 d\sigma(t). \quad (6)$$

Введем операторы

$$\tilde{S} = S_\sigma + FF^*, \quad \tilde{\Pi}_1 = \Pi_{1,\sigma} + i(\Pi_2\alpha + F\beta^{1/2}), \quad (7)$$

где $\alpha, \beta \in [G_1, G_1]$, $\alpha = \alpha^*$, $\beta \geq 0$, а оператор F определяется равенством

$$AF = \Pi_2 \beta^{1/2}. \quad (8)$$

При этом предполагается, что $F \in [G_1; H]$.

Сформулируем теперь интерполяционную задачу, порождаемую ОТ (2): описать множества $\sigma(t) \in \mathfrak{E}$ и $\alpha = \alpha^*$, $\beta \geq 0$ такие, чтобы заданные операторы S и Π_1 допускали следующие интегральные представления:

$$S = \tilde{S}, \quad \Pi_1 = \tilde{\Pi}_1. \quad (9)$$

При такой постановке задачи снимается требование статьи [8], в силу которого $\beta = 0$ в случае необратимых A .

Заметим, что в силу (7) для разрешимости задачи необходимо, чтобы

$$S \geq 0. \quad (10)$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что справедлива следующая лемма.

Лемма 1. Если $A \in N$, $\sigma(t) \in \mathfrak{E}$, то оператор \tilde{S} удовлетворяет ОТ

$$A\tilde{S} - \tilde{S}A^* = i\tilde{\Pi}\tilde{\Pi}^*, \quad (11)$$

где $\tilde{\Pi} = [\tilde{\Pi}_1, \Pi_2]$.

Из леммы 1 методами линейной алгебры выводится такая лемма.

Лемма 2. Если $\Pi_2 g \neq 0$ при $g \neq 0$, то из представления $S = \tilde{S}$ следует $\Pi_1 = \tilde{\Pi}_1$.

Под Ω_z будем понимать точки комплексной плоскости за исключением точек действительной оси. Обозначим через D совокупность чисел $z \in \Omega_z$ таких, что z^{-1} не принадлежит спектру оператора A . Тогда в терминах ОТ абстрактное матричное неравенство можно представить в виде

$$L(z) = \begin{bmatrix} S & B(z) \\ B^*(z) & C(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in D, \quad (12)$$

где $B(z) = (E - Az)^{-1} [\Pi_1 - i\Pi_2 \omega(z)]$, $C(z) = (\omega(z) - \omega^*(z))/(z - \bar{z})$.

Решение неравенства (12) ищется в классе R , состоящем из аналитических при $z \in \Omega_z$ оператор-функций $\omega(z)$ со значениями в $[G_1, G_1]$, удовлетворяющих условиям

$$\omega(z) = \omega^*(\bar{z}), \quad (\omega(z) - \omega^*(z))/(z - \bar{z}) \geq 0. \quad (13)$$

Если $\omega(z) \in R$, то существует такая неубывающая оператор-функция $\sigma(t)$ со значениями в $[G_1, G_1]$, что интеграл, стоящий в правой части (5), слабо сходится и справедливо представление

$$\omega(z) = \beta z + \alpha + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{t}{1+t^2} \right) d\sigma(t), \quad \alpha = \alpha^*, \quad \beta \geq 0. \quad (14)$$

Введение оператор-функции $\omega(z)$ позволяет свести решение поставленной задачи к исследованию следующей интерполяционной проблемы. Заданы операторы A, Π, J, S , связанные операторным тождеством (2). Требуется описать оператор-функции $\omega(z) \in R$, удовлетворяющие условиям: оператор-функция $\sigma(t) \in \mathfrak{E}$ и операторы $\alpha = \alpha^*$, $\beta \geq 0$, дающие интегральное представление (14), таковы, что заданные операторы S и Π_1 представимы в виде (9).

Покажем теперь, что решение сформулированной интерполяционной проблемы для $\omega(z)$ адекватно исследованию соответствующего основного матричного неравенства (ОМН).

Теорема 1. Пусть $A \in N$, а оператор-функция $\omega(z)$ определена формулой (14). Если $\sigma(t) \in \mathfrak{E}$ и существует оператор $F \in [G_1; H]$, удовлетворяющий соотношению (8), то справедливо неравенство

$$\tilde{L}(z) = \begin{bmatrix} \tilde{S} & \tilde{B}(z) \\ \tilde{B}^*(z) & C(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in D, \quad (15)$$

где

$$\tilde{B}(z) = (E - Az)^{-1} [\tilde{\Pi}_1 - i\Pi_2 \omega(z)]. \quad (16)$$

Доказательство. Непосредственным вычислением проверяется равенство

$$\left(\begin{bmatrix} \tilde{S} & \tilde{B}(z) \\ \tilde{B}^*(z) & C(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \right) = [f + g, f + g], \quad (17)$$

где символом [] обозначено новое скалярное произведение на векторах из $H + G_1$, определенное равенствами

$$[f, f] = \int_{-\infty}^{+\infty} ([d\sigma(t)) \Pi_2^*(E - A^*t)^{-1} f, \Pi_2^*(E - A^*t)^{-1} f) + (F^*f, F^*f), \quad (18)$$

$$[g, g] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(d\sigma(t) g, g)}{|t - z|^2} + (\beta^{1/2} g, \beta^{1/2} g), \quad (19)$$

$$[f, g] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left([d\sigma(t)) \Pi_2^*(E - A^*t)^{-1} f, \frac{g}{t - z} \right) + (F^*f, \beta^{1/2} g). \quad (20)$$

Из формул (15)–(20) вытекает утверждение теоремы.

Чтобы вывести обратное утверждение, рассмотрим класс N_0 , состоящий из операторов $A \in N$ таких, что при любых $C_1, C_2 \in [G_1, H]$, $g \in G_1$ и некоторых $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ из соотношения $\|(E - Az)^{-1} (C_1 + C_2 z) g\| = 0$ (1), $\delta \leq |\arg z| \leq \pi - \delta$, $|z| \geq \varepsilon$, следует

$$C_2 = -AC_1 g. \quad (21)$$

З а м е ч а н и е 1. Оператор $A \in N_0$, если выполняется одно из следующих требований:

1) $A \in N$ и при некоторых $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ спектр A лежит в области $\delta \leq |\arg z| \leq \pi - \delta$, $|z| \geq \varepsilon$;

2) спектр A сосредоточен в нуле и при некоторых $\rho > 0$ выполняется $\lim_{r \rightarrow \infty} [\ln M(r)]/r^\rho < \infty$, $M(r) = \max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \|(E - Az)^{-1}\|$, $z = re^{i\theta}$.

Л е м м а 3. Пусть $A \in N_0$ и ОМН (12) имеет решение $\omega(z)$ вида (14), где $\sigma(t) \in \mathfrak{E}$. Тогда справедливо равенство

$$\Pi_2 \beta = -iA(\Pi_1 - \Pi_{1,\sigma} - i\Pi_2 \alpha), \quad (22)$$

причем $\sigma(t)$, α , β те же, что и в представлении (14).

Доказательство. При $\beta = 0$, $\alpha = 0$ из теоремы 1 следует, что

оператор-функция $\omega_\sigma(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{t - z} - \frac{t}{1 + t^2} \right) d\sigma(t)$ удовлетворяет неравен-

$$L_\sigma(z) = \begin{bmatrix} S_\sigma & B_\sigma(z) \\ B_\sigma^*(z) & C_\sigma(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in D, \quad (23)$$

где $B_\sigma(z) = (E - Az)^{-1} [\Pi_{1,\sigma} - i\Pi_2 \omega_\sigma(z)]$, $C_\sigma(z) = (\omega_\sigma(z) - \omega_\sigma^*(z))/(z - \bar{z})$.

Из неравенств (12) и (23) вытекает $\|B(z)g\|^2 \leq \|S\| (C(z)g, g)$, $\|B_\sigma(z)g\|^2 \leq S_\sigma (C_\sigma(z)g, g)$, т. е. при любых $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ верны соотношения $\|B(z)g\| = O(1)$, $\|B_\sigma(z)g\| = O(1)$ $\delta \leq |\arg z| \leq \pi - \delta$, $|z| \geq \varepsilon$. Значит, справедливо следующее соотношение: $\|[B(z) - B_\sigma(z)]g\| = \|(E - Az)^{-1} (\Pi_1 - \Pi_{1,\sigma} - i\Pi_2 \alpha - i\Pi_2 \beta z)g\| = O(1)$, откуда в силу (21) получаем доказываемое равенство (22).

Из леммы 3 вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 2. Пусть $A \in N_0$ и нуль не является собственным числом A . Если $\omega(z)$ — решение ОМН (12) вида (14), где $\sigma(t) \in \mathfrak{E}$, то существует

один и только один оператор $F \in [G_1, H]$, удовлетворяющий соотношению (8), и справедливо представление

$$\Pi_1 = \tilde{\Pi}_1. \quad (24)$$

Доказательство. Пусть P_β — оператор ортогонального проектирования G_1 на подпространство βG_1 . Полагая $Q = \Pi_1 - \Pi_{1,\sigma} - iP_2\alpha$, из леммы 3 выводим, что $Q = QP_\beta$. На подпространстве $P_\beta G_1$ определен оператор $\beta^{-1/2}$. Легко видеть, что согласно (22) оператор

$$F = -iQ\beta^{-1/2}P_\beta \quad (25)$$

удовлетворяет (8). Единственность F очевидна. Умножая обе части (25) на $\beta^{1/2}$, получаем представление (24).

В теореме 2 даны условия, при которых $\Pi_1 = \tilde{\Pi}_1$. Для получения представления $S = \tilde{S}$ воспользуемся преобразованным основным матричным неравенством (ПОМН) [4].

Введем обозначения

$$\mathcal{L}_0(z) = iA(E - Az)^{-1}, \quad \mathcal{L}_k(z) = (E - Az)^{-1}\Pi_k, \quad k = 1, 2, \quad (26)$$

$$L_n(z) = \begin{bmatrix} E & 0 \\ \mathcal{L}_0(\bar{z}) & \mathcal{L}_2(\bar{z}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S & B(z) \\ B^*(z) & C(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & \mathcal{L}_0^*(\bar{z}) \\ 0 & \mathcal{L}_2^*(\bar{z}) \end{bmatrix}, \quad z \in D. \quad (27)$$

Оператор $L_n(z)$ действует в пространстве $H \oplus H$ и имеет вид

$$L_n(z) = \begin{bmatrix} S & B_n(z) \\ B_n^*(z) & C_n(z) \end{bmatrix}, \quad z \in D, \quad (28)$$

где

$$B_n(z) = S\mathcal{L}_0^*(\bar{z}) + B(z)\mathcal{L}_2^*(\bar{z}), \quad (29)$$

$$C_n(z) = \mathcal{L}_0(\bar{z})S\mathcal{L}_0^*(\bar{z}) + \mathcal{L}_2(\bar{z})B^*(z)\mathcal{L}_0^*(\bar{z}) + \\ + \mathcal{L}_0(\bar{z})B(\bar{z})\mathcal{L}_2^*(\bar{z}) + \mathcal{L}_2(\bar{z})C(\bar{z})\mathcal{L}_2^*(\bar{z}). \quad (30)$$

Преобразуя выражение для $C_n(z)$, получаем равенство

$$C_n(z) = \frac{i}{z-z} [B_n(z) + B_n^*(z)]. \quad (31)$$

Из (27) непосредственно следует, что любое решение ОМН (12) является решением ПОМН

$$L_n(z) = \begin{bmatrix} S & B_n(z) \\ B_n^*(z) & C_n(z) \end{bmatrix} \geq 0, \quad z \in D. \quad (32)$$

Из (32) следует оценка

$$\|B_n(z)f\|^2 \leq \|S\| (C_n(z)f, f). \quad (33)$$

С другой стороны, согласно (31) имеем

$$(C_n(z)f, f) \leq \|B_n(z)f\| \|f\| |\operatorname{Im} z|. \quad (34)$$

Из (33) и (34) вытекает

$$\|B_n(z)f\| \leq \|S\| \|f\| |\operatorname{Im} z|. \quad (35)$$

В силу (31), (32) и (35) имеем

$$B_n(z) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_n(t)}{t-z}, \quad (36)$$

где $\sigma_n(t)$ — неубывающая оператор-функция со значениями в классе $[H, H]$ и

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (d\sigma_n(t)f, f) \leq \|S\| \|f\|^2. \quad (37)$$

Пусть сегмент $[\alpha, \beta]$ не содержит особых точек оператор-функции $(E - At)^{-1}$.

Пользуясь формулой обращения, из (29) и (36) получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\sigma_{\Pi}(t) = \int_{\alpha}^{\beta} (E - At)^{-1} \Pi_2 d\sigma(t) \Pi_2^* (E - A^*t)^{-1}. \quad (38)$$

Из (37) и (38) вытекает следующая теорема.

Теорема 3. Если $\omega(z)$ из класса R является решением ОМН (12), то соответствующая оператор-функция $\sigma(t)$ принадлежит классу \mathfrak{E} .

Значит, слабо сходится интеграл, стоящий в правой части (4), причем $\|S_{\sigma}\| \leq \|S\|$.

Теорема 4. Если ОМН (12) имеет решение $\omega(z)$, $A \in N_0$ и $\Pi_1 = \tilde{\Pi}_1$, то 1) $\sigma(t) \in \mathfrak{E}$; 2) $A(S - \tilde{S}) = 0$; 3) если нуль не является собственным числом A , то $S = \tilde{S}$.

Доказательство теоремы основывается на рассмотрении неравенств (32) и

$$\tilde{L}_{\Pi}(z) = \begin{vmatrix} \tilde{S} & \tilde{B}_{\Pi}(z) \\ \tilde{B}_{\Pi}^*(z) & C_{\Pi}(z) \end{vmatrix} \geq 0, \quad z \in D,$$

где $\tilde{B}_{\Pi}(z) = \tilde{S}\mathcal{L}_0^*(\bar{z}) + \tilde{B}(z)\mathcal{L}_2^*(\bar{z})$. Из (35) и аналогичного соотношения для $\tilde{B}_{\Pi}^*(z)$ вытекает $\| [B_{\Pi}^*(z) - \tilde{B}_{\Pi}^*(z)] f \| = \| (E - Az)^{-1} A (S - \tilde{S}) f \| = O(1)$ при $|z| \geq \varepsilon$, $0 < \delta \leq |\arg z| < \pi - \delta$. Полагая $C_{1g} = A(S - \tilde{S})f$, $C_{2g} = 0$, из (21) получаем $A^2(S - \tilde{S})f = 0$. Значит, $B_{\Pi}^*(z) - \tilde{B}_{\Pi}^*(z) = (E - Az)^{-1} A (S - \tilde{S}) = A(S - \tilde{S})$. Из оценки (35) и последней формулы следуют утверждения теоремы.

Интерполяционную задачу будем называть невырожденной, если оператор S ограничен вместе с обратным. Если оператор S необратим, то такую задачу будем называть вырожденной.

Полное описание решений интерполяционной задачи в невырожденном случае дает следующая теорема.

Теорема 5 [8]. Пусть оператор S ограничен вместе с обратным, положителен, удовлетворяет соотношению (2) и $\Pi_2 g \neq 0$, если $g \neq 0$. Тогда для того чтобы оператор-функция $\omega(z)$ являлась решением неравенства (12), необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление $\omega(z) = i [a(z) \mathcal{P}(z) + b(z) Q(z)] [c(z) \mathcal{P}(z) + d(z) Q(z)]^{-1}$, $\text{Im } z > 0$, где матрица коэффициентов определяется следующим образом:

$$\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix} = E - iz\Pi^* (E - zA^*)^{-1} S^{-1} \Pi J,$$

col $[R(z), Q(z)]$ — неособенная пара, обладающая J -свойством в точках голоморфности z оператор-функций $R(z), Q(z)$.

Замечание 2. Два важных частных случая рассмотрены в статье [8]: 1) оператор A обратим, т. е. $F = A^{-1} \Pi_2 \beta^{1/2}$; 2) $\beta = 0$, т. е. $F = 0$.

Случаю 1 принадлежит усеченная задача Неванлинны—Пи́ка [8], а случаю 2 — W -разностные ядра, обобщающие разностные ядра [8]. Простейший пример интерполяционной задачи, не принадлежащий случаям 1, 2, можно получить, рассматривая оператор A , обратимый на некотором инвариантном подпространстве.

Замечание 3. В статье [8] методом регуляризации для случаев 1, 2 исследуются и вырожденные задачи. Аналогичные результаты могут быть получены и в общем случае.

1. Адамян В. М., Аров Д. З., Крейн М. Г. Аналитические свойства пар Шмидта ганкелева оператора и обобщенная задача Шура—Такаги // Мат. сб.—1977.— 85, № 2.— С. 33—73.
2. Нудельман А. А. Об одной новой проблеме типа проблемы моментов // Докл. АН СССР.— 1977.— 233, № 5.— С. 792—795.

3. Ковалишина И. В., Потапов В. П. Индефинитная метрика в проблеме Неванлинны — Пика // Докл. АН АрмССР.— 1976.— 59, № 1.— С. 17—21.
4. Кацнельсон В. Э. Континуальные аналоги теорем Гамбургера — Неванлинны и основные матричные неравенства классических задач // Теория функций, функц. анализ и их прил.— 1984.— Вып. 40.— С. 79—90.
5. Кацнельсон В. Э. Методы j -теории в континуальных интерполяционных задачах анализа. Ч. 1.— Харьков, 1983.— 249 с.— Деп. в ВИНТИ, № 171-83.
6. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.
7. Сахнович Л. А. О подобии операторов // Докл. АН СССР.— 1971.— 200, № 3.— С. 541—544.
8. Иванченко Т. С., Сахнович Д. А. Операторный подход к исследованию интерполяционных задач.— Одесса, 1985.— 63 с.— Деп. в УкрНИИТИ, № 701.

Одес. ин-т нар. хоз-ва

Получено 30.07.85

УДК 517.944

С. А. Кащенко

Асимптотика установившихся режимов параболических уравнений с быстро осциллирующими по времени коэффициентами и переменной областью определения

Метод усреднения является одним из основных в теории нелинейных колебаний. Проблеме обоснования этого метода (и построения формализма нахождения решений) для обыкновенных дифференциальных уравнений и для некоторых классов уравнений в частных производных посвящено много работ (см., например, [1, 2]). Основными моментами отмеченных исследований являются переход к уравнениям в «стандартной» [1] форме и последующее применение замены переменных Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова — Ю. А. Митропольского. Для некоторых классов уравнений, однако, не всегда возможен переход от задачи с быстро осциллирующими коэффициентами к уравнению в «стандартной» форме. К таким классам уравнений принадлежат, например, уравнения с запаздыванием. Сведение к «стандартной» форме таких уравнений приводит к неограниченному растяжению промежутка запаздывания. Кроме этого, для уравнений с запаздыванием и для параболических уравнений техника замен Н. М. Крылова — Н. Н. Боголюбова — Ю. А. Митропольского неприменима. В настоящей работе, базирующейся на результатах работ [1, 2], используется метод усреднения для изучения вопроса о существовании и асимптотике установившихся режимов нелинейных параболических уравнений с переменной областью определения и быстро осциллирующими коэффициентами. Изложение ведется таким образом, что все результаты оказываются применимы и для аналогичных уравнений с запаздыванием. Отметим, что исследования основаны на сочетании методов теории колебания [1—3] и методов теории сингулярно возмущенных уравнений [4, 5].

1. Постановка задачи и основные результаты. На отрезке $0 \leq x \leq 1$ рассмотрим параболическое уравнение

$$\dot{u} = \gamma(\omega t) Du'' + F(\omega t, x, u) \quad (\dot{u} = \partial u / \partial t, u' = \partial u / \partial x) \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$(u' + B_1(\omega t) u)|_{x=0} = (u' + B_2(\omega t) u)|_{x=1} = 0. \quad (2)$$

Здесь $u \in R^m$, D — положительно определенная $m \times m$ -матрица, скалярная функция $\gamma(\tau)$, элементы матриц $B_j(\tau)$ и вектор-функции $F(\tau, x, u)$ являются тригонометрическими многочленами по τ , причем $\gamma(\tau) \geq \alpha_0 > 0$, а $F(\tau, x, u)$ обладает достаточной гладкостью по x и u и ее базис частот не зависит от x, u . Основное предположение состоит в том, что па-