УДК 519.21

Т. В. Каратаева

О смешанном произведении эволюционных мультипликативных систем без условий непрерывности

В настоящей работе продолжены исследования, начатые в работах [1 — 3], и используются принятые в них обозначения и определения.

Теорема 1. *Пусть y_s^t и v_s^t — а-полугруппы, без таких общих точек разрыва, в которых одна из полугрупп разрывна слева, а другая — справа. Тогда существует предел*

$$\lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} = w_s^t, \tag{1}$$

который не зависит от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$, и этот предел как функция от s и t является а-полугруппой. Кроме того, справед-

лива формула

$$D^{-1}(w)_s^t=\lim_{\delta_n\to 0}\prod_{k=1}^{m_n}(w_{t_{k-1}}^{t_k}+E)=\lim_{\delta_n\to 0}\prod_{k=1}^{m_n}(y_{t_{k-1}}^{t_k}v_{t_{k-1}}^{t_k}+E)=$$

$$=\lim_{\delta_n\to 0}\prod_{k=1}^{m_n}(y_{t_{k-1}}^{t_k}(u_{t_{k-1}}^{t_k}-E)+E)=\lim_{\delta_n\to 0}\prod_{k=1}^{m_n}((x_{t_{k-1}}^{t_k}-E)(u_{t_{k-1}}^{t_k}-E)+E)=$$

$$=\lim_{\delta_n\to 0}\prod_{k=1}^{m_n}((x_{t_{k-1}}^{t_k}-E)v_{t_{k-1}}^{t_k}+E). \qquad (2)$$

Здесь для спрэделенности рассматриваются левые m-полугруппы и поэтому произведения Π *берутся в порядке возрастания индекса* k *слева направо, а* $x_s^t=D^{-1}(y)_s^t$, $u_s^t=D^{-1}(v)_s^t$.

Доказательство. Достаточно показать, что для любого $\varepsilon>0$ на заданном отрезке $[s,t]\subset[0,T]$ существует такое $\delta_n(\varepsilon)=\max_k(t_k-t_{k-1})$, что для произвольных разбиений $\Delta_k[s,t]\supseteq\Delta_n[s,t]$ справедливо неравенство

$$|\Sigma(\Delta_n)-\Sigma(\Delta_k)|=\Big|\sum_{k=1}^{m_n}y_{t_{k-1}}^{t_k}v_{t_{k-1}}^{t_k}-\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{M_k}y_{s_{i-1}}^{s_i}v_{s_{i-1}}^{s_i}\Big|<\varepsilon. \qquad (3)$$

(Здесь верхние индексы n и k у точек t_k^n и s_i^k разбиений соответственно $\Delta_n[s,t]$ и $\Delta_k[t_{k-1},t_k]$ для упрощения записи опускаются.) Действительно, из этого факта будет вытекать существование предела (1) для монотонных последовательностей разбиений ($\Delta_n\subset\Delta_{n+k}$). Далее, если $\{\Delta_n^{(1)}\}$ и $\{\Delta_n^{(2)}\}$ — две разные монотонные последовательности разбиений, то пределы последовательностей $\sum_{k=1}^{m_{n_1}}y_{t_{k-1}}^{t_k}v_{t_{k-1}}^{t_k}$ и $\sum_{k=1}^{m_{n_2}}y_{t_{k-1}}^{t_k}v_{t_{k-1}}^{t_k}$ будут совпадать с пределом последовательности $\sum_{k=1}^{m_{n_1}+m_{n_2}}y_{t_{k-1}}^{t_k}v_{t_{k-1}}^{t_k}$ для разбиения $\{\Delta_n\}=\{\Delta_n^{(1)}\cup\Delta_n^{(2)}\}$. Наконец, если $\{\Delta_n\}$—произвольная последовательность разбиений, то $\lim_{n\to\infty}\Sigma\{\Delta_n\}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{m_n}y_{t_{k-1}}^{t_k}v_{t_{k-1}}^{t_k}$ будет совпадать с $\lim_{n\to\infty}\Sigma(\hat\Delta_n)$, где $\hat\Delta_n=\bigcup_{k=1}^{n}\Delta_k$.

Итак, оценим левую часть выражения (3):

$$\Big|\sum_{k=1}^{m_n}y_{t_{k-1}}^{t_k}v_{t_{k-1}}^{t_k}-\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{M_k}y_{s_{i-1}}^{s_i}v_{s_{i-1}}^{s_i}\Big|=\Big|\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{M_n}y_{t_{k-1}}^{t_k}v_{s_{i-1}}^{s_i}-\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{M_k}y_{s_{i-1}}^{s_i}v_{s_{i-1}}^{s_i}\Big|=$$

$$=\Big|\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{M_k}(y_{t_{k-1}}^{t_k}-y_{s_{i-1}}^{s_i})v_{s_{i-1}}^{s_i}\Big|=\Big|\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{M_k}(y_0^{t_k}-y_0^{t_{k-1}}-(y_0^{s_i}-y_0^{s_i}))v_{s-1}^{s_i}\Big|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{M_k}|y_0^{t_k}-y_0^{s_i}||v_{s_{i-1}}^{s_i}|+\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{k=1}^{M_k}|y_0^{t_{k-1}}-y_0^{s_{i-1}}||v_{s_{i-1}}^{s_i}|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{M_k}(\varphi(t_k)-\varphi(s_i))(\psi(s_i)-\psi(s_{i-1}))+\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{M_k}(\varphi(s_{i-1})-\varphi(t_{k-1}))\times$$

$$\times((\psi(s_i)-\psi(s_{i-1}))=\Big[\sum_{k=1}^{m_n}\varphi(t_k)(\psi(t_k)-\psi(t_{k-1}))-\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{i=1}^{M_k}\varphi(s_i)(\psi(s_i)-$$

$$-\psi(s_{i-1}))\Big]+\Big[\sum_{k=1}^{m_n}\varphi(s_{i-1})(\psi(s_i)-\psi(s_{i-1}))-\sum_{k=1}^{m_n}\sum_{j=1}^{M_k}\varphi(t_{k-1})(\psi(t_k)-\psi(t_{k-1}))\Big].$$

Легко видеть, что в силу условий теоремы функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ одновременно непрерывны в каждой точке $\tau \in [0, T]$ либо справа, либо слева (в зависимости от точки $\tau \in [0, T]$) и поскольку разности, стоящие в квадратных скобках в правой части выражения (2), представляют собой соответственно разности интегральных сумм для левого и правого интегралов Стильтьеса [4], то каждую из них можно сделать меньше $\varepsilon/2$ с ростом n. Следовательно, левая часть выражения (3) с ростом n будет меньше ε.

Проверим теперь, что w_s^t удовлетворяет условиям (4), (5), (6) в определении a-полугруппы из [1]. Так, условие (4) вытекает из независимости предела (1) от последовательности разбиений $\Delta_n[s, t]$ в силу того, что точку τ всегда можно присоединить к этим разбиениям $\{\Delta_n\}$. Условие (5) вытекает из неравенства

$$\operatorname*{Var}_{[0,T]} w = \sup_{\Delta[0,T]} \sum_{k=1}^{m_n} | w_{t_{k-1}}^{t_k} | \leqslant \varphi(T)\,\psi(T), \tag{4}$$

а условие (6), очевидно, следует из свойств функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, указанных выше.

Прежде чем доказывать формулу (2) покажем, что

$$\gamma_n = \sum_{k=1}^{m_n} | w_{t_{k-1}}^{t_k} - y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} | \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{5}$$

Для этого, зафиксировав некоторое $\varepsilon > 0$, рассмотрим следующее выражение:

$$\sum_{k=1}^{m_n} \Big| \sum_{i=1}^{M_k} y_{s_{i-1}}^{s_i} v_{s_{i-1}}^{s_i} - y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} \Big| \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \Big| \sum_{i=1}^{M_k} y_{s_{i-1}}^{s_i} v_{s_{i-1}}^{s_i} - \sum_{i=1}^{M_k} y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{s_{i-1}}^{s_i} \Big| =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_n} \Big| \sum_{i=1}^{M_k} (y_0^{s_i} - y_0^{t_k})\, v_{s_{i-1}}^{s_i} - (y_0^{s_{i-1}} - y_0^{t_{k-1}})\, v_{s_{i-1}}^{s_i} \Big| \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{M_k} (\varphi(t_k) - \varphi(s_i)) \times$$

$$\times (\psi(s_i) - \psi(s_{i-1})) + \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{M_k} (\varphi(s_{i-1}) - \varphi(t_{k-1}))\,(\psi(s_i) - \psi(s_{i-1})).$$

Переходя в этом выражении к пределу при $\sup\limits_k \sup\limits_i | s_i^k - s_{i-1}^k | = \delta \to 0$, получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{m_n} | w_{t_{k-1}}^{t_k} - y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} | \leqslant \Big(\sum_{k=1}^{m_n} \varphi(t_k)\,(\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})) - (r) \int_s^t \varphi(\tau)\, d\varphi(\tau) \Big) +$$

$$+ (l) \int_s^t \varphi(\tau)\, d\psi(\tau) - \sum_{k=1}^{m_n} \varphi(t_{k-1})\,(\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})),$$

правая часть которого в силу определения интеграла Стильтьеса и результатов [4] стремится к нулю при $n \to \infty$.

Покажем теперь, что справедлива формула (2). Для доказательства первого из входящих в нее равенств оценим норму разности

$$\Big| \prod_{k=1}^{m_n} (w_{t_{k-1}}^{t_k} + E) - \prod_{k=1}^{m_n} (y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} + E) \Big| = \Big| \sum_{k=1}^{m_n} \prod_{i=1}^{k-1} (w_{t_{i-1}}^{t_i} - E) \times$$

$$\times (w_{t_{k-1}}^{t_k} - y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k}) \prod_{i=k+1}^{m_n} (y_{t_{i-1}}^{t_i} v_{t_{i-1}}^{t_i} + E) \Big| \leqslant \sup_k \Big| \prod_{i=1}^{k-1} (w_{t_{i-1}}^{t_i} + E) \Big| \times$$

$$\times \sup_k \Big| \prod_{i=k+1}^{m_n} (y_{t_{i-1}}^{t_i} v_{t_{i-1}}^{t_i} + E) \Big| \sum_{k=1}^{m_n} | w_{t_{k-1}}^{t_k} - y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} | \leqslant \exp \Big\{ \sum_{k=1}^{m_n} | w_{t_{i-1}}^{t_i} | \Big\} \times$$

$$\times \exp\left\{\sum_{i=1}^{m_n} |y_{t_{i-1}}^{t_i}||v_{t_{i-1}}^{t_i}|\right\} \sum_{k=1}^{m_n} |w_{t_{k-1}}^{t_k} - y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k}| \leqslant \gamma_n \exp\{2\varphi(T)\psi(T)\} \to 0$$

при $n \to \infty$ в силу оценок (4) и (5).

Докажем второе из равенств (2). Для этого оценим норму разности

$$\Big|\prod_{k=1}^{m_n}(y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} + E) - \prod_{k=1}^{m_n}(y_{t_{k-1}}^{t_k}(u_{t_{k-1}}^{t_k} - E) + E)\Big| = \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\prod_{i=1}^{k-1}(y_{t_{i-1}}^{t_i} v_{t_{i-1}}^{t_i} + E) \times$$

$$\times (y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} - y_{t_{k-1}}^{t^k}(u_{t_{k-1}}^{t_k} - E)) \prod_{i=k+1}^{m_n}(y_{t_{i-1}}^{t_i}(u_{t_{i-1}}^{t_i} - E) + E)\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_k \Big|\prod_{i=1}^{k-1}(y_{t_{i-1}}^{t_i} v_{t_{i-1}}^{t_i} + E)\Big| \sup_k \Big|\prod_{i=k+1}^{m_n}(y_{t_{i-1}}^{t_i}(u_{t_{i-1}}^{t_i} - E) + E)\Big| \Big|\sum_{k=1}^{m_n} |y_{t_{k-1}}^{t_k}||v_{t_{k-1}}^{t_k} -$$

$$- (u_{t_{k-1}}^{t_k} - E)| \leqslant \exp\left\{\sum_{k=1}^{m_n} |y_{t_{i-1}}^{t_i}||v_{t_{i-1}}^{t_i}|\right\} \exp\left\{\sum_{k=1}^{m_n} |y_{t_{i-1}}^{t_i}||u_{t_{i-1}}^{t_i} - E|\right\} \times$$

$$\times \sup_k |y_{t_{k-1}}^{t_k}| \sum_{k=1}^{m_n} |v_{t_{k-1}}^{t_k} - (u_{t_{k-1}}^{t_k} - E)| \leqslant \exp\{\varphi(T)\psi(T) + \varphi(T)G(T)\} \times$$

$$\times \varphi(T)\Sigma|v_{t_{k-1}}^{t_k} - (u_{t_{k-1}}^{t_k} + E)| \leqslant C_1 \Sigma |v_{t_{k-1}}^{t_k} - (u_{t_{k-1}}^{t_k} - E)|.$$

Здесь C_1 — некоторая константа, а $G(T) = \sup\limits_{\Delta[0,T]} \Sigma|u_{t_{k-1}}^{t_k} - E|$. Последнее выражение стремится к нулю при $n \to \infty$ аналогично доказательству леммы 3 в [1].

Третье равенство в (2), аналогично предыдущему, вытекает из соотношения

$$\Big|\prod_{k=1}^{m_n}(y_{t_{k-1}}^{t_k}(u_{t_{k-1}}^{t_k} - E) + E) - \prod_{k=1}^{m_n}(x_{t_{k-1}}^{t_k} - E)(u_{t_{k-1}}^{t_k} - E) + E\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{m_n}\Big|\prod_{i=1}^{k-1} y_{t_{i-1}}^{t_i}(u_{t_{i-1}}^{t_i} - E) + E\,||\,y_{t_{k-1}}^{t_k}(u_{t_{k-1}}^{t_k} - E) - (x_{t_{k-1}}^{t_k} - E)(u_{t_{k-1}}^{t_k} - E)| \times$$

$$\times \Big|\prod_{i=k+1}^{m_n}((x_{t_{i-1}}^{t_i} - E)(u_{t_{i-1}}^{t_i} - E) + E)\Big| \leqslant \sup_k \Big|\prod_{i=1}^{k-1}(y_{t_{i-1}}^{t_i}(u_{t_{i-1}}^{t_i} - E) + E)\Big| \times$$

$$\times \sup_k \Big|\prod_{i=k+1}^{m_n}((x_{t_{i-1}}^{t_i} - E)(u_{t_{i-1}}^{t_i} - E) + E)\Big| \sum_{k=1}^{m_n} |y_{t_{k-1}}^{t_k} - (x_{t_{k-1}}^{t_k} - E)||u_{t_{k-1}}^{t_k} -$$

$$- E| \leqslant \exp\left\{\sum_{i=1}^{m_n} |y_{t_{i-1}}^{t_i}||u_{t_{i-1}}^{t_i} - E|\right\} \exp\left\{\sum_{i=1}^{m_n} |x_{t_{i-1}}^{t_i} - E||u_{t_{i-1}}^{t_i} - E|\right\} \times$$

$$\times \sup_k |u_{t_{k-1}}^{t_k} - E|\Sigma|y_{t_{k-1}}^{t_k} - (x_{t_{k-1}}^{t_k} - E)| \leqslant \exp\{\varphi(T)G(T) + F(T)G(T)\} \times$$

$$\times G(T)\sum_{k=1}^{m_n} |y_{t_{k-1}}^{t_k} - (x_{t_{k-1}}^{t_k} - E)| \leqslant C_2 \sum_{k=1}^{m_n} |y_{t_{k-1}}^{t_k} - (x_{t_{k-1}}^{t_k} - E)|,$$

где C_2 — некоторая константа.

Четвертое равенство в (2) выполняется из соображений симметрии.

Следствие 1. *а-Полугруппы y_s^t, v_s^t и w_s^t в каждой точке $\tau \in [0, T]$ одновременно непрерывны либо слева, либо справа (в зависимости от точки τ).*

Замечание 1. В условиях теоремы 1 справедливы следующие равенства:

$$w_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} y_{t_{k-1}}^{t_k} (u_{t_{k-1}}^{t_k} - E) = \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} (x_{t_{k-1}}^{t_k} - E)(u_{t_{k-1}}^{t_k} - E) =$$

$$= \lim_{\delta_n \to 0} \sum_{k=1}^{m_n} (x_{t_{k-1}}^{t_k} - E) v_{t_{k-1}}^{t_k}. \quad (6)$$

Определение 1. *Обозначим a-полугруппу* $w_s^t = (y \boxplus v)_s^t$ *и будем ее называть взаимной характеристикой a-полугрупп* y_s^t *и* v_s^t *в указанном порядке.*

Определение 2. *Если для двух m-полугрупп предел* $z_s^t = \lim_{\delta_n \to 0} \prod_{k=1}^{m_n} x_{t_{k-1}}^{t_k} u_{t_{k-1}}^{t_k}$ *определен и не зависит от последовательности разбиений* $\{\Delta_n [s, t]\}$, *то он обозначается* $z_s^t = (x \boxtimes u)_s^t$ *и называется смешанным произведением m-полугрупп* x_s^t *и* u_s^t *в указанном порядке.*

Здесь для определенности произведение Π берется в порядке возрастания индекса k слева направо.

Замечание 2. В работе [5] доказано, что для непрерывных мультипликативных полугрупп x_s^t и u_s^t существует смешанное произведение $(x \boxtimes u)_s^t$ и справедлива формула

$$D (x \boxtimes u)_s^t = D (x)_s^t + D (u)_s^t. \quad (7)$$

Как показывает следующий пример, в разрывном случае эта формула неверна.

Пример. Зафиксируем точку $\tau \in [0, T]$ и пусть a-полугруппы y_s^t и v_s^t задаются равенствами

$$y_s^t = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant s \leqslant t < \tau < T < \infty, \\ y, & 0 \leqslant s < \tau \leqslant t < T < \infty, \\ 0, & 0 < \tau \leqslant s \leqslant t < T < \infty, \end{cases} \qquad v_s^t = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant s \leqslant t < \tau < T < \infty, \\ v, & 0 \leqslant s < \tau \leqslant t < T < \infty, \\ 0, & 0 < \tau \leqslant s \leqslant t < T < \infty, \end{cases}$$

причем $y_{\tau-0}^{\tau} = y \neq v = v_{\tau-0}^{\tau}$. Тогда

$$x_s^t = D^{-1} (y)_s^t = \begin{cases} E, & 0 \leqslant s \leqslant t < \tau < T < \infty, \\ y + E, & 0 \leqslant s < \tau \leqslant t < T < \infty, \\ E, & 0 < \tau \leqslant s \leqslant t < T < \infty, \end{cases}$$

$$u_s^t = D^{-1} (v)_s^t = \begin{cases} E, & 0 \leqslant s \leqslant t < \tau < T < \infty, \\ v + E, & 0 \leqslant s < \tau \leqslant t < T < \infty, \\ E, & 0 < \tau \leqslant s \leqslant t < T < \infty, \end{cases}$$

$$(x \boxtimes u)_s^t = \begin{cases} E, & 0 \leqslant s \leqslant t < \tau < T < \infty, \\ (y + E)(v + E), & 0 \leqslant s < \tau \leqslant t < T < \infty \\ E, & 0 < \tau \leqslant s \leqslant t < T < \infty, \end{cases}$$

$$D (x \boxtimes u)_s^t = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant s \leqslant t < \tau < \infty, \\ yv + y + v, & 0 \leqslant s < \tau \leqslant t < T < \infty, \\ 0, & 0 < \tau \leqslant s \leqslant t < T < \infty. \end{cases}$$

Из последнего равенства следует $D (x \boxtimes u)_s^t \neq D (x)_s^t + D (u)_s^t$.

Следующая теорема позволяет обобщить указанный пример и формулу (7) на разрывный случай.

Теорема 2. *Пусть заданы* x_s^t *и* u_s^t *m-полугруппы без общих точек разрыва, в которых одна из них разрывна слева, а другая — справа:*

Тогда существует смешанное произведение, которое является т-полугруппой, и справедлива формула

$$D(x \boxtimes u)_s^t = D(x)_s^t + D(u)_s^t + D(x)_s^t \boxplus D(u)_s^t. \tag{8}$$

Доказательство. Из следствия 1 и работы [1] вытекает, что существует и не зависит от последовательности разбиений предел $\lim\limits_{\delta_n\to 0}\prod\limits_{k=1}^{m_n}(y_{t_{k-1}}^{t_k} + v_{t_{k-1}}^{t_k} + w_{t_{k-1}}^{t_k} + E) = D^{-1}(y+v+w)_s^t$, где $w_s^t = (y \boxplus v)_s^t$, $y_s^t = D(x)_s^t$, $v_s^t = D(u)_s^t$. Поэтому для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что справедливо равенство

$$(x \boxtimes u)_s^t = \lim_{\delta_n\to 0}\prod_{k=1}^{m_n} x_{t_{k-1}}^{t_k} u_{t_{k-1}}^{t_k} = \lim_{\delta_n\to 0}\prod_{k=1}^{m_n}(y_{t_{k-1}}^{t_k} + v_{t_{k-1}}^{t_k} + w_{t_{k-1}}^{t_k} + E) =$$
$$= D^{-1}(y+v+w)_s^t. \tag{9}$$

Легко видеть, что оно будет вытекать из равенств

$$\lim_{\delta_n\to 0}\prod_{k=1}^{m_n}(y_{t_{k-1}}^{t_k} + v_{t_{k-1}}^{t_k} + w_{t_{k-1}}^{t_k} + E) = \lim_{\delta_n\to 0}\prod_{k=1}^{m_n}(y_{t_{k-1}}^{t_k} + E)(v_{t_{k-1}}^{t_k} + E) =$$
$$= \lim_{\delta_n\to 0}\prod_{k=1}^{m_n} x_{t_{k-1}}^{t_k}(v_{t_{k-1}}^{t_k} + E) = \lim_{\delta_n\to 0}\prod_{k=1}^{m_n} x_{t_{k-1}}^{t_k} u_{t_{k-1}}^{t_k} = \lim_{\delta_n\to 0}\prod_{k=1}^{m_n}(y_{t_{k-1}}^{t_k} + E)\, u_{t_{k-1}}^{t_k}, \tag{10}$$

которые мы и докажем. Для первого из них, воспользовавшись (4) и (5), оценим разность

$$\Big|\prod_{k=1}^{m_n}(y_{t_{k-1}}^{t_k} + E)(v_{t_{k-1}}^{t_k} + E) - \prod_{k=1}^{m_n}(y_{t_{k-1}}^{t_k} + v_{t_{k-1}}^{t_k} + w_{t_{k-1}}^{t_k} + E)\Big| \leqslant$$
$$\leqslant \Big|\sum_{k=1}^{m_n}\Big(\prod_{i=1}^{k-1}(y_{t_{i-1}}^{t_i} + E)(v_{t_{i-1}}^{t_i} + E)(y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} - w_{t_{k-1}}^{t_k})\prod_{i=k+1}^{m_n}(y_{t_{i-1}}^{t_i} + v_{t_{i-1}}^{t_i} +$$
$$+ w_{t_{i-1}}^{t_i} + E)\Big| \leqslant \sup_k \prod_{i=1}^{k-1}|y_{t_{i-1}}^{t_i} + E||v_{t_{i-1}}^{t_i} + E| \sup_k \prod_{i=k+1}^{m_n}|y_{t_{i-1}}^{t_i} + v_{t_{i-1}}^{t_i} + w_{t_{i-1}}^{t_i} +$$
$$+ E| \sum_{k=1}^{m_n}|y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} - w_{t_{k-1}}^{t_k}| \leqslant \exp\{2\varphi(T) + 2\psi(T) + \varphi(T)\psi(T)\} \times$$
$$\times \sum_{k=1}^{m_n}|y_{t_{k-1}}^{t_k} v_{t_{k-1}}^{t_k} - w_{t_{k-1}}^{t_k}| \to 0$$

при $n\to\infty$.

Доказательство второго из равенств (10) с использованием (4) и (5) вытекает из соотношения

$$\Big|\prod_{k=1}^{m_n}(y_{t_{k-1}}^{t_k} + E)(v_{t_{k-1}}^{t_k} + E) - \prod_{k=1}^{m_n} x_{t_{k-1}}^{t_k}(v_{t_{k-1}}^{t_k} + E)\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{m_n}\prod_{i=1}^{k-1}|y_{t_{i-1}}^{t_i} + E| \times$$
$$\times |v_{t_{i-1}}^{t_i} + E||y_{t_{k-1}}^{t_k} + E - x_{t_{k-1}}^{t_k}||v_{t_k}^{t_k} + E|\prod_{i=k+1}^{m_n}|(x_{t_{k-1}}^{t_k} - E) +$$
$$+ E||v_{t_{k-1}}^{t_k} + E| \leqslant \exp\{\varphi(T) + \psi(T)\}\exp\{F(T) + \psi(T)\}\sup_k |v_{t_{k=1}}^{t_k} +$$
$$+ E|\sum_{k=1}^{m_n}|y_{t_{k=1}}^{t_k} + E - x_{t_{k=1}}^{t_k}|.$$

Третье равенство в (10) справедливо в силу оценки

$$\left| \prod_{k=1}^{m_n} x_{t_{k-1}}^{t_k} (v_{t_{k-1}}^{t_k} + E) - \prod_{k=1}^{m_n} x_{t_{k-1}}^{t_k} u_{t_{k-1}}^{t_k} \right| \leqslant \exp \{F(T) + \psi(T)\} \exp \{F(T) + G(T)\} \sup_k | x_{t_{k-1}}^{t_k} | \sum_{k=1}^{m_n} | v_{t_{k-1}}^{t_k} + E - u_{t_{k-1}}^{t_k} |,$$

а четвертое выполняется из соображений симметрии.

Следствие 2. Из замечания 2 вытекает, что операция смешанного произведения $\boxtimes$ даже в условиях теоремы 2 не является, вообще говоря, коммутативной, как это имело место в [5] для непрерывных полугрупп, в силу некоммутативности умножения в X.

Следствие 3. Аналогично (8) справедлива формула

$$D(u \boxtimes x)_s^t = D(u)_s^t + D(v)_s^t + D(u \boxplus v)_s^t. \tag{11}$$

1. *Каратаева Т. В., Буцан Г. П.* Об изоморфизме мультипликативных и аддитивных полугрупп без условий непрерывности // Укр. мат. журн.— 1985.— 37, № 2.— С. 168—175.
2. *Каратаева Т. В.* Соотношения между правыми и левыми мультипликативными полугруппами без условий непрерывности // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 2.— С. 8—11.
3. *Каратаева Т. В.* Гомеоморфизм мультипликативных и аддитивных полугрупп без условий непрерывности // Укр. мат. журн.— 1987.— 39, № 3.— С. 309—315.
4. *Буцан Г. П.* Необходимое и достаточное условие существования интеграла Стильтьеса для функций ограниченной вариации // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 12.— С. 3—6.
5. *Буцан Г. П.* Мультипликативные параметрические полугруппы // Кибернетика.— 1978.— № 3.— С. 38—43.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 20.06.85