УДК 517.946

И. М. Колодий

Теоремы вложения пространств $\overset{0}{W}{}^1_\beta(\bar\lambda(x), K_r)$ и $W^1_\beta(\bar\lambda(x), K_r)$

Пусть $K_r = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in E^n : |x_i| < r, \quad i = 1, \dots, n\}$, $\bar p = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i \geqslant 1$, $i = 1, \dots, n$; $\bar\lambda(x) = (\lambda_1(x), \dots, \lambda_n(x))$, где $\lambda_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, — неотрицательные измеримые функции в K_r. Введем пространства $\overset{0}{W}{}^1_{\bar p}(K_r)$, $W^1_{\bar p}(K_r)$ как замыкание пространств $\overset{0}{C}{}^\infty(K_r)$, $C^\infty(K_r)$ соответственно по норме

$$\sum_{i=1}^n (r^{-n+p_i} \int_{K_r} |u_{x_i}|^{p_i} dx)^{1/p_i} + r^{-n} \int_{K_r} |u|\, dx.$$

Обозначим через $\overset{0}{W}{}^1_\beta(\bar\lambda(x), K_r)$, $W^1_\beta(\bar\lambda(x), K_r)$ замыкание пространств $\overset{0}{C}{}^\infty(K_r)$, $C^\infty(K_r)$ соответственно по норме

$$\sum_{i=1}^n \left(r^{-n+\beta} \int_{K_r} \lambda_i(x) |u_{x_i}|^\beta dx\right)^{1/\beta} + r^{-n} \int_{K_r} |u|\, dx.$$

В настоящей работе сформулированы и доказаны теоремы вложения пространств $\overset{0}{W}{}^1_\beta(\bar\lambda(x), K_r)$, $W^1_\beta(\bar\lambda(x), K_r)$, являющиеся следствиями теорем вложения анизотропных пространств С. Л. Соболева $\overset{0}{W}{}^1_{\bar p}(K_r)$, $W^1_{\bar p}(K_r)$ (см. [1, 2]). Следует отметить, что в работе [2] построен контрпример, показывающий, что теорема вложения для пространства $W^1_{\bar p}(K_r)$ в [1] сформулирована неверно.

1. Теоремы вложения для пространств $\overset{0}{W}{}^1_{\bar p}(K_r)$, $\overset{0}{W}{}^1_{\bar\beta}(\bar\lambda(x), K_r)$. Сформулируем известный результат о вложении пространства $\overset{0}{W}{}^1_{\bar p}(K_r)$ (см. [1]):

Теорема 1.1 *Пусть функция* $u(x)\in\overset{0}{W}{}^1_{\bar p}(K_r)$. *Тогда:*

1) *если* $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}>1$, *то* $u(x)\in L_p(K_r)$, *где* $p=n\Big/\Big(-1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}\Big)$ и *справедлива оценка*

$$\Big(r^{-n}\int\limits_{K_r}|u|^p dx\Big)^{1/p}\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\Big(r^{-n+p_i}\int\limits_{K_r}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{1/p_i},$$

где константа C *зависит от* n, p_i, p;

2) *если* $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}=1$, *то* $u(x)\in L_q(K_r)$, *где* q — *любое число* $\geqslant 1$, *и справедлива оценка*

$$\Big(r^{-n}\int\limits_{K_r}|u|^q dx\Big)^{\frac{1}{q}}\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\Big(r^{-n+p_i}\int\limits_{K_r}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{1/p_i},$$

где константа C *зависит от* n, p_i, q;

3) *если* $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}<1$, *то* $u(x)\in C_\alpha(K_r)$, *где* $\alpha=\frac{sp_{\min}}{n+sp_{\min}}$, $p_{\min}=\min\limits_i p_i$, $s=1-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$, *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{C_\alpha(K_r)}\leqslant C\Big(1+\frac{nb}{s}\Big)(1+r^{-\alpha})\sum_{i=1}^{n}\Big(r^{-n+p_i}\int\limits_{K_r}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{1/p_i},$$

где $b=\max\Big(1, r^{\frac{ns(p_{\max}-p_{\min})}{(n+sp_{\max})(n+sp_{\min})}}\Big)$, $p_{\max}=\max\limits_i p_i$, $C=\mathrm{const}$.

Замечание 1.1. $C_\alpha(K_r)$ — это совокупность непрерывных по Гельдеру с показателем $\alpha>0$ функций в K_r. Если ввести норму $\|u\|_{C_\alpha(K_r)}=\sup\limits_{x\in K_r}|u(x)|+\sup\limits_{\substack{x,y\in K_r\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$, то $C_\alpha(K_r)$ становится банаховым пространством.

Замечание 1.2. Из теоремы 1.1 вытекает, что в пространстве $\overset{0}{W}{}^1_{\bar p}(K_r)$ можно ввести эквивалентную норму, равную

$$\sum_{i=1}^{n}\Big(r^{-n+p_i}\int\limits_{K_r}|u_{x_i}|^{p_i}dx\Big)^{1/p_i}.$$

Из теоремы 1.1 вытекает следующая теорема.

Т е о р е м а 1.2. *Пусть функция* $u(x) \in \overset{0}{W}{}^1_\beta(\overline{\lambda}(x), K_r)$, *где неотрицательные функции* $\lambda_i^{-1}(x) \in L_{t_i}(K_r)$. *Тогда:*

1) *если* $n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} > \beta$, $t_i(\beta-1) \geqslant 1$, *то* $u(x) \in L_p(K_r)$, *где* $p = \dfrac{n\beta}{n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} - \beta}$, *и справедлива оценка*

$$\left(r^{-n} \int_{K_r} |u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \left(r^{-n} \int_{K_r} \lambda_i^{-t_i}(x)\, dx\right)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{\beta}} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{n} \left(r^{-n+\beta} \int_{K_r} \lambda_i(x) |u_{x_i}|^\beta dx\right)^{\frac{1}{\beta}},$$

где константа C *зависит от* n, t_i, β;

2) *если* $n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} = \beta$, $t_i(\beta-1) \geqslant 1$, *то* $u(x) \in L_q(K_r)$, *где* q — *любое число* $\geqslant 1$, *и справедлива оценка*

$$\left(r^{-n} \int_{K_r} |u|^q dx\right)^{1/q} \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \left(r^{-n} \int_{K_r} \lambda_i^{-t_i}(x)\, dx\right)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{\beta}} \sum_{i=1}^{n} \left(r^{-n+\beta} \int_{K_r} \lambda_i(x) |u_{x_i}|^\beta dx\right)^{1/\beta},$$

где константа C *зависит от* n, t_i, β, q;

3) *если* $n + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_i} < \beta$, $t_i(\beta-1) \geqslant 1$, *то* $u(x) \in C_\alpha(K_r)$, *где* $\alpha = \dfrac{\gamma_{\min} s_t}{n + \gamma_{\min} s_t}$, $\gamma_{\min} = \beta \min_i \dfrac{t_i}{t_i+1}$, $s_t = 1 - \dfrac{1}{\beta}\left(n + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{t_i}\right)$, *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{C_\alpha(K_r)} \leqslant C\left(1 + \frac{nb}{s_t}\right)(1 + r^{-\alpha}) \sum_{i=1}^{n} \left(r^{-n} \int_{K_r} \lambda_i^{-t_i}(x)\, dx\right)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{\beta}} \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{n} \left(r^{-n+\beta} \int_{K_r} \lambda_i(x) |u_{x_i}|^\beta dx\right)^{1/\beta},$$

где $b = \max\left(1, r^{\frac{ns_t(\gamma_{\max} - \gamma_{\min})}{(n+s_t\gamma_{\max})(n+s_t\gamma_{\min})}}\right)$, $\gamma_{\min} = \beta \min_i \dfrac{t_i}{t_i+1}$, $C = \mathrm{const}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Положим в теореме 1.1 $p_i = \beta \dfrac{t_i}{t_i+1}$. В силу сформулированных предположений $p_i \geqslant 1$, а $\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{p_i}$ либо >1, либо $=1$, либо <1. Тогда справедливы оценки теоремы 1.1. Оценим правые части этих оценок по неравенству Гельдера

$$\left(r^{-n} \int_{K_r} |u_{x_i}|^{p_i} dx\right)^{\frac{1}{p_i}} = \left(r^{-n} \int_{K_r} \lambda_i^{\frac{t_i}{t_i+1}}(x) |u_{x_i}|^{\beta\frac{t_i}{t_i+1}} \lambda_i(x)^{-\frac{t_i}{t_i+1}} dx\right)^{\frac{1}{\beta}\frac{t_i+1}{t_i}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(r^{-n}\int\limits_{K_r}\lambda_i^{-t_i}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{\beta}}\left(r^{-n}\int\limits_{K_r}\lambda_\cdot(x)\,|u_{x_i}|^\beta dx\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

и получим оценки теоремы 1.2.

2. Теоремы вложения для пространств $W_p^1(K_r)$, $W_\beta^1(\bar\lambda(x), K_r)$. Перейдем к доказательству теорем вложения для пространств $W_\beta^1(\bar\lambda(x), K_r)$. Вначале сформулируем две вспомогательные леммы. Пусть $K_r^+ = \{x\in E^n : x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}),\ |x'| < r,\ x_n\in(0, r)\}$ — цилиндрическая область в E^n. Обозначим через K_r^- область в E^n, симметричную области K_r^+ относительно гиперплоскости $x_n = 0$. Положим в K_r^- $\tilde u(x) = u(x', -x_n)$. Тогда функция $u^*(x) = \begin{cases} u(x), & x\in K_r^+\\ \tilde u(x), & x\in K_r^-\end{cases}$ является четным продолжением функции $u(x)$ из K_r^+ в $K_r = K_r^+\cup K_r^-$.

Лемма 2.1. *Если $u(x)\in W_p^1(K_r^+)$, то $u^*(x)\in W_p^1(K_r)$ и справедлива оценка*

$$\sum_{i=1}^n\left(r^{-n+p_i}\int\limits_{K_r}|u^*_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{1/p_i} + r^{-n}\int\limits_{K_r}|u^*|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{i=1}^n\left(r^{-n+p_i}\int\limits_{K_r^+}|u_{x_i}|^{p_i}dx + r^{-n}\int\limits_{K_r^+}|u|\,dx\right),\right. \tag{1}$$

где константа C не зависит от $u(x)$.

Доказательство леммы очевидно (см. [3]).

Лемма 2.2. *Для любой функции $u(x)\in W_p^1(K_r)$, где $\max\limits_i p_i \leqslant n/\left(-1+\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{p_i}\right)$, если $\sum\limits_{i=1}^n\frac{1}{p_i} > 1$, существует продолжение $\hat u(x)$ функции $u(x)$ из K_r в K_{2r}, которое равно нулю в пограничной полоске K_{2r}, и справедлива оценка*

$$\sum_{i=1}^n\left(r^{-n+p_i}\int\limits_{K_{2r}}|\hat u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{1/p_i} \leqslant C\left(\sum_{i=1}^n\left(r^{-n+p_i}\int\limits_{K_r}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{1/p_i} + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^n\left(r^{-n}\int\limits_{K_r}|u|^{p_i}dx\right)^{1/p_i}\right).$$

Доказательство. По лемме 2.1 функцию $u(x)\in W_p^1(K_r)$ можно продолжить четным образом через плоскости $x_1 = \pm r$ на симметричные множества точек, отстоящие от этих плоскостей на расстоянии r, с сохранением оценки (1). Полученную функцию продолжим через плоскости $x_2 = \pm r$ таким же образом и т. д. В результате получим функцию $u^*(x)$, определенную в кубе K_{2r}, для которой справедливо неравенство (1), т. е.

$$\sum_{i=1}^n\left(r^{-n+p_i}\int\limits_{K_{2r}}|u^*_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{1/p_i} + r^{-n}\int\limits_{K_{2r}}|u^*|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant C\left(\sum_{i=1}^n\left(r^{-n+p_i}\int\limits_{K_{2r}}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{1/p_i} + r^{-n}\int\limits_{K_{2r}}|u|\,dx\right).$$

Следовательно, для функции $\hat{u}(x) = \eta(x) u^*(x)$, где $\eta(x) \in \overset{0}{C}{}^{\infty}(K_{2r})$, $|\eta| \leqslant 1$, $|\eta_x| \leqslant C/r$, $\eta = 1$ в K_r, справедлива оценка

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(r^{-n+p_i} \int_{K_{2r}} |\hat{u}_{x_i}|^{p_i} dx\Big)^{1/p_i} = \sum_{i=1}^{n} \Big(r^{-n+p_i} \int_{K_{2r}} |(\eta u^*)_{x_i}|^{p_i} dx\Big)^{1/p_i} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \Big(r^{-n+p_i} \int_{K_{2r}} |\eta u^*_{x_i}|^{p_i} dx\Big)^{1/p_i} + \sum_{i=1}^{n} \Big(r^{-n+p_i} \int_{K_{2r}} |\eta_{x_i} u^*|^{p_i} dx\Big)^{1/p_i} \leqslant$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{n} \Big(r^{-n+p_i} \int_{K_{2r}} |u^*_{x_i}|^{p_i} dx\Big)^{1/p_i} + \sum_{i=1}^{n} \Big(r^{-n} \int_{K_{2r}} |u^*|^{p_i} dx\Big)^{1/p_i}\Big) \leqslant$$

$$\leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{n} \Big(r^{-n+p_i} \int_{K_r} |u_{x_i}|^{p_i} dx\Big)^{1/p_i} + \sum_{i=1}^{n} \Big(r^{-n} \int_{K_r} |u|^{p_i} dx\Big)^{1/p_i}\Big).$$

Заметим, что функция $\hat{u}$ $(x \in \overset{0}{W}{}^{1}_{\bar{p}}(K_{2r})$ и, следовательно, по теореме вложения для пространств $\overset{0}{W}{}^{1}_{\bar{p}}(K_{2r})$ она суммируема со степенью $p = n\Big/\Big(-1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}\Big)$, если $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} > 1$, с любой степенью большей единицы, если $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$, и принадлежит классу $C_\alpha(K_{2r})$ (т. е. ограничена), если $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} < 1$. Но $\hat{u}(x) = u(x)$ в K_r и, следовательно, интеграл $\Big(r^{-n} \int_{K_r} |u|^{p_i} dx\Big)^{1/p_i}$ будет существовать всегда, если $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} \leqslant 1$, и при дополнительном условии $\max_i p_i \leqslant p = n\Big/\Big(-1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}\Big)$, если $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} > 1$.

Теорема 2.1. *Пусть* $u(x) \in W^1_{\bar{p}}(K_r)$. *Тогда*:

1) *если* $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} > 1$, $\max_i p_i < p = n\Big/\Big(-1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i}\Big)$, *то* $u(x) \in L_p(K_r)$ *и справедлива оценка*

$$\Big(r^{-n} \int_{K_r} |u|^p dx\Big)^{1/p} \leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{n} \Big(r^{-n+p_i} \int_{K_r} |u_{x_i}|^{p_i} dx\Big)^{1/p_i} + r^{-n} \int_{K_r} |u|\, dx\Big);$$

2) *если* $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{p_i} = 1$, *то* $u(x) \in L_q(K_r)$ *при любом* $q \geqslant 1$ *и спроведлива оценка*

$$\Big(r^{-n} \int_{K_r} |u|^q dx\Big)^{1/q} \leqslant C\Big(\sum_{i=1}^{n} \Big(r^{-n+p_i} \int_{K_r} |u_{x_i}|^{p_i} dx\Big)^{1/p_i} + r^{-n} \int_{K_r} |u|\, dx\Big);$$

3) *если* $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}<1$, *то* $u(x)\in C_\alpha(K_r)$, *где* $\alpha=\frac{sp_{\min}}{n+sp_{\min}}$, $p_{\min}=\min_i p_i$, $s=1-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}$, *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{C_\alpha(K_r)}\leqslant C\left(\left(1+\frac{nb}{s}\right)(1+r^{-\alpha})\right)^{\varkappa}\times$$
$$\times\left(\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n+p_i}\int_{K_r}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{1/p_i}+r^{-n}\int_{K_r}|u|\,dx\right),$$

где $b=\max\left(1, r^{\frac{ns(p_{\max}-p_{\min})}{(n+sp_{\max})(n+sp_{\min})}}\right)$, $p_{\max}=\max_i p_i$, $p_{\min}=\min_i p_i$, $\varkappa=\max_{p_i\neq 1}\frac{p_i}{p_i-1}$, $C=C(n,p_1,\ldots,p_n)$.

Доказательство первых двух пунктов теоремы 2.1 вытекает из леммы 2.2, теоремы вложения 1.1 для пространств $\overset{0}{W}{}^1_{\bar p}(K_{2r})$ и интерполяционного неравенства $\|u\|_{L_{p_2}}\leqslant\|u\|_{L_{p_1}}^{\nu}\|u\|_{L_{p_3}}^{1-\nu}\leqslant\varepsilon\|u\|_{L_{p_1}}+\varepsilon^{-\nu(1-\nu)}\|u\|_{L_{p_3}}$, $\varepsilon>0$, $1\leqslant p_1<p_2<p_3\leqslant\infty$, $\nu=\frac{1/p_2-1/p_3}{1/p_1-1/p_3}$.

Действительно, при условиях на показатели p_i в п. 1 имеем

$$\left(r^{-n}\int_{K_r}|u|^p dx\right)^{1/p}\leqslant C\left(r^{-n}\int_{K_{2r}}|\hat u|^p dx\right)^{1/p}\leqslant C\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n+p_i}\int_{K_{2r}}|\hat u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{1/p_i}\leqslant$$
$$\leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n+p_i}\int_{K_r}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{1/p_i}+\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n}\int_{K_r}|u|^{p_i}dx\right)^{1/p_i}\right)\leqslant$$
$$\leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n+p_i}\int_{K_r}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{1/p_i}+\varepsilon\left(r^{-n}\int_{K_r}|u|^p dx\right)^{1/p}+C(\varepsilon)\,r^{-n}\int_{K_r}|u|\,dx\right).$$

Перенося член $\varepsilon\left(r^{-n}\int_{K_r}|u|^p dx\right)^{1/p}$ налево, при достаточно малом $\varepsilon>0$ получаем нужную оценку. П. 2 доказывается аналогично, так как показатель q можно выбрать настолько большим, чтобы выполнялось условие $1\leqslant p_i<q$ при любом $i=1,\ldots,n$. Оценка п. 3 вытекает из цепочки неравенств

$$\sup_{x\in K_r}|u(x)|+\sup_{\substack{x,y\in K_r\\ x\neq y}}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}}=\|u\|_{C_\alpha(K_r)}\leqslant\|\hat u\|_{C_\alpha(K_{2r})}\leqslant$$
$$\leqslant C\left(1+\frac{nb}{s}\right)(1+r^{-\alpha})\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n+p_i}\int_{K_{2r}}|\hat u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{1/p_i}\leqslant C\left(1+\frac{nb}{s}\right)\times$$
$$\times(1+r^{-\alpha})\left(\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n+p_i}\int_{K_r}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{1/p_i}+\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n}\int_{K_r}|u|^{p_i}dx\right)^{1/p_i}\right)\leqslant$$
$$\leqslant C\left(1+\frac{nb}{s}\right)(1+r^{-\alpha})\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n+p_i}\int_{K_r}|u_{x_i}|^{p_i}dx\right)^{1/p_i}+n\varepsilon\sup_{x\in K_r}|u(x)|+$$

$$+\sum_{\substack{i=1\\ p_i\neq 1}}^{n}\frac{\left(C\left(1+\frac{nb}{s}\right)(1+r^{-\alpha})\right)^{p_i/(p_i-1)}}{\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}}\, r^{-n}\int_{K_r}|u|\,dx+$$

$$+C\left(1+\frac{nb}{s}\right)(1+r^{-\alpha})\sum_{\substack{i=1\\ p_i=1}}^{n}\left(r^{-n}\int_{K_r}|u|^{p_i}dx\right)^{1/p_i}$$

при достаточно малом $\varepsilon>0$ (определение чисел α, b, s см. в п. 3 теоремы 1.1).

Теорема 2.2. *Пусть функции* $\lambda_i(x)\geqslant 0$, $\lambda_i^{-1}(x)\in L_{t_i}(K_r)$, $u(x)\in W_\beta^1(\bar\lambda(x), K_r)$. *Тогда:*

1) *если* $n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}>\beta$, $(\beta-1)\,t_i\geqslant 1$, $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}<\beta+\frac{n}{t_j}$, $\forall j=1,\ldots,n$, *то* $u(x)\in L_p(K_r)$, *где* $p=\dfrac{n\beta}{n-\beta+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}}$, *и справедлива оценка*

$$\left(r^{-n}\int_{K_r}|u|^p dx\right)^{1/p}\leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n}\int_{K_r}\lambda_i^{-t_i}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{\beta}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n+\beta}\int_{K_r}\lambda_i(x)\,|u_{x_i}|^\beta dx\right)^{1/\beta}+r^{-n}\int_{K_r}|u|\,dx\right);$$

2) *если* $n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}=\beta$, $(\beta-1)\,t_i\geqslant 1$, *то* $u(x)\in L_q(K_r)$ *при любом* $q\geqslant 1$ *и справедлива оценка*

$$\left(r^{-n}\int_{K_r}|u|^q dx\right)^{1/q}\leqslant C\left(\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n}\int_{K_r}\lambda_i^{-t_i}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{\beta}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n+\beta}\int_{K_r}\lambda_i(x)\,|u_{x_i}|^\beta dx\right)^{1/\beta}+r^{-n}\int_{K_r}|u|\,dx\right);$$

3) *если* $n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}<\beta$, $(\beta-1)\,t_i\geqslant 1$, *то* $u(x)\in C_\alpha(K_r)$, $\alpha=\dfrac{\gamma_{\min}s_t}{n+\gamma_{\min}s_t}$, $\gamma_{\min}=\beta\min\limits_i\dfrac{t_i}{t_i+1}$, $s_t=1-\dfrac{1}{\beta}\left(n+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i}\right)$, *и справедлива оценка*

$$\|u\|_{C_\alpha(K_r)}\leqslant C\left(\left(1+\frac{nb}{s_t}\right)(1+r^{-\alpha})\right)^{\varkappa}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n}\int_{K_r}\lambda_i^{-t_i}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{t_i}\frac{1}{\beta}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{i=1}^{n}\left(r^{-n+\beta}\int_{K_r}\lambda_i(x)\,|u_{x_i}|^\beta dx\right)^{1/\beta}+r^{-n}\int_{K_r}|u|\,dx\right),$$

$$b = \max\left(1, r^{\frac{ns_t(\gamma_{\max}-\gamma_{\min})}{(n+s_t\gamma_{\max})(n+s_t\gamma_{\min})}}\right), \quad \gamma_{\max} = \beta \max_i \frac{t_i}{t_i+1},$$

$$\varkappa = \max_{p_i \neq 1} \frac{p_i}{p_i - 1}; \quad p_i = \beta \cdot \frac{t_i}{t_i+1}, \quad C = C(n, \beta, t_1, \ldots, t_n).$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2.1, положив $p_i = \beta \frac{t_i}{t_i+1}$. Тогда

$$\left(r^{-n} \int_{K_r} |u_{x_i}|^{p_i} dx\right)^{1/p_i} = \left(r^{-n} \int_{K_r} \lambda_i(x)^{\frac{t_i}{t_i+1}} |u_{x_i}|^{\beta\frac{t_i}{t_i+1}} \lambda_i(x)^{-\frac{t_i}{t_i+1}} dx\right)^{\frac{1}{\beta}\frac{t_i+1}{t_i}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(r^{-n} \int_{K_r} \lambda_i^{-t_i}(x)\, dx\right)^{\frac{1}{t_i}\cdot\frac{1}{\beta}} \left(r^{-n} \int_{K_r} \lambda_i(x) |u_{x_i}|^{\beta} dx\right)^{1/\beta}.$$

Учитывая это, получаем оценки пп. 1 — 3 теоремы 2.2.

1. *Лу Вень-Туан.* К теоремам вложения для пространств функций с частными производными, суммируемыми с различными показателями // Вестн. Ленингр. ун-та.— 1961.— № 7.— С. 23—27.
2. *Кружков С. Н., Колодий И. М.* К теории вложения анизотропных пространств Соболева // Успехи мат. наук.— 1983.—38, вып. 2.— С. 207—208.
3. *Слободецкий Л. Н.* Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та.— 1958.—197.— S. 54—112.
4. *Nirenberg N.* On elliptic partial differential equations // Ann. Scuola norm. super. Pisa. Ser 3.— 1959.— **13**, N 2.— P. 457—468.
5. *Кружков С. Н.* Краевые задачи для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Мат. сб.— 1968.— 77, № 3.— С. 299—334.
6. *Дубинский Ю. А.* Некоторые интегральные неравенства и разрешимость вырождающихся квазилинейных элиптических систем дифференциальных уравнений // Там же.— 1964.— **64**, № 3.— С. 458—480.

Львов. ун-т

Получено 03.06.85,
после доработки — 10.11.85