УДК 517.9

В. П. Маслов, Г. А. Омельянов

Взаимодействие коротких волн малых амплитуд в слабо дисперсионной плазме. I

1. Волновые процессы в слабо нелинейных средах, описываемые дифференциальными уравнениями с малым параметром, привлекали внимание многих механиков, физиков и математиков. Изучение таких процессов в системах с конечным числом степеней свободы привело к созданию весьма общей и полной теории возмущений для систем обыкновенных уравнений — методу Крылова — Боголюбова — Митропольского [1]. Идеи этого метода легли также в основу последующих исследований быстрых колебаний в системах с бесконечным числом степеней свободы (см., например, [2 — 12]). При изучении быстрых осцилляций в слабо нелинейных средах наибольший интерес представляют так называемые резонансные процессы. Суть этого явления состоит в следующем. Если волны в начальный момент времени представляются быстро осциллирующей функцией с одной фазой: $u|_{t=0} = \Psi^0(S^0(x)/\varepsilon, x)$, $\varepsilon \ll 1$, то при $t > 0$ они будут также быстро осциллирующей функцией с одной фазой: $u = \Psi(S(x, t)/\varepsilon, x, t, \varepsilon)$ (однофазовая асимптотика). Напротив, если волны в начальный момент времени являются суперпозицией быстро осциллирующих функций: $u|_{t=0} = \Psi_1^0(S_1^0(x)/\varepsilon, x) + \Psi_2^0(S_2^0(x)/\varepsilon, x)$, то при $t > 0$ они будут представляться не суперпозицией однофазовых асимптотик $\Psi_j(S_j(x, t)/\varepsilon, x, t, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, а функцией $\Psi_1(S_1(x, t)/\varepsilon, x, t, \varepsilon) + \Psi_2(S_2(x, t)/\varepsilon, x, t, \varepsilon) + \Psi_3(S_3(x, t)/\varepsilon, \ldots, S_M(x, t)/\varepsilon, x, t, \varepsilon)$, где «новая» функция Ψ_3 имеет величину порядка $O(1)$, $S_3, \ldots, S_M$ есть линейные комбинации S_1 и S_2, причем количество «новых» фаз может быть бесконечно большим (многофазовая асимптотика). В этом случае говорят, что между волнами Ψ_1 и Ψ_2 произошло резонансное взаимодействие, в результате которого образовалась новая волна Ψ_3. Специфика уравнений с малой нелинейностью состоит в том, что фазы быстрых осцилляций находятся так же, как и в линейных задачах, из уравнений Гамильтона—Якоби

$$\partial S_j/\partial t + \lambda_j(\partial S_j/\partial x, x, t) = 0, \quad S_j|_{t=0} = S_j^0(x). \tag{1}$$

Однако «амплитуды» Ψ_j этих волн находятся только при учете нелинейности в исходных уравнениях и, соответственно, нарушения принципа суперпозиции. Развитый в последнее время общий подход к асимптотическому интегрированию слабо нелинейных уравнений в частных производных [8 — 10] вскрыл определяющее влияние дисперсии на характер резонансного взаимодействия коротких волн. Имеет место следующий факт. Если соответствующие (1) дисперсионные соотношения не однородны: $\lambda_j(\sigma k, x, t) \neq \sigma\lambda_j(k, x, t)$, $\sigma > 0$ (так называемая сильная дисперсия), то при взаимодействии конечного числа плоских волн может возникнуть только конечное число новых плоских волн. Примером может служить известная в физике задача о генерации плоскими волнами $\varphi_j(x, t)\exp(iS_j(x, t)/\varepsilon)$, $j = 1, 2$, волны $\varphi_3(x, t)\exp(i(S_1 + S_2)/\varepsilon)$ в среде с малой квадратичной нелинейностью. При сильной дисперсии амплитуды этих волн определяются из так называемых уравнений трехволнового процесса [2—7,13]

$$d\varphi_1/dt_1 + i\rho_1\bar{\varphi}_2\varphi_3 = 0, \quad d\varphi_2/dt_2 + i\rho_2\bar{\varphi}_1\varphi_3 = 0, \quad d\varphi_3/dt_3 + i\rho_3\varphi_1\varphi_2 = 0, \tag{2}$$
$$\varphi_1|_{t=0} = \varphi_1^0(x), \quad \varphi_2|_{t=0} = \varphi_2^0(x), \quad \varphi_3|_{t=0} = 0.$$

Здесь d/dt_j — полная производная вдоль характеристик уравнения (1), $\rho_j = \rho_j(x, t) \in C^\infty$, черта сверху означает комплексное сопряжение.

Напротив, если дисперсионные соотношения однородны (так называемая слабая дисперсия), то возникает эффект генерации кратных гармоник: каждая из плоских волн $\varphi_j\exp(\pm iS_j/\varepsilon)|_{t=0}$ порождает при $t > 0$ бесконечное количество плоских волн с кратными S_j фазами: $\varphi_j^l(x, t)\exp(ilS_j/\varepsilon)$,

$l=\pm 1, \pm 2, \ldots$ В этом случае говорят, что плоская волна $\varphi_j^0(x)\exp(\pm iS_j^0(x)/\varepsilon)$ генерирует цуг волн $\Psi_j(S_j/\varepsilon, x, t)=\sum\limits_{l=\pm 1}^{\pm\infty}\varphi_j^l(x, t)\exp(ilS_j(x, t)/\varepsilon)$. В свою очередь, между цугами Ψ_j также может происходить резонансное взаимодействие, что приводит к появлению новых цугов. В случае нелинейных дисперсионных соотношений $\lambda_j(k_1+k_2, x, t)\neq\lambda_j(k, x, t)+\lambda_j(k_2, x, t)$ взаимодействие конечного числа плоских волн приводит к появлению конечного числа новых цугов. Эволюция этих цугов описывается многомерными аналогами уравнений (2). Например, для многих сред с малой квадратичной нелинейностью процесс генерации и взаимодействия цугов $\Psi_i(S_j/\varepsilon, x, t)$, $j=1, 2, 3$, $S_3=S_1+S_2$ описывается уравнениями трехцугового процесса [8—10]

$$\begin{gathered}
\frac{d\Psi_1}{dt}+\gamma_1^1\Psi_1+\gamma_2^1\Psi_1\frac{\partial\Psi_1}{\partial\tau}+\gamma_3^1\frac{\partial^3\Psi_1}{\partial\tau^3}+\\
+\frac{\gamma_4^1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^{2\pi}\Psi_2(\xi, x, t)\Psi_3(\tau+\xi, x, t)\,d\xi=0,\\
\frac{d\Psi_2}{dt}+\gamma_1^2\Psi_2+\gamma_2^2\Psi_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial\tau}+\gamma_3^2\frac{\partial^3\Psi_2}{\partial\tau^3}+\\
+\frac{\gamma_4^2}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^{2\pi}\Psi_1(\xi, x, t)\Psi_3(\tau+\xi, x, t)\,d\xi=0,\\
\frac{d\Psi_3}{dt_3}+\gamma_1^3\Psi_3+\gamma_2^3\Psi_3\frac{\partial\Psi_3}{\partial\tau}+\gamma_3^3\frac{\partial^3\Psi_3}{\partial\tau^3}+\\
+\frac{\gamma_4^3}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_0^{2\pi}\Psi_1(\xi, x, t)\Psi_2(\tau-\xi, x, t)\,d\xi=0,
\end{gathered}\tag{3}$$

$$\Psi_1|_{t=0}=\varphi_1^0(x)\exp(i\tau)+\text{к. с.},\quad \Psi_2|_{t=0}=\varphi_2^0(x)\exp(i\tau)+\text{к. с.},\quad \Psi_3|_{t=0}=0.$$

Здесь $\Psi_j=\Psi_j(\tau, x, t)$ предполагаются 2π-периодическими по τ, d/dt_j — полная производная вдоль характеристик уравнения Гамильтона—Якоби, определяющего фазу S_j, $\gamma_j^m=\gamma_j^m(x, t)\in C^\infty$, через к. с. обозначены комплексно сопряженные слагаемые.

Линейность дисперсионных соотношений $\lambda_j(k_1+k_2, x, t)=\lambda_j(k_1, x, t)+\lambda_j(k_2, x, t)$, как правило, приводит к так называемому явлению полного резонанса. Суть его состоит в том, что конечное число плоских волн $\varphi_j\exp(\pm iS_j/\varepsilon)|_{t=0}$, $j=1, \ldots, N$, порождает при $t>0$ бесконечное количество цугов, т. е. многофазную функцию

$$\Phi(S_1/\varepsilon, \ldots, S_N/\varepsilon, x, t)=\sum_{l_1=-\infty}^{\infty}\cdots\sum_{l_N=-\infty}^{\infty}\varphi_{l_1\ldots l_N}(x, t)\exp(i(l_1S_1+\ldots+l_NS_N)/\varepsilon).$$

Эволюция таких многофазовых решений описывается нелинейными уравнениями с частными производными по переменным t, x и $\tau_j=S_j/\varepsilon$, $j=1, 2, \ldots, N$ [10].

В данной работе метод, развитый в работах [8 — 10], применяется для исследования малых коротковолновых возмущений равновесного состояния плазмы. В двухжидкостном слабо дисперсионном приближении эволюция возмущений описывается системой уравнений с малой нелинейностью [7, 14, 15]

$$\frac{dV}{dt}+\frac{1}{\rho_0}\nabla p+\frac{1}{\rho_0}B_0\times\operatorname{rot}B=-\varepsilon\left\{\langle V, \nabla\rangle V+\nu\frac{P}{p_0}\frac{dV}{dt}+\frac{1}{\rho_0}B\times\operatorname{rot}B\right\},$$

$$\frac{dP}{dt}+\frac{p_0}{\nu}\operatorname{div}V=-\varepsilon\left\{\langle V, \nabla\rangle P+\frac{P}{\nu}\operatorname{div}V\right\},\tag{4}$$

$$\frac{dB}{dt}+B_0\operatorname{div}V-\langle B_0,\nabla\rangle V=-\varepsilon\operatorname{rot}\left\{\varepsilon\frac{dV}{dt}-V\times B\right\}+\varepsilon^2\alpha\Delta B.$$

Здесь $x\in R^3$, $t\in(0,\ T)$ — безразмерные переменные; $V=(V_1,\ V_2,\ V_3)$, P, $B=(B_1,\ B_2,\ B_3)$ — безразмерные функции, характеризующие возмущение скорости, давления и напряженности магнитного поля; равновесное состояние V_0, p_0, B_0 предполагается постоянным; ε — малый параметр, характеризующий величину возмущения; параметр $\alpha\geqslant 0$ характеризует величину диссипации; $\nabla=(\partial/\partial x,\ \partial/\partial x_2,\ \partial/\partial x_3)$, $d/dt=\partial/\partial t+\langle V_0,\ \nabla\rangle$, угловыми скобками обозначено векторное скалярное произведение. В системе (4) предполагается, что вектор-функция B удовлетворяет условию $\operatorname{div}B=0$ и что плотность ρ и давление связаны уравнением состояния типа политропы $\rho=\mathrm{const}\cdot p^{\nu}$, $\rho_0=\mathrm{const}\ p_0^{\nu}$ [7, 14]. Отметим, что переход от сжимаемой плазмы к несжимаемой соответствует предельному переходу в (4) при $\nu\to 0$. В этом смысле показатель ν можно трактовать как параметр, характеризующий величину сжимаемости плазмы.

2. Взаимодействие цугов альфвеновских и медленных магнитозвуковых волн в косом магнитном поле. Альфвеновскими и медленными магнитозвуковыми волнами называются частные решения линеаризованной системы магнитной гидродинамики без дисперсии и диссипации

$$\Lambda(\partial/\partial t,\ \nabla)U=0,\ \operatorname{div}B=0, \tag{5}$$

где $U=(V,P,B)$, через Λ обозначен оператор, стоящий в левой части (4).

Введем обозначения. Рассмотрим для этого соответствующее (5) дисперсионное уравнение

$$\det\Lambda(\omega,\ k)=\Omega\left\{\Omega^2-\frac{1}{\rho_0}\langle B_0,\ k\rangle^2\right\}\left\{\nu\rho_0\Omega^4-\Omega^2|k|^2(p_0+\nu|B_0|^2)+\right.$$

$$\left.+\frac{p_0}{\rho_0}\langle B_0,\ k\rangle^2|k|^2\right\}=0,\ \Omega=\omega+\langle V_0,\ k\rangle, \tag{6}$$

и пусть $\langle B_0,\ k\rangle\neq 0$, $\langle B_0,\ k\rangle\neq\pm|B_0||k|$ (так называемое косое магнитное поле). Тогда корням уравнения (6) $\omega_A^{\pm}=-\langle V_0,\ k\rangle\pm\Omega_A(k)$, $\Omega_A=\langle B_0,\ k\rangle/\sqrt{\rho_0}$ соответствуют частные быстро осциллирующие решения системы (5)

$$U_A^{\pm}=\xi_A^{\pm}\varphi(x,\ t)\exp(i(\omega_A^{\pm}t+\langle k,\ x\rangle)/\varepsilon),\ \xi_A^{\pm}=(\zeta_A,\ 0,\ \eta_A^{\pm}),$$

$$\zeta_A=k\times B_0,\quad \eta_A^{\pm}=\pm\sqrt{\rho_0}\zeta_A, \tag{7}$$

называемые альфвеновскими волнами [7,14]. Корням

$$\omega_M^{\pm}=-\langle V_0,\ k\rangle\pm\Omega_M(k),\ \Omega_M=\frac{|k|}{\sqrt{2\nu\rho_0}}\{p_0+\nu|B_0|^2-$$

$$-\sqrt{(p_0+\nu|B_0|^2)^2-4\nu p_0\langle B_0,\ k/|k|\rangle^2}\}^{1/2} \tag{8}$$

соответствуют частные решения (6), называемые медленными магнитозвуковыми волнами [7,14]:

$$U_M^{\pm}=\xi_M^{\pm}\psi(x,\ t)\exp(i(\omega_M^{\pm}t+\langle k,\ x\rangle)/\varepsilon),\ \xi_M^{\pm}=(\zeta_M,\ \pi_M^{\pm},\ \eta_M^{\pm}),$$

$$\xi_M=\left(\frac{\Omega_M}{|k|}\right)^2k-\frac{\langle B_0,\ k\rangle}{\rho_0}B_0,\ \ \pi_M^{\pm}=\mp\frac{p_0\langle k,\ \zeta_M\rangle}{\nu\Omega_M},\ \ \eta_M^{\pm}=\pm\frac{\Omega_M}{|k|^2}k\times(k\times B_0). \tag{9}$$

В (7), (9) $\varphi,\psi\in C^{\infty}$ — некоторые скалярные функции.

Пусть начальные данные для системы (4) представляют собой суперпозицию линейных волн (7) и (9):

$$U|_{t=0}=\xi_1\psi_1^0(x)\exp(i\langle k_1,\ x\rangle/\varepsilon)+\xi_2\psi_2^0(x)\exp(i\langle k_2,\ x\rangle/\varepsilon)+\text{к. с.} \tag{10}$$

Здесь $U = (V, P, B)$, $\xi_1 = \xi_A^+(k_1)$, $\xi_2 = \xi_M^+(k_2)$, ψ_j^0 — равномерно ограниченные скалярные функции из $C^\infty(R^3)$. Будем предполагать, что векторы B_0, k_1, k_2 не лежат в одной плоскости, попарно не коллинеарны и $\langle B_0, k_j\rangle \neq 0$, $j = 1, 2$. Предположим также, что отношение $\langle B_0, k_1\rangle / \langle B_0, k_2\rangle$ иррационально и векторы k_1, k_2 удовлетворяют условию

$$\Omega_A^+(k_1) + \Omega_M(k_2) = \Omega_M(k_1 + k_2), \tag{11}$$

обеспечивающему возникновение резонансного взаимодействия.

2.1. Взаимодействие волн в сжимаемой плазме ($\nu = \text{const} > 0$). Асимптотическое решение задачи (4), (10), описывающее трехцуговое взаимодействие, будем искать в виде

$$U = \sum_{j=1}^{3} U_j(S_j/\varepsilon, x, t) + \varepsilon\Big\{U_0^1(x, t) + \sum_{j=1}^{3} U_j^1(S_j/\varepsilon, x, t) + \\ + W(S_1/\varepsilon, S_2/\varepsilon, S_3/\varepsilon, x, t)\Big\} + O(\varepsilon^2), \tag{12}$$

где $S_j = S_j(x, t)$ — скалярные функции из $C^\infty(R^3 \times (0, T))$, $U_0^1(x, t)$ — ограниченная векторнозначная функция из $C^\infty(R^3 \times (0, T))$, $U_j(\tau_j, x, t)$, $U_j^1(\tau_j, x, t)$, $W(\tau, \tau_2, \tau_3, x, t)$ — ограниченные бесконечно дифференцируемые при $x \in R^3$, $t \in (0, T)$, $\tau_j \in [0, 2\pi]$ вектор-функции, 2π-периодические по каждой из переменных τ_j с нулевым средним

$$\int_0^{2\pi} U_j(\tau_j, x, t)\, d\tau_j = 0, \ j = 1, 2, 3, \quad \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} W(\tau_1, \tau_2, \tau_3, x, t)\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 = 0.$$

В дальнейшем класс обладающих указанными свойствами скалярных и векторнозначных функций $F(\tau_1, \ldots, \tau_M, x, t)$ будем обозначать $\mathfrak{M}_M$, $M \geqslant 1$. Символом $O(\varepsilon^N)$ обозначаются бесконечно дифференцируемые функции $f(\tau_1, \ldots, \tau_M, x, t, \varepsilon)$ такие, что равномерно по x, t, $\tau_1, \ldots, \tau_M$

$$\big|\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-N} f(\tau_1, \ldots, \tau_M, x, t, \varepsilon)\big| \leqslant \text{const}.$$

Подставим (12) в систему (4) и сгруппируем члены одного порядка по ε:

$$\varepsilon^{-1} \sum_{j=1}^{3} \Lambda(\omega_j, k_j) \frac{\partial}{\partial \tau_j} U_j(\tau_j, x, t) + \sum_{j=1}^{3} \Big\{\Lambda(\omega_j, k_j) \frac{\partial}{\partial \tau_j} U_j^1(\tau_j, x, t) + \\ + \Lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) U_j(\tau_j, x, t) - P_j F\Big\} + \Lambda\left(\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}, \varepsilon\nabla\right) W\left(\frac{S_1}{\varepsilon}, \frac{S_2}{\varepsilon}, \frac{S_3}{\varepsilon}, x, t\right) - \\ - \Big(I - \sum_{j=1}^{3} P_j\Big) F\,\big|_{\tau_j = S_j/\varepsilon} = O(\varepsilon). \tag{13}$$

Здесь $\omega_j = \partial S_j/\partial t$, $k_j = \nabla S_j$, $P_j\colon \mathfrak{M}_3 \to \mathfrak{M}_1$ — проектор на множество функций от переменных τ_j, x, t, $j = 1, 2, 3$, I — единичный оператор, вектор-функция $F = F(\tau_1, \tau_2, \tau_3, x, t)$ получается в результате подстановки (12) в правую часть (4) и пренебрежения членами $O(\varepsilon)$. В соотношении (13) учтено, что оператор Λ однороден: $\Lambda(\omega_j \partial/\partial\tau_j, k_j \partial/\partial\tau_j) = \Lambda(\omega_j, k_j)\, \partial/\partial\tau_j$. Приравняем нулю члены $O(\varepsilon^{-1})$ соотношения (13). Так как $U_j \in \mathfrak{M}_1$, то получаем систему алгебраических уравнений

$$\Lambda(\omega_j, k_j)\, U_j(\tau_j, x, t) = 0, \ j = 1, 2, 3. \tag{14}$$

Условие нетривиальной разрешимости (14) приводит к дисперсионному уравнению (6). Из (6) и начального условия (12) определяем фазы S_1, S_2:

$$S_j = \omega_j t + \langle k_j, x\rangle, \ \omega_1 = \omega_A^+(k_1), \ \omega_2 = \omega_M^+(k_2). \tag{15}$$

В силу (11)

$$S_3 = S_1 + S_2 \tag{16}$$

и одновременно с этим S_3 удовлетворяет (8), т. е.

$$S_3 = \omega_3 t + \langle k_3, x\rangle,\ \omega_3 = \omega_M^+(k_3),\ k_3 = k_1 + k_2. \tag{17}$$

Ранг матрицы $\Lambda(\omega_j, k_j)$ равен шести, поэтому из (14) вектор-функция U_j находится с точностью до скалярного множителя $\Psi_j(\tau_j, x, t) \in \mathfrak{M}_1$:

$$U_j = \xi_j \Psi_j(\tau_j, x, t),\ j = 1, 2, 3, \tag{18}$$

где векторы $\xi_j = (\zeta_j, \pi_j, \eta_j) \in \mathbb{R}^7$ определяются по формулам (7), (9): $\xi_1 = \xi_A^+(k_1)$, $\xi_2 = \xi_M^+(k_2)$, $\xi_3 = \xi_M^+(k_3)$.

Рассмотрим младшие члены в соотношении (13). Нетрудно убедиться, что (13) будет выполнено, если U_j^1, $j = 1, 2, 3$ и W удовлетворяют уравнениям

$$\Lambda(\omega_j, k_j)\frac{\partial}{\partial \tau_j} U_j^1(\tau_j, x, t) = -\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) U_j(\tau_j, x, t) + P_j F, \tag{19}$$

$$\Lambda\left(\sum_{j=1}^{3} \omega_j \frac{\partial}{\partial \tau_j}, \sum_{j=1}^{3} k_j \frac{\partial}{\partial \tau_j}\right) W(\tau_1, \tau_2, \tau_3, x, t) = \left(I - \sum_{j=1}^{3} P_j\right) F. \tag{20}$$

Отметим, что переменные x, t входят в (19), (20) как параметры и правые части этих уравнений принадлежат $\mathfrak{M}$.

Лемма 1. *Для разрешимости уравнений* (19) *в* $\mathfrak{M}_1$ *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\langle \xi_j^*, \Lambda(\partial/\partial t, \nabla)\xi_j\rangle \Psi_j(\tau_j, x, t) - \langle \xi_j^*, P_j F\rangle = 0,\ j = 1, 2, 3, \tag{21}$$

где $\xi_1^* = (\zeta_A(k_1), 0, \zeta_A(k_1)/\sqrt{\rho_0})$, $\xi_l^* = (\zeta_M(k_l), \nu\pi_M^+(k_l)/\rho_0 p_0, \eta_n^+(k_l)/\rho_0)$, $l = 2, 3$.

Для доказательства леммы достаточно заметить, что $\operatorname{rank}\Lambda(\omega_j, k_j) = 6$, а ξ_j^* — нуль-векторы матрицы, сопряженной к $\Lambda(\omega_j, k_j)$.

Рассмотрим условия ортогональности (21). В результате несложных, но громоздких вычислений доказывается следующая лемма.

Лемма 2. *Равенства* (21) *эквивалентны системе уравнений*

$$\begin{gathered}
\frac{d\Psi_1}{dt_A} - \gamma_1^1 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \tau^2} + \frac{\gamma_2^1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^{2\pi} \Psi_2(y, x, t)\Psi_3(\tau + y, x, t)\,dy = 0, \\
\frac{d\Psi_2}{dt_2} + \mu_2 \Psi_2 \frac{\partial \Psi_2}{\partial \tau} - \gamma_1^2 \frac{\partial^2 \Psi_2}{\partial \tau^2} + \frac{\gamma_2^2}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^{2\pi} \Psi_1(y, x, t)\Psi_3(\tau + y, x, t)\,dy = 0, \\
\frac{d\Psi_3}{dt_3} + \mu_3 \Psi_3 \frac{\partial \Psi_3}{\partial \tau} - \gamma_1^3 \frac{\partial^2 \Psi_3}{\partial \tau^2} + \frac{\gamma_2^3}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^{2\pi} \Psi_1(y, x, t)\Psi_2(\tau - y, x, t)\,dy = 0,
\end{gathered} \tag{22}$$

где

$$\frac{d}{dt_A} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle V_0, \nabla\rangle - \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\langle B_0, \nabla\rangle,\ \frac{d}{dt_l} = \frac{\partial}{\partial t} + \langle V_0, \nabla\rangle - \langle \nabla_k \Omega_M(k_l), \nabla\rangle,$$

$$\gamma_2^1 = \frac{1}{2|\zeta_1|^2}\left\{\frac{\langle \zeta_1, k_2\rangle}{\Omega_2 \Omega_3}\langle \Omega_2 k_3 - \Omega_3 k_2,\ \frac{\Omega_3^3}{|k_3|^2}\zeta_2 + \frac{\Omega_2^3}{|k_2|^2}\zeta_3\rangle - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\rho_0}\langle \zeta_1, (\Omega_3 \eta_2 - \Omega_2 \eta_3) \times (k_2 \times B_0)\rangle\right\},\ \mu_l = -\langle k_l, \zeta_l\rangle\{3 + \pi_l^2(1 - 2\nu)/(|\zeta_2|^2 p_0 \rho_0)\}/2,$$

$$\gamma_1^1 = \alpha |k_1|^2/2,\ \gamma_1^l = \alpha |k_l|^2 |\eta_l|^2/(2\rho_0 |\zeta_l|^2),\ \gamma_2^l = \left\{\langle \zeta_1, k_2\rangle\left[\rho_0\langle \zeta_L, \zeta_l - \right.\right. \tag{23}$$

$$-(-1)^l \frac{\Omega_l}{|k_l|^2} k_1\rangle + \frac{\nu \pi_L}{p_0}\left(\pi_l - (-1)^l \rho_0 \frac{\Omega_1 \Omega_l^2}{|k_l|^2}\right)\Big] + \langle \zeta_\iota, \eta_1 \times (k_L \times \eta_L) -$$

$$-(-1)^l \eta_L \times (k_1 \times \eta_1)\rangle - \Omega_l \langle B_0, k_l \times (\zeta_1 \times \eta_L + \zeta_L \times \eta_1)\rangle\}/(2\rho_0 |\zeta_l|^2),$$

$$\Omega_1 = \Omega_A(k_1),\ \Omega_l = \Omega_M(k_l),\ l = 2, 3,\ L = 3 \text{ при } l = 2 \text{ и } L = 2 \text{ при } l = 3.$$

Подставляя (12) в начальные условия (10) и учитывая условие периодичности, для Ψ_j получаем начальные и граничные условия;

$$\Psi_1|_{t=0} = \psi_1^0(x)\exp(i\tau) + \text{к. с.},\quad \Psi_2|_{t=0} = \psi_2^0(x)\exp(i\tau) + \text{к. с.},\quad \Psi_3|_{t=0} = 0, \tag{24}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial \tau^n}\Psi_j|_{\tau=0} = \frac{\partial^n}{\partial \tau^n}\Psi_j|_{\tau=2\pi},\ j = 1, 2, 3,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Нетрудно установить, что при $\alpha > 0$ решение квазилинейной параболической системы (22) существует, единственно и принадлежит $C^\infty((0, T) \times R^3 \times (0, 2\pi))$ при всех конечных T. Из очевидных равенств

$$\frac{d}{dt_A}\int_0^{2\pi} \Psi_1 d\tau = 0,\ \frac{d}{dt_l}\int_0^{2\pi} \Psi_l d\tau = 0,\ l = 2, 3,$$

и начальных условий (24) следует, что функции Ψ_j имеют нулевое среднее по τ. Отметим, что при $\alpha = 0$ для системы (22) справедлив закон сохранения—аналог соотношения Мэнли—Роу:

$$\frac{1}{\gamma_2^1}\frac{d}{dt_A}\int_0^{2\pi}\Psi_1^2 d\tau + \frac{1}{\gamma_2^2}\frac{d}{dt_2}\int_0^{2\pi}\Psi_2^2 d\tau + \frac{2}{\gamma_2^3}\frac{d}{dt_3}\int_0^{2\pi}\Psi_3^2 d\tau = 0.$$

Однако при $\alpha = 0$ бесконечно дифференцируемое решение задачи (22) существует, вообще говоря, лишь в малом.

Рассмотрим систему (20). Учтем равенство $\tau_3 = \tau_1 + \tau_2$ и введем новую вектор-функцию $W_1(\tau_1, \tau_2, x, t) = W(\tau_1, \tau_2, \tau_1 + \tau_2, x, t)$. Разложим вектор-функцию F в ряд Фурье по переменной τ. Тогда из (20) получаем алгебраические уравнения

$$\Lambda(l_1\omega_1 + l_2\omega_2,\ l_1k_1 + l_2k_2) W_1^{l_1l_2}(x, t) = f^{l_1l_2}(x, t), \tag{25}$$

где $W_1^{l_1l_2}$, $f^{l_1l_2}$ — коэффициенты разложения W_1 и $F(\tau_1, \tau_2, \tau_1 + \tau_2, x, t)$ в ряд Фурье, l_1 и l_2 — отличные от нуля целые числа, причем $l_1 \neq l_2$. Для разрешимости (25) при фиксированных l_1, l_2 достаточно потребовать, чтобы определитель стоящей слева матрицы был отличен от нуля. Это, в свою очередь, приводит к алгебраическим условиям для k_1, k_2, выполнимым в случае иррационального отношения $\langle B_0, k_1\rangle/\langle B_0, k_2\rangle$ и указанного выше взаимного расположения B_0, k_1, k_2. Однако при $|l_1|, |l_2| \to \infty$ определитель может стать сколь угодно близким нулю, что в общем случае влечет за собой расходимость ряда Фурье с коэффициентами $W_1^{l_1l_2}$. Указанная ситуация, известная в литературе как «проблема малых знаменателей», требует такое же условие на k_1, k_2, что и теория Колмогорова—Арнольда—Мозера [16, 17]; предположим существование таких постоянных $c > 0$, μ, что

$$|\det \Lambda(l_1\omega_1 + l_2\omega_2,\ l_1k_1 + l_2k_2)| \geqslant \frac{c}{(|l_1| + |l_2|)^\mu} \tag{26}$$

для всех отличных от нуля целых чисел l_1, l_2, $l_1 \neq l_2$. Ряд Фурье с коэффициентами $f^{l_1l_2}$ абсолютно сходится с экспоненциальной скоростью, так как F — квадратичная функция от Ψ_1, Ψ_2, $\Psi_3 \in \mathfrak{M}_1$. Отсюда и из (26) следует разрешимость (20) в классе $\mathfrak{M}_3$.

Для разрешения построения младших членов асимптотики осталось определить вектор-функцию $U_0^1(x, t)$. Подставим (12) в (4), (10) и проинтегрируем (4) от 0 до 2π по переменным $\tau_j = S_j/\varepsilon$, $j = 1, 2, 3$. Так как $U_j \in \mathfrak{M}_1$, а правую часть f системы (4) можно представить в виде $f = F(\tau_1, \tau_2, \tau_3, x, t) + \varepsilon F_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, x, t) + O(\varepsilon^2)$, где $F \in \mathfrak{M}_3$, то для определения U_0^1 получаем задачу Коши

$$\Lambda\left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) U_0^1 = \frac{1}{8\pi^3} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F_1(\tau_1, \tau_2, \tau_3, x, t)\, d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3.$$

Правая часть этой системы бесконечно дифференцируема и ограничена, поэтому U_0^1 существует и принадлежит $C^\infty(R^3 \times (0, T))$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть* $\alpha > 0$, $\nu = \text{const} > 0$, *выполнены условия* (11), (26). *Тогда асимптотическое по* $\operatorname{mod} O(\varepsilon)$ *решение задачи* (4), (10) *имеет вид*

$$U = \xi_A^+(k_1)\Psi_1(S_1/\varepsilon, x, t) + \xi_M^+(k_2)\Psi_2(S_2/\varepsilon, x, t) + \xi_M^+(k_3)\Psi_3(S_3/\varepsilon, x, t), \quad (27)$$

где функция $S_j = S_j(x, t)$ *и векторы* ξ *определены в* (15), (16), (7), (9), $\Psi_j(\tau, x, t)$ — *решение задачи* (23).

2.2. Взаимодействие волн в мало сжимаемой плазме ($\nu \in [0, \text{const}]$). Необходимость специального рассмотрения мало сжимаемой плазмы связана с тем, что при $\nu \to 0$ корни дисперсионного уравнения (6) меняют кратность: $\det\Lambda(\omega, k) = \Omega\{\Omega^2 - \langle B_0, k\rangle^2/\rho_0\}^2 = 0$ при $\nu = 0$.

Укажем способ построения равномерного по ν асимптотического решения задачи (4), (10). Будем искать асимптотическое решение в виде

$$U = \sum_{j=1}^{6} U_j(S_j/\varepsilon, x, t) + \varepsilon\Big\{U_0^1(x, t) + \sum_{j=1}^{6} U_j^1(S_j/\varepsilon, x, t) + \\ + W(S_1/\varepsilon, \ldots, S_6/\varepsilon, x, t)\Big\} + O(\varepsilon^2), \quad (28)$$

где скалярные функции $S_j = S_j(x, t)$ и вектор-функция $U_0^1(x, t)$ принадлежат $C^\infty(R^2 \times (0, T))$, $U_j(\tau_j, x, t)$, $U_j^1(\tau_j, x, t) \in \mathfrak{M}_1$, $W(\tau_1, \ldots, \tau_6, x, t) \in \mathfrak{M}_6$.

Подставим (28) в (4) и приравняем нулю члены $O(\varepsilon^{-1})$. Аналогично п. 2.1, получаем алгебраические уравнения вида (14) при $j = 1, \ldots, 6$. Определим функции S_l, U_l при $l = 1, 2, 3$ так же, как и в п. 2.1, т. е. по формулам (15)—(18). Остальные функции выберем следующими:

$$S_4 = \omega_4 t + \langle k_4, x\rangle, \ \omega_4 = \omega_M^+(k_4), \ U_4(\tau, x, t) = \xi_4\Psi_4(\tau, x, t), \quad (29)$$

$$S_n = \omega_n t + \langle k_n, x\rangle, \ \omega_n = \omega_A^+(k_n), \ U_n(\tau, x, t) = \xi_n\Psi_n(\tau, x, t), \ n = 5,6, \quad (30)$$

где $k_4 = k_1$, $k_5 = k_2$, $k_6 = k_1 + k_2$, $\xi_4 = \xi_M^+(k_4)$, $\xi_n = \xi_A^+(k_n)$, $\Psi_j \in \mathfrak{M}_1$.

В случае $\nu \neq 0$ формулы (29) определяют цуг медленных магнитозвуковых волн, а (30)—цуги альфвеновских волн. Нетрудно установить, что

$$\lim_{\nu\to 0} \omega_M^+(k) = \omega_A^+(k), \ \lim_{\nu\to 0} \xi_M^+(k) = \xi_{A,0}^+(k). \quad (31)$$

Здесь $\xi_{A,0}^+(k)$ — линейно независимый с $\xi_A^+(k)$ элемент ядра $\Lambda(\omega_A^+(k), k)$ при $\nu = 0$. Таким образом, $\xi_l\Psi_l(\tau, x, t) + \xi_{l+3}\Psi_{l+3}(\tau, x, t)$ является общим решением системы $\Lambda(\omega_l, k_l)U = 0$ при $\nu = 0$, $l = 1, 2, 3$. В дальнейшем будем использовать легко проверяемые равенства $S_l = S_{l+3} + \nu g_l(\nu)t$, $l = 1, 2, 3$, где g_l — равномерно ограниченные функции $\nu \in [0, \text{const}]$. При определении младших членов разложения (28) аналогично п. 2.1 получаем уравнения вида (19) и соответствующие условия ортогональности

$$\langle \xi_j^*, \Lambda(\partial/\partial t, \nabla)\xi_j\rangle \Psi_j(\tau_j, x, t) - \langle \xi_j^*, P_j F\rangle = 0, \ j = 1, 2, \ldots, 6, \quad (32)$$

где все обозначения те же, что и в (21). Используя (20) и наши предположения относительно B_0, k_1, k_2, нетрудно доказать, что условия (32) необходимы и достаточны для существования $U_j^1(\tau_j, x, t) \in \mathfrak{M}_1$ при всех $\nu \in [0, \text{const}]$.

Рассмотрим (32) при $j=1$. В результате несложных, но громоздких вычислений это условие можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\Psi_1}{dt_A}-\gamma_1^1\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial\tau_1^2}+\frac{\gamma_2^1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau_1}\int\limits_0^{2\pi}\Psi_2(y,x,t)\Psi_3(\tau_1+y,x,t)\,dy=$$

$$=c_1^1\frac{\partial^2}{\partial\tau_1^2}\Psi_4\left(\tau_1-\frac{\nu}{\varepsilon}g_1t,x,t\right)+c_2^1\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left(\Psi_4\left(\tau_1-\frac{\nu}{\varepsilon}g_1t,x,t\right)\right)^2+$$

$$+c_3^1\frac{\partial}{\partial\tau_1}\left(\Psi_1(\tau,x,t)\Psi_4\left(\tau_1-\frac{\nu}{\varepsilon}g_1t,x,t\right)\right)+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau_1}\int\limits_0^{2\pi}\left\{c_4^1\Psi_5\left(y-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{\nu}{\varepsilon}g_2t,x,t\right)\Psi_3(\tau_1+y,x,t)+c_5^1\Psi_2(y,x,t)\Psi_6\left(\tau_1+y-\frac{\nu}{\varepsilon}g_3t,x,t\right)+$$

$$\left.+c_6^1\Psi_5\left(y-\frac{\nu}{\varepsilon}g_2t,x,t\right)\Psi_6\left(\tau_1+y-\frac{\nu}{\varepsilon}g_3t,x,t\right)\right\}dy, \qquad (33)$$

где коэффициенты γ_1^1, γ_2^1 те же, что и в (22), $c_1^1,\dots,c_6^1$ — некоторые коэффициенты, зависящие от B_0k_1, k_2 и ν. В частности, $c_1^1=\Omega_A(k_1)\,\Omega_M(k_1)/2\rho_0$.

Пусть $\nu\gg\varepsilon$. Тогда правая часть (33) осциллирует по t с частотой $\sim\nu/\varepsilon\gg1$. Воспользуемся тем фактом, что пренебрежение быстро осциллирующей правой частью в (33) приводит к изменению решения на величину $O(\varepsilon/\nu)$. Тогда для отыскания асимптотического по mod $O(\varepsilon+\varepsilon/\nu)$ решения исходной задачи уравнение (33) может быть заменено первым уравнением системы (22).

Пусть $\nu\sim\varepsilon$, либо $\nu\ll\varepsilon$. В этом случае правая часть (33) не содержит быстрых осцилляций, однако коэффициенты γ_2^1 и $c_2^1,\dots,c_6^1$ имеют порядок $O(\nu)$. Отсюда заключаем, что (33) может быть заменено линейным уравнением

$$\frac{d\Psi_1}{dt_A}-\gamma_1^1\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial\tau_1^2}=c_1^1\frac{\partial^2}{\partial\tau_1^2}\Psi_4\left(\tau_1-\frac{\nu}{\varepsilon}g_1t,x,t\right) \qquad (34)$$

без изменения главного члена асимптотики.

Рассматривая остальные условия ортогональности, получаем, что (32) при $j=2,3$ и $\nu\gg\varepsilon$ приводят ко второму и третьему уравнениям (22), а при $j=4,5,6$—к системе вида (23) относительно функций Ψ_4, Ψ_5, Ψ_6. Так как из (28) и начальных условий (10) следует $\Psi_n|_{t=0}=0$, то $\Psi_n=0$ при $n=4,5,6$. Таким образом, в случае $\nu\gg\varepsilon$ асимптотическое по mod $O(\varepsilon+\varepsilon/\nu)$ решение задачи (4), (10) имеет вид (27), где Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 определяются из задачи (22). В случаях $\nu\sim\varepsilon$ и $\nu\ll\varepsilon$ условия ортогональности (32) приводят к уравнениям вида (34). Из линейности этих уравнений и начальных условий (10) выводим, что по mod $O(\varepsilon)$ Ψ_l являются плоскими волнами: $\Psi_l(\tau_l,x,t)=\psi_l(x,t)\exp(i\tau_l)+$ к. с., $l=1,2,4,5$, $\Psi_3=\Psi_6=0$, амплитуды которых определяются из задачи Коши

$$d\psi_l/dt_A+\gamma_1^l\psi_l=-c_1^l\psi_L\exp\left(-\frac{\nu}{\varepsilon}g_lt\chi_l\right),$$

$$d\psi_L/dt_A+\gamma_1^L\psi_L=c_1^L\psi_l\exp\left(\frac{\nu}{\varepsilon}g_lt\chi_l\right),\ l=1,5,$$

$$\psi_1|_{t=0}=\psi_1^0(x),\quad \psi_2|_{t=0}=\psi_2^0(x),\ \psi_4|_{t=0}=0,\ \psi_5|_{t=0}=0,$$

где $L=4$ при $l=1$, $L=2$ при $l=5$, $\gamma_1^l=\alpha|k_l|^2/2$, $c_1^l=\langle B_0,k_l\rangle^2/2\rho_0^2$, $c_1^L=|k_l|^2/2$, $\chi_1=1$, $\chi_5=-1$.

Наконец, рассматривая аналогичное (20) уравнение для W, получаем, что в случае $\varepsilon/\nu\sim O(\varepsilon)$ для его разрешимости в $\mathfrak{M}_3$ необходимо и достаточно выполнения (26), а при $\nu\sim\varepsilon$ и $\nu\ll\varepsilon$ это уравнение разрешимо в

$\mathfrak{M}_3$ без каких-либо дополнительных предположений. Отметим, что если $\nu \sim \varepsilon^{\varkappa}$, $\varkappa \in (0, 1)$, то при построении асимптотического решения с точностью $O(\varepsilon)$ функции $\Psi_1, \ldots, \Psi_6$ определяются из системы уравнений, аналогичных (33).

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
2. *Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М.* Системы гидродинамического типа и их применение — М. : Наука, 1981.— 386 с.
3. *Филлипс О. М.* Динамика верхнего слоя океана.— Л. : Гидрометеоиздат, 1980.— 319 с.
4. *Ахманов С. А., Хохлов Р. В.* Проблемы нелинейной оптики.— М. : ВИНИТИ, 1964.— 295 с.
5. *Бломберген Н.* Нелинейная оптика.— М. : Мир, 1966.— 424 с.
6. *Ярив А.* Введение в оптическую электронику.— М. : Высш. шк., 1983.— 398 с.
7. *Кадомцев Б. В.* Коллективные явления в плазме.— М. : Наука, 1976.— 238 с.
8. *Маслов В. П.* Нестандартные характеристики в асимптотических задачах // Успехи мат. наук.— 1983.— 38, № 6.— С. 3—36.
9. *Maslov V. P.* Mathematical aspects of integral optics.— M. : MIEM, 1983.— 130 p.
10. *Maslov V. P.* Resonance processes in the wave theory and self—focalization.— M. : MIEM, 1983.— 120 p.
11. *Штарас А. Л.* Асимптотическое интегрирование слабо нелинейных уравнений с частными производными // Докл. АН СССР.— 1977.— 237, № 3.— С. 525—528.
12. *Калякин Л. А.* Длинноволновая асимптотика решения гиперболической системы уравнений // Мат. сб.— 1984.— **124**, № 1.— С. 96—120.
13. *Захаров В. Е.* Метод обратной задачи рассеяния // Солитоны.— М. : Мир, 1983.— С. 270—309.
14. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. Н.* Электродинамика сплошных сред.— М. : Наука, 1982.— 620 с.
15. *Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П.* Математическое моделирование плазмы.— М. : Наука, 1982.— 320 с.
16. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели // Успехи мат. наук.— 1963.— 18, № 6.— С. 91—192.
17. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах.— М. : Мир, 1973.— 168 с.

Моск. ин-т электрон. машиностроения

Получено 13.03.87