УДК 517.5

В. И. Рукасов

Приближение функций класса $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ линейными средними их рядов Фурье

А. И. Степанец [1, 2] ввел классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ периодических функций следующим образом.

Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция и $a_0/2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ — ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi(k)$ — произвольная фиксированная функция натурального аргумента и β — фиксированное действительное число, $\beta \in (-\infty, \infty)$. Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos(kx+\beta\pi/2) + b_k \sin(kx + \beta\pi/2))/\psi(k)$ является рядом Фурье некоторой суммируемой функции $f^{\psi}_{\beta}(x)$: $\operatorname{ess\,sup} |f^{\psi}_{\beta}(x)| \leqslant 1$, то будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу $C^{\psi}_{\beta,\infty}$. При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ совпадают с хорошо известными классами W^{r}_{β}, введенными Б. Надем [3].

С помощью матрицы $\Lambda = \{\lambda_{n,k}\}$, $n, k = 0, 1, \ldots, \lambda_{n,0} = 1, \lambda_{n,k} = 0$ при $k \geqslant n$, каждой функции $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ поставим в соответствие полином порядка $n-1$:

$$U_n(f; x; \Lambda) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_{n,k}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Будем считать, что матрица Λ определяется последовательностью функций $\lambda(u) = \lambda_n(u)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$, таких, что $\lambda(k/n) = \lambda_{n,k}$.

Пусть, далее, $\psi(u)$ — функция, определенная при $u \geqslant 1$, имеющая значение $\psi(k)$ в точках $u = k$, и

$$\tau(u) = \tau_n(u) = \begin{cases} (1-\lambda(u))\,\psi(1)/\psi(n), & 0 \leqslant u \leqslant 1/n, \\ (1-\lambda(u))\,\psi(nu)/\psi(n), & 1/n < u < 1, \\ \psi(nu)/\psi(n), & 1 \leqslant u < \infty. \end{cases}$$

Тогда

$$\tau_{n,k} \overset{\mathrm{def}}{=} \tau(k/n) = \begin{cases} (1-\lambda_{n,k})\,\psi(k)/\psi(n), & 1 \leqslant k < n, \\ \psi(k)/\psi(n), & k \geqslant n. \end{cases}$$

Если $\tau(u)$ непрерывна и ее преобразование Фурье $T_\tau(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos(ut + \beta\pi/2)\,du$ является суммируемой на $(-\infty, \infty)$ функцией, т. е. $A(\tau) \overset{\mathrm{def}}{=} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |T_\tau(t)|\,dt < \infty$, то для любой функции $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ выполняется равенство [1]

$$f(x) - U_n(f; x; \Lambda) = \psi(n)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x + t/n)\,T_\tau(t)\,dt. \tag{1}$$

Здесь рассматриваем асимптотическое поведение величины

$$\varepsilon_n = \varepsilon(C^{\psi}_{\beta,\infty}; U_n) = \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \|f(x) - U_n(f; x; \Lambda)\|_C, \quad n \to \infty.$$

Обозначим через F множество заданных при всех $u \geqslant 1$ функций $\psi(u)$, удовлетворяющих условиям:

а) $\psi(u)$ выпукла вниз и $\lim\limits_{u\to\infty}\psi(u) = 0$;

б) при $n \to \infty$ определены соотношения

$$\int\limits_n^\infty \frac{\psi(n+t)}{t}\,dt = O(\psi(n)), \tag{2}$$

$$n\,|\psi'(n)| = O(\psi(n)). \tag{3}$$

При этом считаем, что $\psi'(u) = \psi'(u+0)\ \forall\ u \in [1, \infty)$.

Для классов $C^{\psi}_{\beta,\infty}$, в которых $\psi \in F$, докажем следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть функции $\tau(u) = \tau_n(u)$ заданы на $[0, \infty)$, равны $\psi(nu)/\psi(n)$ при $u \geqslant 1$, абсолютно непрерывны и интегралы*

$$|\sin(\beta\pi/2)|\int\limits_0^1 (\tau(u)/u)\,du, \quad \int\limits_0^1 (\lambda(u)/(1-u))\,du,$$

где

$$\lambda(u) = \begin{cases} (1-\psi(n)/\psi(1))\,\tau(u), & u \in [0, 1/n], \\ (1-\psi(n)/\psi(nu))\,\tau(u), & u \in [1/n, 1], \end{cases}$$

сходятся. Предположим, что производную $\tau'(u)$ в точках, в которых она не существует, можно доопределить так, что сходятся интегралы $\int\limits_0^1 u(1-u)\,|d\tau'(u)|$.

Тогда если при $u = k/n$, $k = 1, 2, \ldots, \tau(k/n) = (1 - \lambda_{n,k})\psi(k)/\psi(n)$, *то при* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические формулы*

$$\varepsilon_n = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\int_0^1 \frac{|\lambda(u)|}{1-u}du + O(\psi(n)) + O\left(\psi(n)\int_0^1 u(1-u)\,|d\tau'(u)|\right) +$$

$$+ O\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\int_0^1 \frac{|\tau(u)|}{u}du\right) + O\left(\psi(n)\int_{1-2/n\pi}^1 \frac{|\lambda(u)|}{1-u}du\right),$$

$$\varepsilon_n = \frac{2\psi(n)}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int_0^1 \frac{|\tau(u)|}{u}du + O(\psi(n)) +$$

$$+ O\left(\psi(n)\int_0^1 u(1-u)\,|d\tau'(u)|\right) + O\left(\psi(n)\int_0^1 \frac{|\lambda(u)|}{1-u}du\right) +$$

$$+ O\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\int_0^{2/n\pi}\frac{|\tau(u)|}{u}du\right).$$

Теорема 2. *Пусть* $\psi \in F$. *Тогда при* $n \to \infty$ *справедливы асимптотические формулы*

$$\varepsilon_n = \frac{4}{\pi^2}\psi(n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\lambda_{n,k}}{n-k} + O(\psi(n)) + O\left(\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\psi(n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|\tau_{n,k}|}{k}\right) +$$

$$+ O\left(\psi(n)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k(n-k)}{n}\,|\Delta^2\tau_{n,k-1}|\right), \tag{4}$$

$$\varepsilon_n = 2\pi^{-1}\psi(n)\sum_{k=1}^{n-1}|\tau_{n,k}|\,k^{-1} + O(\psi(n)) + O\left(\psi(n)\sum_{k=1}^{n-1}|\lambda_{n,k}|\,(n-k)^{-1}\right) +$$

$$+ O\left(\psi(n)\sum_{k=1}^{n-1}k(n-k)\,n^{-1}\,|\Delta^2\tau_{n,k-1}|\right), \tag{5}$$

где $\Delta^2\tau_{n,k} = \tau_{n,k} - 2\tau_{n,k+1} + \tau_{n,k+2}$.

В случае приближения суммами Валле Пуссена $V_{n,p}(f; x)$ ($\lambda_{n,k} = 1$, $k = 0, 1, \ldots, n-p$; $\lambda_{n,k} = 1 - (k - n + p)p^{-1}$, $k = n - p + 1, \ldots, n - 1$), рассматриваемыми в предположении, что $p = o(n)$, $n \to \infty$, из формулы (4) получаем асимптотическое равенство

$$\varepsilon(C^{\psi}_{\beta,\infty}; V_{n,p}) = 4\pi^{-2}\psi(n)\ln(np^{-1}) + O(\psi(n)), \quad n \to \infty. \tag{6}$$

При $p = 1$ (приближение суммами Фурье) формула (6) впервые была получена в работе [1].

При $\psi(n) = n^{-r}$, $r > 0$, (эта функция, очевидно, принадлежит к F) утверждения теорем 1, 2 и формула (6) известны [4, 5].

Теоремы 1 и 2 дополняют теоремы 1 и 4 из работы [6], которые, в свою очередь, являются распространением на классы $C^{\psi}_{\beta,\infty}$ соответствующих результатов работы [7].

При доказательстве теорем 1 и 2 мы используем метод, развитый С. А. Теляковским [4].

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме 3 работы [6] при $\psi \in F$ для функций $\tau_n(u)$, $n = 1, 2, \ldots,$ интегралы $A(\tau_n)$ сходятся. Следовательно, для любой функции $f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}$ справедливо равенство (1). Тогда

$$\varepsilon_n = \pi^{-1}\psi(n)\sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}}\left\|\int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x + tn^{-1})\int_0^{\infty}\tau(u)\cos(ut + 2^{-1}\beta\pi)\,du\,dt\right\|_C. \tag{7}$$

Введем в рассмотрение функции $\nu_n(u)$, $n = 1, 2, \ldots$, которые определим с помощью равенств

$$\nu(u) = \nu_n(u) = \begin{cases} u, & 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ \psi(nu)/\psi(n), & 1 < u < \infty. \end{cases}$$

В [6] показано, что при $\psi \in F$ интегралы $A(\nu_n)$ сходятся и равномерно ограничены. Отсюда на основании (7) заключаем, что

$$\varepsilon_n = \pi^{-1}\psi(n) \sup_{f \in C^{\psi}_{\beta,\infty}} \Big\| \int\limits_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}_{\beta}(x + t/n) \int\limits_{0}^{1} [\tau(u) - \nu(u)] \cos(ut + 2^{-1}\beta\pi)\, du dt \Big\|_C + \\ + O(\psi(n)).$$

Так как функции $\tau^*_n(u) = \tau_n(u) - \nu_n(u)$ непрерывны и интегралы $A(\tau^*_n)$ сходятся, то согласно лемме 2 из [6] имеем

$$\varepsilon_n = \psi(n) A(\tau^*_n) + O(\psi(n) a_n(\tau^*_n)), \quad n \to \infty, \tag{8}$$

где

$$a_n(\tau^*_n) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{|t| \geqslant 2^{-1}n\pi} \Big| \int\limits_{0}^{1} \tau^*_n(u) \cos(ut + 2^{-1}\beta\pi)\, du \Big|\, dt. \tag{9}$$

Заметим, что

$$\int\limits_{0}^{1} u(1-u)\, | d\tau'(u) - d\nu'(u) | = \int\limits_{0}^{1} u(1-u)\, | d\tau'(u) |, \tag{10}$$

$$\int\limits_{0}^{1} | \tau(u) - \nu(u) |\, u^{-1} du = \int\limits_{0}^{1} | \tau(u) |\, u^{-1} du + O(1). \tag{11}$$

Далее,

$$\int\limits_{0}^{1} | \tau(u) - \nu(u) |\, (1-u)^{-1} du = \int\limits_{0}^{1} | \lambda(u) |\, (1-u)^{-1} du + O(\gamma_n), \tag{12}$$

где

$$\gamma_n = \int\limits_{0}^{1/n} | \tau(u)\, [1 - \psi(n)/\psi(1)] |\, (1-u)^{-1} du + \int\limits_{1/n}^{1} | \tau(u)\, [1 - \psi(n)/\psi(nu)] | \times \\ \times (1-u)^{-1} du + O(1).$$

Функции $g_1(u) = [1 - \psi(n)/\psi(1)]/(1-u)$, $u \in [0; 1/n]$, $g_2(u) = [1 - \psi(n)/\psi(nu)]/(1-u)$, $u \in [1/n; \delta]$, $\delta < 1$, ограничены и, кроме того, $\lim\limits_{u \to 1} \dfrac{1 - \psi(n)/\psi(nu)}{1-u} = \dfrac{n\,|\psi'(n)|}{\psi(n)}$. Поэтому

$$\gamma_n = O(1 + \max_{0 \leqslant u \leqslant 1} | \tau_n(u) |), \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Согласно лемме 1 из работы [4]

$$\max_{0 \leqslant u \leqslant 1} | \tau_n(u) | = O\Big(\int\limits_{0}^{1} u(1-u)\, | d\tau'(u) | \Big), \quad n \to \infty. \tag{14}$$

Объединяя соотношения (12), (13) и (14), получаем

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{| \tau(u) - \nu(u) |}{1-u}\, du = \int\limits_{0}^{1} \frac{| \lambda(u) |}{1-u}\, du + O\Big(1 + \int\limits_{0}^{1} u(1-u)\, | d\tau'(u) | \Big). \tag{15}$$

Применяя для оценки величин $A(\tau^*_n)$ и $a(\tau^*_n)$ теорему 1 и лемму 2 из работы [4], на основании соотношений (8)—(11), (15) убеждаемся в справедливости теоремы 1.

Доказательство теоремы 2. Определим функции $\tau_n(u)$ посредством соотношений

$$\tau_n(u)=\begin{cases}(u-k/n)\,n\,(\tau_{n,k+1}-\tau_{n,k})+\tau_{n,k}, & k/n\leqslant u<(k+1)/n,\ k=\overline{0,n-1},\\ \psi(nu)/\psi(n), & 1\leqslant u<\infty.\end{cases}\tag{16}$$

Отсюда видно, что

$$\tau'(u)=n\,(\tau_{n,k+1}-\tau_{n,k}),\quad k/n<u<(k+1)/n,\quad k=\overline{0,n-1},\tag{17}$$

и, следовательно,

$$\int\limits_0^1 u\,(1-u)\,|\,d\tau'(u)\,|=\sum_{k=1}^{n-1}k\,(n-k)\,n^{-1}\,|\,\Delta^2\tau_{n,k-1}\,|.\tag{18}$$

Из соотношений (16), (17) следует

$$\int\limits_0^1|\,\tau(u)\,|\,u^{-1}du=\sum_{k=1}^{n-1}|\,\tau_{n,k}\,|\,k^{-1}+O\left(\sum_{k=1}^{n-1}|\,\tau_{n,k}\,|\,k^{-2}\right)+O\left(\int\limits_0^1|\,\tau'(u)\,|\,du\right).\tag{19}$$

Но $|\,\tau_{n,k}\,|\leqslant\max|\,\tau(u)\,|$, и согласно лемме 1 из [4] и равенству (18) получаем

$$\sum_{k=1}^{n-1}|\,\tau_{n,k}\,|\,k^{-2}=O\left(\sum_{k=1}^{n-1}k\,(n-k)\,n^{-1}\,|\,\Delta^2\tau_{n,k-1}\,|\right),\quad n\to\infty,\tag{20}$$

$$\int\limits_0^1|\,\tau'(u)\,|\,du=O\left(\sum_{k=1}^{n-1}k\,(n-k)\,n^{-1}\,|\,\Delta^2\tau_{n,k-1}\,|\right),\quad n\to\infty.\tag{21}$$

Объединяя соотношения (19) — (21), находим

$$\int\limits_0^1|\,\tau(u)\,|\,u^{-1}du=\sum_{k=1}^{n-1}|\,\tau_{n,k}\,|\,k^{-1}+O\left(\sum_{k=1}^{n-1}k\,(n-k)\,n^{-1}\,|\,\Delta^2\tau_{n,k-1}\,|\right).\tag{22}$$

Далее заметим, что при $k/n<u<(k+1)/n$, $k=1,2,\ldots,n-1$,

$$\lambda(u)=\lambda_{n,k+1}+O\,[(1-\lambda_{n,k+1})\,(1-\psi(k+1)/\psi(nu)]+O\,[(1-u)\,\tau'(u)].\tag{23}$$

В силу условия (3) при $k/n<u<(k+1)/n$, $k=1,2,\ldots,n-1$,

$$1-\psi(k+1)/\psi(nu)<K\,(1-u),\tag{24}$$

где K — абсолютная постоянная.

Сопоставляя соотношения (23), (24), видим, что при $k/n<u<(k+1)/n$

$$\lambda(u)=\lambda_{n,k+1}+O\,[(1-u)\,(1+|\,\lambda_{n,k+1}\,|+|\,\tau'(u)\,|)],\quad n\to\infty.\tag{25}$$

Так как при $1\leqslant k\leqslant n$, $|\,\lambda_{n,k}\,|<1+|\,\tau_{n,k}\,|$, то

$$\max|\,\lambda_{n,k}\,|\leqslant 1+\max_{0\leqslant u\leqslant 1}|\,\tau(u)\,|.\tag{26}$$

Объединяя соотношения (25) и (26), находим

$$\int\limits_0^1\frac{|\,\lambda(u)\,|}{1-u}\,du=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{|\,\lambda_{n,k}\,|}{n-k}+O\left(1+\max_{0\leqslant u\leqslant 1}|\,\tau(u)\,|+\int\limits_0^1|\,\tau'(u)\,|\,du\right).\tag{27}$$

Применяя лемму 1 из [4] и учитывая соотношение (18), из (27) получаем

$$\int\limits_0^1|\,\lambda(u)\,|\,(1-u)^{-1}du=\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_{n,k}\,(n-k)^{-1}+O\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}k\,(n-k)\,n^{-1}\,|\,\Delta^2\tau_{n,k-1}\,|\right).\tag{28}$$

На основании теоремы 1 соотношений (18), (22) и (28) убеждаемся в справедливости теоремы 2.

1. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.— Киев, 1983.— 57 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.10).
2. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и приближение их суммами Фурье.— Киев, 1983.— 57 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 86.69).
3. *Nady B.* Über gewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrichen Etnwiscklungen, 1 // Period. Fall, Berichte der math. phys.— 1938.— **90**.— P. 103—134.
4. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. I // Тр. Мат. Ин-та АН СССР.— 1961.— **62**.— С. 61—97.
5. *Nady B.* Sur une classe generale de procedes de sommation pour les Series de Fourier //Hung. Acta Math.— 1948.— **1**, N 3.— P. 14—62.
6. *Рукасов В. И.* Приближение периодических функций линейными средними их рядов Фурье.— Киев, 1983.— 55 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.62).
7. *Теляковский С. А.* О нормах тригонометрических полиномов и приближении дифференцируемых функций линейными средними их рядов Фурье. II. // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1963.— 27, № 2.— С. 253—272.

Слав. пед. ин-т

Получено 25.11.85