УДК 517.5

А. И. Степанец, А. К. Кушпель

Скорость сходимости рядов Фурье и наилучшие приближения в пространстве L_p

Пусть L_p, $1 \leqslant p < \infty$, — пространство 2π-периодических функций $f(t)$ с нормой

$$\| f(t) \|_p = \Big(\int_{-\pi}^{\pi} | f(t) |^p dt \Big)^{1/p},$$

$\mathfrak{M}$ — некоторый функциональный класс, $\mathfrak{M} \subset L_p$, $f(t)$ — суммируемая 2π-периодическая функция,

$$s[f(t)] = a_0/2 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(f) \cos kt + b_k(f) \sin kt = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; t) \tag{1}$$

— ее ряд Фурье, $S_n(f; t) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f; t)$ — сумма Фурье порядка n и

$$\rho_n(f, t) = f(t) - S_{n-1}(f, t). \tag{2}$$

Будем изучать величины

$$\mathscr{E}_n(f)_p = \| \rho_n(f, t) \|_p, \quad E_n(f)_p = \inf_{T_{n-1} \in \mathscr{T}_{2n-1}} \| f(t) - T_{n-1}(t) \|_p, \quad \mathscr{E}_n(\mathfrak{M})_p =$$

$$= \sup_{f \in \mathfrak{M}} \mathscr{E}_n(f)_p, \quad E_n(\mathfrak{M})_p = \sup_{f \in \mathfrak{M}} E_n(f)_p,$$

где $\mathscr{T}_{2n-1}$ — пространство тригонометрических полиномов $T_{n-1}(t)$ порядка $n-1$, а $\mathfrak{M}$ — классы 2π-периодических функций, которые определяются следующим образом.

Пусть $f(t) \in L_1$ и $s[f(t)]$ — ее ряд Фурье. Пусть, далее, $\psi(k)$ и $\beta(k)$ — произвольные фиксированные функции натурального аргумента. Предположим, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1/\psi(k)) (a_k(f) \cos(kt + \beta(k)) + b_k(f) \sin(kt + \beta(k)))$ является рядом Фурье некоторой суммируемой функции. Эту функцию обозначим через $f_{\beta}^{\psi}(t)$ и назовем $(\psi, \overline{\beta})$-производной функции $f(t)$, а множество функций $f(t)$, удовлетворяющих таким условиям, будем обозначать L_{β}^{ψ}. Пусть еще $\mathfrak{N}$ — некоторый класс суммируемых 2π-периодических функций. Тогда, если $f \in L^{\psi}_{\beta}$ и, кроме того, $f^{\psi}_{\beta} \in \mathfrak{N}$, то будем говорить, что функция $f(t)$ принадлежит классу $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. В настоящей работе либо $\mathfrak{N} = L_p$, либо $\mathfrak{N} = U_p \overset{\mathrm{df}}{=} \{\varphi : \varphi \in L_p,\ \|\varphi\|_p \leqslant 1\}$. При этом классы функций $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ будем обозначать через $L^{\psi}_{\beta}L_p$ и $L^{\psi}_{\beta,p}$ соответственно. Классы функций $L^{\psi}_{\beta}L_p$ и $L^{\psi}_{\beta,p}$ введены и изучались в [1 — 3].

В настоящей работе для величин $\mathscr{E}_n(\mathfrak{M})_p$ и $E_n(\mathfrak{M})_p$ находятся точные по порядку оценки. Показано, в частности, что в случае, когда $\psi(k)$ монотонно убывает, $\psi(k)/\psi(2k) \leqslant C$, $k \in \mathbb{N}$, и $\beta(k) = \beta$, $\beta \in \mathbb{R}$, выполняются неравенства

$$C^{(1)}_{p,s}\psi(n)\, n^{\alpha} \leqslant C^{(2)}_{p,s}\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \leqslant E_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \leqslant C^{(3)}_{p,s}\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,p})_s \leqslant C^{(4)}_{p,s}\psi(n)\, n^{\alpha},$$

$$1 < p, s < \infty, \tag{3}$$

где $\alpha \overset{\mathrm{df}}{=} (p^{-1} - s^{-1})_+$, $(t)_+ \overset{\mathrm{df}}{=} \begin{cases} 0, & t < 0, \\ t, & t \geqslant 0, \end{cases}$ C — некоторая постоянная, не зависящая от k, $C^{(1)}_{p,s} — C^{(4)}_{p,s}$ — величины, зависящие только от p и s.

При $\psi(k) = k^{-r}$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, множества $L^{\psi}_{\beta,p}$ переходят в классы функций, дифференцируемых в смысле Вейля — Надя. В этом случае полученные в работе результаты известны (см., например, [4, 5]).

Пусть $p = 2$. Известно, что для любой функции $f(t) \in L_2$ наилучшее приближение $E_n(f)_2$ доставляют ее частные суммы Фурье $S_{n-1}(f; t)$ порядка $n - 1$, причем

$$E^2_n(f)_2 = \| f(t) - s_{n-1}(f; t)\|^2_2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} (a^2_k(f) + b^2_k(f)). \tag{4}$$

Из определения классов функций $L^{\psi}_{\beta,p}$ следует

$$a_k(f) = \psi(k)\,(a_k(f^{\psi}_{\beta}) \cos\beta(k) - b_k(f^{\psi}_{\beta}) \sin\beta(k)), \tag{5}$$

$$b_k(f) = \psi(k)\,(a_k(f^{\psi}_{\beta}) \sin\beta(k) + b_k(f^{\psi}_{\beta}) \cos\beta(k)). \tag{5'}$$

Равенства (4), (5) и (5′) показывают, что

$$E^2_n(f)_2 = \pi \sum_{k=n}^{\infty} \psi^2(k)\,(a^2_k(f^{\psi}_{\beta}) + b^2_k(f^{\psi}_{\beta})) \leqslant \pi\,(\sup_{k \geqslant n} \psi^2(n)) \sum_{k=n}^{\infty} (a^2_k(f^{\psi}_{\beta}) + b^2_k(f^{\psi}_{\beta})) \leqslant$$

$$\leqslant (\sup_{k \geqslant n} \psi^2(k))\, \| f^{\psi}_{\beta} \|^2_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \nu^2(n)\, \| f^{\psi}_{\beta} \|^2_2. \tag{6}$$

Если $f \in L^{\psi}_{\beta,2}$, то $\| f^{\psi}_{\beta} \|^2_2 \leqslant 1$ и из соотношения (6) находим

$$E_n(f)_2 = \mathscr{E}_n(f)_2 \leqslant \nu(n)\, \mathscr{E}_n(f^{\psi}_{\beta})_2 = \nu(n)\, E_n(f^{\psi}_{\beta})_2, \tag{7}$$

$$E_n(L^{\psi}_{\beta,2})_2 = \mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,2})_2 \leqslant \nu(n). \tag{7'}$$

Оценки (7) и (7′) получены в случае $f \in L_2$, но из соотношений (5) и (5′) следует, что $f \in L_2$ при $\nu(n) < \infty$. Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\nu(n) < \infty$ *и* $f^{\psi}_{\beta} \in L_2$. *Тогда*

$$E_n(f)_2 = \mathscr{E}_n(f)_2 \leqslant \nu(n)\, \mathscr{E}_n(f^{\psi}_{\beta})_2 = \nu(n)\, E_n(f^{\psi}_{\beta})_2. \tag{8}$$

Покажем теперь, что на всем классе $L^{\psi}_{\beta,2}$ нельзя улучшить оценку (8). Предположим сначала, что функция $\psi(k)$ такова, что $\forall n \in \mathbb{N}$ найдется такое число $k_n \in \mathbb{N}$, что

$$\nu(n) = \sup_{k \geqslant n} |\psi(k)| = |\psi(k_n)|. \tag{9}$$

Положим $f_n(t)=\pi^{-1/2}\psi(k_n)\sin(k_nt-\beta(k_n))$. Функция $f_n(t)$ принадлежит $L^{\psi}_{\beta,2}$. В самом деле, ее $(\psi,\bar\beta)$-производная имеет вид $(f_n(t))^{\psi}_{\bar\beta}=\pi^{-1/2}\sin k_nt$, откуда сразу следует $\|(f_n(t))^{\psi}_{\bar\beta}\|_2=1$. Для этой функции имеем

$$\mathscr{E}_n(f_n)_2=\|f_n\|_2=\pi^{1/2}|\psi(k_n)|\,\|\sin(k_nt-\beta(k))\|_2=|\psi(k_n)|=\nu(n). \tag{10}$$

Если теперь для функции $\psi(k)$ и некоторого числа $n\in\mathbb{N}$ не найдется такое k_n, что выполняется (9), то вследствие ограниченности множества $\{|\psi(k)|\}$ существует последовательность n_j, $j\in\mathbb{N}$, такая, что $n_j\geqslant n$ и числа $|\psi(n_j)|$, не убывая, стремятся к $\nu(n)$. Положим $f_{n_j}(t)=\pi^{-1/2}\psi(n_j)\sin(n_jt-$ $-\beta(n_j))$ и рассмотрим множество $\Phi_n\overset{\mathrm{df}}{=}\bigcup\limits_j f_{n_j}(\cdot)$. Нетрудно проверить, что $f_{n_j}\in\Phi_n\subset L^{\psi}_{\beta,2}$ и $\mathscr{E}_n(f_{n_j})_2=|\psi(n_j)|$. Таким образом, и в этом случае

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,2})_2=E_n(L^{\psi}_{\beta,2})_2\geqslant\sup_{f\in\Phi_n}\mathscr{E}_n(f)_2=\sup_{j\in\mathbb{N}}|\psi(n_j)|=\nu(n). \tag{11}$$

Сопоставление теоремы 1, а также соотношений (10) и (11) доказывает справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть $\psi(k)$ и $\beta(k)$ — произвольные последовательности, причем $\sup\limits_{k\geqslant n}|\psi(k)|=\nu(n)<\infty$. Тогда $\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,2})_2=E_n(L^{\psi}_{\beta,2})_2=\nu(n)$.*

Если $|\psi(k)|$, $k\in\mathbb{N}$, не возрастает, то $\nu(n)=|\psi(n)|$. Поэтому из теоремы 2 получаем такое следствие.

Следствие 1. *Пусть $\psi(k)$ и $\beta(k)$ — произвольные последовательности, причем $|\psi(k)|$, $k\in\mathbb{N}$, не возрастает. Тогда*

$$\mathscr{E}_n(L^{\psi}_{\beta,2})_2=E_n(L^{\psi}_{\beta,2})_2=|\psi(n)|. \tag{12}$$

Если $\psi(k)=k^{-r}$, $r>0$, и $\beta(k)=\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$, то вместо $L^{\psi}_{\beta,2}$ будем писать $W^{r}_{\beta,2}$. В этом случае равенство (12) принимает вид $\mathscr{E}_n(W^r_{\beta,2})_2=n^{-r}$ и является известным (см., например, [4]).

Рассмотрим теперь величины $\mathscr{E}_n(f)_p$, $E_n(f)$, $\mathscr{E}_n(\mathfrak{M})_p$, $E_n(\mathfrak{M})_p$, где $1<p<\infty$, $\mathfrak{M}\subset L_p$. Сформулируем вначале вспомогательные результаты, которые потребуются в дальнейшем.

Пусть функция f принадлежит пространству L_p и имеет ряд Фурье $s[f]=\sum\limits_{k=0}^{\infty}A_k(f,t)$. Пусть также $\mu(k)$, $k\in\mathbb{N}$, — произвольная фиксированная последовательность действительных чисел. Если для любой функции $f\in L_p$ ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\mu(k)A_k(f,t)$ является рядом Фурье некоторой функции φ из пространства L_s, то оператор Λ, действующий по формуле $\Lambda f=\varphi$, будем называть мультипликатором типа (p,s) и писать $\Lambda\in\mathcal{M}_{p,s}$.

Теорема Марцинкевича [6] утверждает, что если последовательность $\mu(k)$ удовлетворяет условиям

$$\lambda=\lambda(\mu)\overset{\mathrm{df}}{=}\max\left\{\sup_k|\mu(k)|,\sup_k\sum_{m=2^k}^{m=2^{k+1}}|\mu(m)-\mu(m+1)|\right\}<\infty, \tag{13}$$

то оператор Λ отображает пространство L_p в L_p, $1<p<\infty$, и для его нормы справедлива оценка

$$\|\Lambda\|_p\overset{\mathrm{df}}{=}\{\sup\|\Lambda f\|_p,\|f\|_p\leqslant1\}\leqslant C_p\lambda, \tag{14}$$

где C_p — постоянная, зависящая только от p.

Рассмотрим мультипликатор Λ, задающийся последовательностью $\mu_n(k)=\begin{cases}1, & k<n,\\ 0, & k\geqslant n.\end{cases}$ Ясно, что $\lambda(\mu_n)=1$, $\Lambda f(\cdot)=S_{n-1}(f,\cdot)$. Поэтому из

теоремы Марцинкевича следует, что $\| \Lambda \|_p = \| S_{n-1} \|_p \leqslant C_p$. Учитывая это неравенство и обозначая через $T_{n-1}(f, \cdot)$ полином наилучшего приближения функции $f(\cdot)$ в пространстве L_p, будем иметь

$$E_n(f)_p \leqslant \mathscr{E}_n(f)_p = \| f(\cdot) - T_{n-1}(f, \cdot) - S_{n-1}(f - T_{n-1}, \cdot) \|_p \leqslant$$

$$\leqslant \| f(\cdot) - T_{n-1}(f, \cdot) \|_p + \| S_{n-1}(f - T_{n-1}, \cdot) \|_p \leqslant E_n(f)_p (1 + \| S_{n-1} \|_p) \leqslant$$

$$\leqslant C_p E_n(f)_p. \tag{15}$$

Соотношение (15) показывает, что $\forall f \in L_p$

$$\mathscr{E}_n(f)_p = O(1) E_n(f)_p, \tag{16}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по $n \in \mathbb{N}$.

Значит, если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из L_p, $1 < p < \infty$, то $\mathscr{E}_n(\mathfrak{N})_p = E_n(\mathfrak{N})_p O(1)$.

Нам понадобится еще теорема М. Рисса [7], утверждающая, что норма оператора U, действующего из L_p в L_p по формуле $f \to \tilde{f}$, где $\tilde{f}$ — функция, тригонометрически сопряженная функции f, ограничена, т. е. $\| U \|_p \leqslant C_p$.

Будем также пользоваться известным утверждением Харди и Литлвуда [7]. Приведем его формулировку.

Пусть $1 < p < s < \infty$, $\alpha = p^{-1} - s^{-1}$ и $\mathscr{D}_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha} \cos kt$. Тогда $\forall \varphi \in L_p$ свертка $\Phi_\alpha(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x + t) \mathscr{D}_\alpha(t)\, dt$ принадлежит к L_s, причем $\| \Phi_\alpha(x) \|_s \leqslant C_{p,s} \| \varphi \|_p$, где $C_{p,s}$ — постоянная, зависящая только от p и s.

Отметим, что операция свертки функции $\varphi(\cdot)$ с $\mathscr{D}_\alpha(\cdot)$ эквивалентна действию мультипликатора $M^{(\alpha)}$, который определяется последовательностью $0, 1^{-\alpha}, 2^{-\alpha}, \ldots$ и в силу теоремы Харди и Литлвуда принадлежит $\mathscr{M}_{p,s}$.

Ниже будем рассматривать приближения по норме пространства L_s функций $f(\cdot)$ из множеств $L^{\psi}_{\bar\beta,p}$ при условии $1 < p, s < \infty$. Число s может быть как равным, так и большим или меньшим p. Поэтому необходимо еще решить вопрос: в каких случаях из включения $f \in L^{\psi}_{\bar\beta} L_p$ следует, что $f \in L_s$? Понятно, что если числа p и s считать фиксированными, то это полностью зависит от пары $(\psi, \bar\beta)$. В связи с этим нам понадобится следующее определение.

При фиксированном $\alpha \geqslant 0$ будем говорить, что пара $(\psi, \bar\beta)$ последовательностей $\psi(k)$ и $\bar\beta(k) = \beta(1), \beta(2), \ldots$ принадлежит множеству P_α, если величины $\nu_\alpha(\psi) = \sup_k |\psi(k)| k^\alpha$ и $\sigma_\alpha(\psi) = \sigma_\alpha(\psi, \bar\beta, \gamma) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi(k+1) \times (k+1)^\alpha \cos(\beta(k+1) + \gamma) - \psi(k) k^\alpha \cos(\beta(k) + \gamma)|$, где γ равно либо 0, либо $\pi/2$, являются конечными. Условие конечности величины $\nu_\alpha(\psi)$, с точки зрения его проверки, достаточно простое. Величина $\sigma_\alpha(\psi)$ в этом отношении сложнее. Однако если несколько сузить общность и считать, что $\beta(k)$ составлена из одних значений β, т. е. $\beta(k) = \beta$ $\forall k \in \mathbb{N}$, то будем иметь

$$\sigma_\alpha(\psi) = \cos(\beta + \gamma) \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi(k+1)(k+1)^\alpha - \psi(k) k^\alpha|.$$

Отсюда видно, что эта величина конечна, к примеру, когда числа $\psi(k) k^\alpha$ не возрастают. Рассмотрим сначала случай $p = s$.

Теорема 3. *Пусть* $(\psi, \bar\beta) \in P_0$ *и* $1 < p < \infty$. *Тогда* $L^{\psi}_{\bar\beta,p} \subset L_p$.

Доказательство. Полагая $\tilde{\mathcal{A}}_k(\varphi;\ t) = a_k(\varphi)\sin kt - b_k(\varphi)\cos kt$ и принимая во внимание равенства (5) и (5′) $\forall f \in L^{\psi}_{\overline{\beta},p}$, будем иметь

$$s[f(t)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k(f;t) = a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} (\psi(k)\cos\beta(k)\,\mathcal{A}_k(f^{\psi}_{\overline{\beta}};t) +$$

$$+ \psi(k)\sin\beta(k)\,\tilde{\mathcal{A}}_k(f^{\psi}_{\overline{\beta}};t)) = a_0(f)/2 + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k\mathcal{A}_k(f^{\psi}_{\overline{\beta}};t) + \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(k)\,\tilde{\mathcal{A}}_k(f^{\psi}_{\overline{\beta}};t) =$$

$$= a_0(f)/2 + Mf^{\psi}_{\overline{\beta}}(t) + \tilde{M}Uf^{\psi}_{\overline{\beta}}(t), \tag{17}$$

где U — оператор сопряжения, $U\varphi = \tilde{\varphi}$, M и $\tilde{M}$ — мультипликаторы, задающиеся последовательностями

$$\mu(k) = \psi(k)\cos\beta(k), \quad \tilde{\mu}(k) = \psi(k)\sin\beta(k), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{18}$$

Из условия $(\psi, \overline{\beta}) \in P_0$ и теоремы Марцинкевича следует, что мультипликаторы M и $\tilde{M}$ действуют из L_p в L_p. Из условия $f \in L^{\psi}_{\overline{\beta}}L_p$ следует $f^{\psi}_{\overline{\beta}} \in L_p$, значит, согласно теореме М. Рисса и $Uf^{\psi}_{\overline{\beta}} \in L_p$. Поэтому

$$\|f\|_p = \|a_0(f)/2 + Mf^{\psi}_{\overline{\beta}} + \tilde{M}Uf^{\psi}_{\overline{\beta}}\|_p \leqslant \|a_0(f)/2\|_p + (\|M\|_p + \|\tilde{M}\|_p\|U\|_p) \times$$
$$\times \|f^{\psi}_{\overline{\beta}}\|_p \leqslant C_p, \tag{19}$$

т. е. $f \in L_p$.

Если $f \in L_p$ и $1 < s \leqslant p < \infty$, то в силу неравенства Гельдера $\|f\|_s \leqslant (2\pi)^{(p-s)/ps}\|f\|_p$. С учетом этого из соотношения (19) получаем следующее утверждение.

Следствие 2. *Пусть* $(\psi, \overline{\beta}) \in P_0$ *и* $1 < s \leqslant p < \infty$. *Тогда* $L^{\psi}_{\overline{\beta},p} \subset L_s$.

Рассмотрим теперь случай, когда $1 < p < s < \infty$.

Теорема 4. *Пусть* $1 < p < s < \infty$, $\alpha = p^{-1} - s^{-1}$ *и* $(\psi, \overline{\beta}) \in P_\alpha$. *Тогда* $L^{\psi}_{\overline{\beta},p} \subset L_s$.

Доказательство. Обозначим через $(MM^{(-\alpha)})$ и $(\tilde{M}M^{(-\alpha)})$ мультипликаторы, порождаемые последовательностями $k^\alpha\mu(k)$ и $k^\alpha\tilde{\mu}(k)$, где $\mu(k)$ и $\tilde{\mu}(k)$ — функции из (18). Тогда $\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\,\mathcal{A}_k(f^{\psi}_{\overline{\beta}};x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha\mu(k)\,(k^{-\alpha}\mathcal{A}_k(f^{\psi}_{\overline{\beta}};x)) =$

$= (MM^{(-\alpha)})\sum_{k=1}^{\infty} k^{-\alpha}\mathcal{A}_k(f^{\psi}_{\overline{\beta}};x) = (MM^{(-\alpha)})\,s\Big[\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\overline{\beta}}(x+t)\,\mathcal{D}_\alpha(t)\,dt\Big]$. По теореме Харди и Литлвуда последний ряд есть ряд функции из L_s, а так как $(\psi, \overline{\beta}) \in P_\alpha$, вследствие теоремы Марцинкевича мультипликатор $(MM^{(-\alpha)})$ действует из L_s в L_s. Поэтому

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\mu(k)\,\mathcal{A}_k(f^{\psi}_{\overline{\beta}};x)\Big\|_s = \Big\|(MM^{(-\alpha)})\,s\Big[\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\overline{\beta}}(x+t)\,\mathcal{D}_\alpha(t)\,dt\Big]\Big\|_s \leqslant C_{p,s}, \tag{20}$$

где $C_{p,s}$ — постоянная, зависящая только от p и s. Аналогично получаем $\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\mu}(k)\,\tilde{\mathcal{A}}_k(f^{\psi}_{\overline{\beta}};\ x) = (MM^{(-\alpha)})\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha\tilde{\mathcal{A}}_k(f^{\psi}_{\overline{\beta}};\ x) = (MM^{(-\alpha)})\,s\Big[\int_{-\pi}^{\pi} f^{\psi}_{\overline{\beta}}(x+t) \times$ $\times\,\mathcal{D}_\alpha(t)\,dt\Big]$ и

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{\mu}(k)\,\tilde{\mathcal{A}}_k(f^{\psi}_{\overline{\beta}};x)\Big\|_s \leqslant C_{p,s}. \tag{21}$$

Сопоставляя соотношения (20) и (21), убеждаемся в справедливости теоремы.

Получим теперь порядковые оценки величин $\mathcal{E}_n(f)_s$ и $E_n(f)_s$ для функций $f \in L^{\psi}_{\overline{\beta}}L_p$, когда $1 < p, s < \infty$, а пары $(\psi, \overline{\beta})$ берутся из множеств P_α,

$\alpha=p^{-1}-s^{-1}$, и подчинены еще некоторым дополнительным условиям. Приведем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть* $1<p, s<\infty$, *и* $M_n^{(\alpha)}, \tilde{M}_n^{(\alpha)}$ — *мультипликаторы, задающиеся соответственно последовательностями*

$$\mu_n^{(\alpha)}=\mu_n^{(\alpha)}(k)=\begin{cases}0, & k<n;\\ k^\alpha\psi(k)\cos\beta(k), & k\geqslant n,\end{cases}$$

$$\tilde{\mu}_n^{(\alpha)}=\tilde{\mu}_n^{(\alpha)}(k)=\begin{cases}0, & k<n;\\ k^\alpha\psi(k)\sin\beta(k), & k\geqslant n,\end{cases}$$

при любом $n\in\mathbb{N}$ *действуют из* L_s *в* L_s. *Тогда если* $f\in L^\psi_\beta L_p$, *то* $\forall n\in\mathbb{N}$ $E_n(f)_s\leqslant\mathscr{E}_n(f)_s\leqslant K^{(n)}_{p,s}\mathscr{E}_n(f)_p\leqslant C_pK^{(n)}_{p,s}E_n(f^\psi_\beta)_s$ *где* $K^{(n)}_{p,s}\leqslant C_{p,s}(\|M_n^{(\alpha)}\|_s+\|\tilde{M}_n^{(\alpha)}\|_s\|U\|_s)$, U — *оператор сопряжения*, $U\varphi=\tilde{\varphi}$, C_p *и* $C_{p,s}$ — *постоянные, зависящие только от* p *и* s *соответственно.*

Доказательство. Принимая во внимание (17), находим

$$E_n(f)_s\leqslant\|f(x)-s_{n-1}(f;x)\|_s=\Big\|\sum_{k=n}^\infty\mathscr{A}_k(f;x)\|_s\leqslant\Big\|\sum_{k=n}^\infty\mu(k)\mathscr{A}_k(f^\psi_\beta;x)\Big\|_s+$$

$$+\Big\|\sum_{k=n}^\infty\tilde{\mu}(k)\mathscr{A}_k(f^\psi_\beta;x)\Big\|_s. \tag{22}$$

Здесь $\mu(k)$ и $\tilde{\mu}(k)$ — последовательности из (18). Пусть сначала $s>p$. Тогда $\sum_{k=n}^\infty\mu(k)\mathscr{A}_k(f^\psi_\beta;x)=(MM^{(-\alpha)})\,s\Big[\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(f^\psi_\beta;x+t)\mathscr{D}_\alpha(t)\,dt\Big]$. Вместо оператора $(MM^{(-\alpha)})$ можно поставить мультипликатор $M_n^{(\alpha)}$. Значит, в силу теоремы Харди и Литлвуда

$$\Big\|\sum_{k=n}^\infty\mu(k)\mathscr{A}_k(f^\psi_\beta;x)\Big\|_s\leqslant\|M_n^{(\alpha)}\|_s\Big\|\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(f^\psi_\beta;x+t)\mathscr{D}_\alpha(t)\,dt\Big\|_s\leqslant$$

$$\leqslant C_{p,s}\|M_n^{(\alpha)}\|_s\|\rho_n(f^\psi_\beta;x)\|_p. \tag{23}$$

Рассуждая таким же образом и учитывая теорему Рисса, находим

$$\Big\|\sum_{k=n}^\infty\tilde{\mu}(k)\mathscr{A}_k(f^\psi_\beta;x)\Big\|_s=\Big\|\tilde{M}_n^{(\alpha)}U\int_{-\pi}^{\pi}\rho_n(f^\psi_\beta;x+t)\mathscr{D}_\alpha(t)\,dt\Big\|_s\leqslant$$

$$\leqslant C_{p,s}\|\tilde{M}_n^{(\alpha)}\|_s\|U\|_s\|\rho_n(f^\psi_\beta;x)\|_p. \tag{24}$$

Сопоставляя соотношения (15), (22), (23) и (24), убеждаемся в справедливости леммы в случае $s>p$. Если $p\geqslant s$, то $\alpha=0$, и тогда при $k\geqslant n$ $\mu_n^{(\alpha)}(k)=\mu_n^{(0)}(k)=\mu(k)$. Поэтому

$$\Big\|\sum_{k=n}^\infty\mu(k)\mathscr{A}_k(f^\psi_\beta;x)\Big\|_s=\|M_n^{(0)}\rho_n(f^\psi_\beta;x)\|_s\leqslant\|M_n^{(0)}\|_s\|\rho_n(f^\psi_\beta;x)\|_s. \tag{25}$$

Аналогично, с учетом теоремы Рисса, имеем

$$\Big\|\sum_{k=n}^\infty\tilde{\mu}(k)\tilde{\mathscr{A}}_k(f^\psi_\beta;x)\Big\|_s\leqslant\|M_n^{(0)}\|_s\|U\|_s\|\rho_n(f^\psi_\beta;x)\|_s. \tag{26}$$

Сопоставляя соотношения (22), (25) и (26), находим $E_n(f)_s\leqslant\|\rho_n(f;x)\|_s\leqslant$ $\leqslant(\|M_n^{(0)}\|_s+\|\tilde{M}_n^{(0)}\|_s\|U\|_s)\|\rho_n(f^\psi_\beta;x)\|_s$. Если теперь $p=s$, то для доказательства леммы достаточно применить оценку (15). Если же $p>s$, то предварительно следует еще воспользоваться неравенством Гельдера $\|f\|_s\leqslant$ $\leqslant(2\pi)^{(p-s)/ps}\|f\|_p$.

При каждом фиксированном $\alpha \geqslant 0$ через $P_{\alpha}^{(n)}$ обозначим подмножество пар $(\psi, \bar{\beta})$ из P_α, для которых при любом натуральном n выполняются условия

$$\nu_\alpha(\psi_n) = \sup_k |\psi_n(k)| k^\alpha \leqslant C_1 \nu(n) n^\alpha < \infty, \tag{27}$$

$$\sigma_\alpha(\psi_n) = \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi_n(k+1)(k+1)^\alpha \cos((\beta+1)+\gamma) -$$

$$- \psi_n(k) k^\alpha \cos(\beta(k)+\gamma)| \leqslant C_2 \nu(n) n^\alpha < \infty, \tag{28}$$

где $\psi_n(k) = \begin{cases} 0, & k < n, \\ \psi(k), & k \geqslant n, \end{cases}$ $\nu(n) = \nu(\psi; n) = \sup\limits_{k \geqslant n} |\psi(k)|$, C_1 и C_2 — постоянные, не зависящие от n.

Лемма 2. *Если $(\psi, \bar{\beta}) \in P_\alpha^{(n)}$, то мультипликаторы $M_n^{(\alpha)}$ и $\tilde{M}_n^{(\alpha)}$ принадлежат $\mathcal{M}_{p,p}$ при любом $p \in (1, \infty)$, причем*

$$\| M_n^{(\alpha)} \|_p \leqslant C_{p,\alpha} \nu(n) n^\alpha, \quad \| \tilde{M}_n^{(\alpha)} \|_p \leqslant C_{p,\alpha} \nu(n) n^\alpha, \tag{29}$$

где $C_{p,\alpha}$ — постоянная, зависящая только от p и α.

Доказательство. Согласно (27) и (28)

$$\nu_0(\mu_n^{(\alpha)}) = \sup_k |\mu_n^{(\alpha)}(k)| = \sup_{k \geqslant n} |\psi(k)| k^\alpha |\cos\beta(k)| \leqslant C_1 \nu(n) n^\alpha, \quad \sigma_0(\mu_n^{(\alpha)}) =$$

$$= \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi_n(k+1)(k+1)^\alpha \cos\beta(k+1) - \psi_n(k) k^\alpha \cos\beta(k)| \leqslant C_2 \nu(n) n^\alpha.$$

Значит, по теореме Марцинкевича $M_n^{(\alpha)}$ является мультипликатором, действующим из L_p в L_p, $1 < p < \infty$, а поскольку в рассматриваемом случае $\lambda = \lambda(\mu_n^{(\alpha)}) < K \nu(n) n^\alpha$, то первое из неравенств (29) также следует из теоремы Марцинкевича. Понятно, что такие же рассуждения справедливы и для оператора $\tilde{M}_n^{(\alpha)}$.

Объединяя утверждения лемм 1 и 2, приходим к следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть $1 < p, s < \infty$, $\alpha = (p^{-1} - s^{-1})_+$ и $(\psi, \bar{\beta}) \in P_\alpha^{(n)}$. Тогда если $f \in L_{\bar{\beta},p}^{\psi}$, то $\forall n \in \mathbb{N}$ $E_n(f)_s \leqslant \| \rho_n(f, x) \|_s \leqslant C_{p,s}^{(1)} \nu(n) n^\alpha \| \rho_n(f_{\bar{\beta}}^{\psi}; x) \|_p \leqslant \leqslant C_{p,s}^{(2)} \nu(n) n^\alpha E_n(f_{\bar{\beta}}^{\psi})_p$, где $C_{p,s}^{(1)}$ и $C_{p,s}^{(2)}$ — постоянные, не зависящие ни от n, ни от f.*

Отметим еще один частный случай этой теоремы. Если числа $\psi(k) k^\alpha$, $\alpha \geqslant 0$, не возрастают, а последовательность $\bar{\beta}(k)$ состоит из одних значений β, то пара $(\psi, \bar{\beta})$ принадлежит $P_n^{(\alpha)}$, причем для нее

$$\nu_\alpha(\psi_n) = \nu(n) n^\alpha = \psi(n) n^\alpha \tag{30}$$

и

$$\sigma_\alpha(\psi_n) = |\cos(\beta+\gamma)| \sup_{m \in \mathbb{N}} \sum_{k=2^m}^{2^{m+1}} |\psi_n(k+1)(k+1)^\alpha - \psi_n(k) k^\alpha| \leqslant 2\psi(n) n^\alpha. \tag{31}$$

Из соотношений (30) и (31) следует, что в этом случае в теореме 5 вместо $\nu(n)$ будет $\psi(n)$ и мы приходим к такому утверждению.

Теорема 5′. *Пусть $1 < p, s < \infty$, $\alpha = (p^{-1} - s^{-1})_+$ и последовательность $\psi(k) k^\alpha$, $k \in \mathbb{N}$, не возрастает. Тогда если $f \in L_\beta^\psi L_p$, то $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$E_n(f)_s \leqslant \| \rho_n(f; x) \|_s \leqslant C_{p,s}^{(1)} \psi(n) n^\alpha \| \rho_n(f_{\bar{\beta}}^{\psi}; x) \|_p \leqslant C_{p,s}^{(2)} \psi(n) n^\alpha E_n(f_{\bar{\beta}}^{\psi})_p,$$

где $C_{p,s}^{(1)}$ и $C_{p,s}^{(2)}$ — постоянные, которые не зависят ни от n, ни от f.

Если $f \in L_{\bar{\beta},p}^{\psi}$, то $f_{\bar{\beta}}^{\psi} \in S_p = \{\varphi : \| \varphi \|_p \leqslant 1, \ \varphi \perp 1\}$ и $E_n(f_{\bar{\beta}}^{\psi})_p \leqslant \| f_{\bar{\beta}}^{\psi}(x) - 0 \|_p = \| f_{\bar{\beta}}^{\psi}(x) \|_p \leqslant 1$.

Поэтому из теоремы 5 получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $1 < p, s < \infty$, $\alpha = (p^{-1} - s^{-1})_+$ и $(\psi, \bar{\beta}) \in P_\alpha$. *Тогда* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E_n (L^{\psi}_{\bar{\beta},p})_s \leqslant \mathscr{E}_n (L^{\psi}_{\bar{\beta},p})_s \leqslant C_{p,s} \nu(n) n^{\alpha}. \tag{32}$$

В частности, если последовательность $\psi(k) k^{\alpha}$ *не возрастает и* $\beta(k) \equiv \beta$, *то*

$$E_n (L^{\psi}_{\bar{\beta},p})_s \leqslant \mathscr{E}_n (L^{\psi}_{\bar{\beta},p})_s \leqslant C_{p,s} \psi(n) n^{\alpha}, \tag{32'}$$

где $C_{p,s}$ — *постоянная, зависящая только от* p *и* s.

Покажем теперь, что если $\alpha = 0$, а также для произвольного α, но при условии, что функция $\psi(k)$ не слишком быстро убывает, оценки (32) и (32') точны по порядку. Пусть сначала $p = s$ и, значит, $(\psi, \bar{\beta}) \in P_0^{(n)}$. Убедимся, что в этом случае

$$E_n (L^{\psi}_{\bar{\beta},p})_s \geqslant C_p \nu(n), \tag{33}$$

где C_p — постоянная, зависящая только от p. Для этого практически достаточно повторить рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1. В самом деле, пусть для данной функции $\psi(k)$ и числа n найдется число k_n такое, что выполняется (9). Тогда рассмотрим функцию

$$f_n(x) = a^{-1} \psi(k_n) \sin(k_n x - \beta(k_n)), \quad a = \|\sin t\|_p. \tag{34}$$

Поскольку $\| f_n(x)^{\psi}_{\bar{\beta}} \|_p = a^{-1} \| \sin(k_n x) \|_p = 1$, то $f_n \in L^{\psi}_{\bar{\beta},p}$. Далее, $\|\rho_n(f_n; x)\|_p = \| f_n(x) \|_p = a^{-1} |\psi(k_n)| \, \| \sin(k_n x - \beta(k_n)) \|_p = \nu(n)$. Поэтому

$$\mathscr{E}_n (L^{\psi}_{\bar{\beta},p})_p \geqslant \| \rho_n(f_n; x) \|_p \geqslant \nu(n). \tag{35}$$

Отсюда, приняв во внимание соотношение (16), получаем (33).

Если же для функции $\psi(k)$ и числа n нет такого k_n, что выполнено (9), то найдется последовательность n_j, $j \in \mathbb{N}$, такая, что $n_j \geqslant n$ и числа $\psi(n_j)$, не убывая, стремятся к $\nu(n)$. Полагая $f_{n_j}(x) = a^{-1} \psi(n_j) \sin(n_j x - \beta(n_j))$ и обозначая через Φ_n множество, состоящее из всех функций $f_{n_j}(x)$, $j = 1, 2, \ldots$, убеждаемся, что $\forall j \in \mathbb{N}\; f_{n_j} \in L^{\psi}_{\bar{\beta},p}$. Таким образом, $\Phi_n \subset L^{\psi}_{\bar{\beta},p}$ и так как $\| \rho_n(f_{n_j}; x) \|_p = |\psi(n_j)|$, то $\mathscr{E}_n (L^{\psi}_{\bar{\beta},p})_p \geqslant \sup\limits_{f \in \Phi_n} \| \rho_n(f, x) \|_p = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} |\psi(n_j)| = \nu(n)$, т. е. и в этом случае выполняется неравенство (35), а следовательно, и (33). Чтобы убедиться в неулучшаемости по порядку неравенств (32) и (32') при $s < p$, надо показать, что

$$E_n (L^{\psi}_{\bar{\beta},p})_s \geqslant C_{p,s} \nu(n) \;\; \forall (\psi, \bar{\beta}) \in P_0^{(n)}, \tag{36}$$

где $C_{p,s}$ — постоянная, зависящая только от p и s. Пусть числа k_n и n_j имеют тот же смысл, что и в формуле (9). Тогда положим $f_n(x) = b^{-1} \psi(k_n) \times \sin(k_n x - \beta(k))$, $f_{n_j}(x) = b^{-1} \psi(n_j) \sin(n_j x - \beta(k))$, $b = (2\pi)^{(p-s)/ps} \| \sin t \|_p$. Вследствие неравенства Гельдера $\| f \|_s \leqslant (2\pi)^{(p-s)/ps} \| f \|_p$, функции $f_{n_j}(x)$ принадлежат $L^{\psi}_{\bar{\beta},p}$ и, кроме того, $\| \rho_n(f_n, x) \|_s = b^{-1} \nu(n) \| \sin x \|_s$, $\| \rho_n(f_{n_j}; x) \|_s = b^{-1} |\psi(n_j)| \, \| \sin t \|_s$. Поэтому, повторяя рассуждения, проведенные при $p = s$, находим (36).

Подытоживая доказанное, получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть* $1 < s \leqslant p < \infty$ *и* $(\psi, \bar{\beta}) \in P_0^{(n)}$. Тогда $\forall n \in \mathbb{N}$

$$C^{(1)}_{p,s} \nu(n) \leqslant E_n (L^{\psi}_{\bar{\beta},p})_s \leqslant \mathscr{E}_n (L^{\psi}_{\bar{\beta},p})_s \leqslant C^{(2)}_{p,s} \nu(n). \tag{37}$$

В частности, если последовательность $\psi(k)$ *не возрастает, то*

$$C^{(1)}_{p,s} \psi(n) \leqslant E_n (L^{\psi}_{\bar{\beta},p})_s \leqslant \mathscr{E}_n (L^{\psi}_{\bar{\beta},p})_s \leqslant C^{(2)}_{p,s} \psi(n), \tag{37'}$$

где $C^{(1)}_{p,s}$ *и* $C^{(2)}_{p,s}$ — *постоянные, которые могут зависеть только от* p *и* s.

Теперь выделим одно множество пар $(\psi, \bar{\beta})$, для которых оценки (32) и (32′) будут точны по порядку для любого $\alpha > 0$. Это множество будем обозначать через $P_{0,c}$ и к нему отнесем всякую пару $(\psi, \bar{\beta})$, если $\forall n \in \mathbb{N}$ найдется постоянная, не зависящая от K, такая, что

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant 2n} \nu(n)/|\psi(k)| \leqslant K, \tag{38}$$

и, кроме того, выполняются неравенства

$$\sup_q \sum_{k=2^q}^{2^{q+1}} |h(k+1) - h(k)| < K, \quad \sup_q \sum_{k=2^q}^{2^{q+1}} |\tilde{h}(k+1) - h(k)| \leqslant K, \quad q \in \mathbb{N}, \tag{39}$$

где

$$h(k) = h(k, n) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant k \leqslant n-1, \quad k > 2n, \\ (\nu(n)/\psi(k)) \cos \beta(k), & n \leqslant k \leqslant 2n, \end{cases} \tag{40}$$

а $\tilde{h}(k)$ — последовательность, отличающаяся от $h(k)$ тем, что в ней множитель $\cos \beta(k)$ заменен на $\sin \beta(k)$.

Пусть $(\psi, \bar{\beta}) \in P_{\alpha}^{(n)} \cap P_{0,s}$. Покажем, что в этом случае $\forall n \in \mathbb{N}$ в классе $L_{\bar{\beta},p}^{\psi}$ найдется функция $f^*(t)$, для которой

$$E_n(f^*)_s \geqslant C_{p,s} \nu(n) n^{\alpha}, \ \alpha = p^{-1} - s^{-1}, \quad \alpha > 0. \tag{41}$$

С этой целью при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим функцию

$$f_n(t) = \nu(n)\, d_{2n}(t), \ d_{2n}(t) = \sum_{k=n}^{2n} \cos kt \tag{42}$$

и найдем ее $(\psi, \bar{\beta})$-производную:

$$(f_n(t))_{\bar{\beta}}^{\psi} = \nu(n) \sum_{k=n}^{2n} (1/\psi(k)) \cos(kt + \beta(k)) = (H_n - \tilde{H}_n U)\, d_{2n}(t). \tag{43}$$

Здесь H_n и $\tilde{H}_n$ — мультипликаторы, порождающиеся соответственно последовательностями $h(k)$ и $\tilde{h}(k)$, а U, как обычно, — оператор сопряжения. В силу условий (38) и (39), а также теорем Марцинкевича и Рисса заключаем, что $\forall p \in (1, \infty)$

$$\| H_n - \tilde{H}_n U \|_p \leqslant C_p, \tag{44}$$

где C_p — постоянная, зависящая только от p. Поэтому из (43) получим

$$\| (f_n(\cdot))_{\bar{\beta}}^{\psi} \|_p \leqslant C_p \| d_{2n}(\cdot) \|_p. \tag{45}$$

Далее потребуется следующее предложение.

Лемма 3. *Пусть n, $q \in \mathbb{N}$ и $p \in (1, \infty)$. Тогда*

$$C_p^{(1)} (q-n)^{(p-1)/p} \leqslant \left\| \sum_{k=n}^{q} \cos kt \right\|_p \leqslant C_p^{(2)} (q-n)^{(p-1)/p}, \tag{46}$$

где $C_p^{(1)}$ и $C_p^{(2)}$ — положительные постоянные, зависящие только от p.

Доказательство. Обозначая через $\mathcal{D}_m(t)$ ядро Дирихле порядка m, будем иметь

$$\sum_{k=n+1}^{q} \cos kt = \mathcal{D}_q(t) - \mathcal{D}_n(t) = \sin((q-n)\,t/2) \cos((q+n+1)\,t/2)/\sin(t/2). \tag{47}$$

При $t \in (0, \pi/2)$ $\sin t > \pi t/2$. Поэтому $\left\| \sum_{k+n+1}^{q}{}' \cos kt \right\|_p \leqslant \left(2 \int\limits_0^{'\pi} |\sin t/2|^{-p} \times \right.$ $\left. \times |\sin (q-n) t/2|^p dt\right)^{1/p} \leqslant C_p (q-n)^{(p-1)/p}$ и правая часть оценки (46) доказана. Считая, что $q > n$, и пользуясь неравенством $\sin t \leqslant t$, вследствие равенства (47) находим

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{q} \cos kt \right\|_p \geqslant \left(4 (q-n)^{1-p} \int\limits_0^{(q-n)\pi/2} |\sin t/t|^p \, |\cos (q+n+1) t/(q-n)|^p \times \right.$$

$$\left. \times \, dt\right)^{1/p} \geqslant C_p (q-n)^{(1-p)/p} \left(\int\limits_0^{\pi/2} |\cos (q+n+1) t/(q-n)|^p dt\right)^{1/p},$$

откуда получаем и левую часть неравенства, поскольку $\forall a > 1$

$$\int\limits_0^{2\pi} |\cos at|^p dt = a^{-1} \int\limits_0^{a\pi/2} |\cos t|^p dt \geqslant a^{-1} [a] \int\limits_0^{\pi/2} (\cos t)^p dt > C'_p,$$

где $[a]$ — целая часть числа a и C'_p — постоянная, зависящая только от p. Лемма доказана.

Полагая в (46) $q = 2n$, в силу (45) получаем

$$\| (f_n(\cdot))^{\psi}_{\overline{\beta}} \|_p \leqslant C_p n^{(p-1)/p}. \tag{48}$$

Отсюда следует, что функция $f^*(t) = f^*_n(t) = C_p^{-1} \nu(n) n^{(1-p)/p} d_{2n}(t)$, где C_p — то же, что и в (48), принадлежит классу $L^{\psi}_{\overline{\beta},p}$. Но в нашем случае согласно теореме 4 $L^{\psi}_{\overline{\beta},p} \subset L_s$. Таким образом, на основании (16) и (46) будем иметь $E_n(f^*)_s \geqslant C_s \| \rho_n(f^*, x) \|_s = C_s C_p^{-1} \nu(n) n^{(1-p)/p} \| d_{2n}(x) \|_s \geqslant C_{p,s} \nu(n) \times$ $\times n^{p^{-1}-s^{-1}}$, что и доказывает неравенство (41). Объединяя соотношения (31) и (41), приходим к следующему утверждению.

Теорема 8. *Пусть* $1 < p < s < \infty$, $\alpha = p^{-1} - s^{-1}$ *и* $(\psi, \overline{\beta}) \in P_n^{(\alpha)} \cap$ $\cap P_{0,c}$. *Тогда* $\forall n \in \mathbb{N}$

$$C^{(1)}_{p,s} \nu(n) n^{\alpha} \leqslant E_n (L^{\psi}_{\overline{\beta},p})_s \leqslant \mathscr{E}_n (L^{\psi}_{\overline{\beta},p})_s \leqslant C^{(2)}_{p,s} \nu(n) n^{\alpha}.$$

В частности, если последовательность $k^{\alpha}\psi(k)$ *не возрастает и* $(\psi, \overline{\beta}) \in$ $\in P_{0,c}$, *то* $C^{(1)}_{p,s} \psi(n) n^{\alpha} \leqslant E_n (L^{\psi}_{\overline{\beta},p})_s \leqslant \mathscr{E}_n (L^{\psi}_{\overline{\beta},p})_s \leqslant C^{(2)}_{p,s} \nu(n) n^{\alpha}$, *где* $C^{(1)}_{p,s}$ *и* $C^{(2)}_{p,s}$ — *положительные постоянные, которые могут зависеть только от* p *и* s.

1. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1968.— 50, № 1.— С. 101—137.
2. *Степанец А. И.* Классы периодических функций и приближение их элементов суммами Фурье.— Киев, 1983.— 51 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83-10).
3. *Степанец А. И., Кушпель А. К.* Наилучшие приближения и поперечники классов периодических функций.— Киев, 1984.— 43 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 84-15).
4. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближений.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
5. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1976.— 175 с.
6. *Marcinkievicz J.* Sur les multiplicateurs des series de Fourier // Stud. math.— 1939.— N 8.— P. 78—91.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды.— М. : ГОНТИ, 1939.— 323 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 05.05.86