УДК 513.88

В. О. Яндаров

О некоторых проблемах в теории банаховых пространств

Исследованиям банаховых пространств посвящено много работ (см., например, [1 — 10]). В данной статье, являющейся продолжением и уточнением работ [11 — 13], излагаются результаты исследований бесконечномерных банаховых пространств X_1, слабо компактно и плотно вложенных в такие же пространства X (обозначение: $X_1 \in E(X)$). Под вложением X_1 в X понимается то же, что и в [1 — 6] : а) $X_1 \subseteq X$; б) элементы x_1 и x_2, различные в X_1, являются различными и в X; в) $\forall x \in X_1 \ \|x\|_X \leqslant c\|x\|_{X_1}$, где c — положительная постоянная, а $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_{X_1}$ — нормы в X и X_1 соответственно. Если существует банахово пространство X_0, слабо компактно и плотно вложенное в X_1, то пишется $X_1 \in F$. Введем обозначение $X_1 \in R(X)$, если всякая слабая последовательность Коши в X_1 и X, слабо сходящаяся к нулю в одном из пространств X_1 или X, слабо сходится к нулю и в другом. Если $X_1 \in E(X)$, то Z^* обозначает замыкание (по норме) сопряженного к X пространства X^* в пространстве X_1^*, сопряженном к X_1. Обозначим через $H(x^*)$ гиперподпространство в X_1, соответствующее элементу $x^* \in X_1^* : H(x^*) = \{x \in X_1 : x^*(x) = 0\}$, а через $H(x^{**})$ — гиперподпространство в X_1^* .$H(x^{**}) = \{x^* \in X_1^* : x^{**}(x^*) = 0\}$.

Пусть $X_1 \in E(X)$ и $B_1(X_1)$ — замыкание по норме в X замкнутого единичного шара $B(X_1) = \{x \in X_1 : \|x\|_{X_1} \leqslant 1\}$. Тогда $W_X(X_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_1(X_1)$ — относительное пополнение X_1 относительно X [6]. Если X — локально выпуклое пространство с топологией $\sigma = \sigma(X, Y^*)$, где Y^* — тотальное подпространство в X^*, и $B_2(X_1)$ — замыкание $B(X_1)$ в топологии $\sigma = \sigma(X, Y^*)$, то $W_\sigma(X_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_2(X_1)$ — относительное пополнение X_1 относительно X в топологии $\sigma(X, Y^*)$. Обозначим $Y \in (W)$ или будем говорить, что Y обладает свойством (W), если Y — замкнутое подпространство в X_1 такое, что $W_X(Y) = W_X(X_1)$. Ненулевой элемент $x^{**} \in X_1^{**}$ — пространство, второе сопряженное к X_1, называется тотализатором (в X_1^{**}), если $H(x^*) \supseteq Z^*$, а ненулевой элемент $x^* \in X_1^*$ — дефлектором (в X_1^*), если $H(x^*) \in (W)$, т. е. $H(x^*)$ обладает свойством (W). Подпространство $Y_0 = \bigcap H(x^*)$, где пересечение берется по всем дефлекторам $x^* \in X_1^*$, пространства X_1 называется Z-пространством в X_1. Тотальное подпространство в X_1^* называется минимальным [5] (неприводимым [14]), если оно является замкнутым в X_1^* и не содержит никакого отличного от него тотального подпространства в X_1^*.

Теорема 1. *Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы X_1 было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:* 1) *X_1 слабо полно*; 2) *существует наименьшее замкнутое подпространство $Y_0 \subseteq X_1$ такое, что $Y_0 \in (W)$.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть Y_0 — наименьшее замкнутое подпространство в X_1, обладающее свойством (W). Тогда $Z^* = Y_0^*$, т. е. Z^* является сопряженным к Y_0. Как известно [5], в этом случае Z^{**} имеет минимальное подпространство Y_0, если Y_0 рассматривать как подпространство в X_1^{**}. Очевидно, Y_0 не содержит подпространств, изоморфных l_1. Кроме того, Y_0 слабо полно, как замкнутое подпространство слабо полного X_1. Следовательно, Y_0 рефлексивно. Так как сопряженное к $Y_0^* = Z^*$ пространство Z^{**} изометрически изоморфно $W_X(X_1) = W_X(Y_0) = Y_0$, то $X_1 = Y_0$, и отсюда следует рефлексивность X_1.

Предложение 1. *Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы X_1 было* *изоморфно сопряженному, необходимо и достаточно, чтобы Z^* было минимальным подпространством в X^*_1.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость.

Пусть X_1 изоморфно сопряженному. Тогда X_1^* имеет минимальное подпространство Y_0^* (в X_1^*) такое, что шар $B(X_1)$ относительно компактен в топологии $\sigma(X_1, Y_0^*)$ [14]. Это означает, что $W_\sigma(X_1) = X_1$. Докажем, что $W_X(X_1) = W_\sigma(X_1)$. Для этого следует показать, что $W_X(X_1) \subseteq W_\sigma(X_1)$, так как тогда из соотношений $X_1 \subseteq W_X(X_1) \subseteq W_\sigma(X_1) = X_1$ будет следовать равенство $X_1 = W_X(X_1)$. В самом деле, если $\{x_n\} \subseteq B(X_1)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z^*(x_n) = z^*(x_0)\ \forall z^* \in Z^*$, где x_0 — некоторый элемент из X, то из $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ такую, что $\lim\limits_{k\to\infty} x^*(x_{n_k}) = x^*(y_0)\ \forall x^* \in Y_0^*$, где y_0 — некоторый элемент из X_1. Это следует из секвенциальной относительной компактности $B(X_1)$ в топологии $\sigma(X_1, Y_0^*)$. Сравнивая указанные выше пределы, получаем $x^*(x_0 - y_0) = 0\ \forall x^* \in Y_0^*$. Отсюда в силу тотальности Y_0^* на X_1 следует $x_0 = y_0$. Таким образом, $x_0 \in X_1$ и $Y_0^* = Z^*$.

Предложение 2. *Пусть $X_1 \in E(X)$ и $X_1 \in F$. Для того чтобы X_1 было изоморфно сопряженному, необходимо и остаточно, чтобы каждое гиперподпространство в Z^* не являлось тотальным на X_1 подпространством.*

Доказательство основано на свойствах гиперподпространств [1, 9, 10, 14].

Теорема 2. *Пусть $X_1 \in E(X)$ и $X_1 \in F$. Для того чтобы X_1 было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы каждое гиперподпространство в X^*_1 не являлось тотальным на X_1 подпространством.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть выполняется условие теоремы. Тогда не существует тотализатора $x^{**} \in X_1^{**}$ такого, что $H(x^{**})$ — гиперподпространство в X_1^* — является тотальным на X_1. Иными словами, это означает, что не существует дефлектора $x^* \in X_1^*$. В самом деле, если предположить существование дефлектора $x^* \in X_1^*$ и $x^* \notin Z^*$, то существует $x^{**} \in X_1^{**}$ такой, что $x^{**}(x^*) = 1$ и $x^{**}(z^*) = 0\ \forall z^* \in Z^*$. Тогда $H(x^{**}) \supseteq Z^*$ является тотальным на X_1, что противоречит условию теоремы. Следовательно, в X_1^* не существует дефлекторов $x^* \notin Z^*$ и поэтому $X_1^* = Z^*$. На основании предложения 2 заключаем, что X_1 изоморфно сопряженному. Следовательно, X_1 рефлексивно.

Следствие. *Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы X_1 было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия: 1) X_1 изоморфно сопряженному; 2) $X^*_1 = Z^*$.*

Теорема 3. *Для того чтобы X_1 было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы каждое гиперподпространство в X_1 было изоморфно сопряженному.*

Эта теорема верна и без условия $X_1 \in E(X)$ и доказывается аналогично теореме 2, если в ее доказательстве Z^* заменить на минимальное подпространство в X_1^*.

Теорема 4. *Для того чтобы X_1 было изоморфно сопряженному, необходимо и достаточно, чтобы существовало отделимое локально выпуклое или нормированное пространство X, в которое X_1 слабо компактно вложено, и $W_\sigma(X_1) = X_1$.*

Доказательство. Достаточность. Из выполнения условия теоремы следует, что существует замкнутое тотальное подпространство Y_0^* в X_1^* такое, что шар $B(X_1)$ относительно компактен в топологии $\sigma(X_1, Y_0^*)$. Поэтому всякое замкнутое тотальное подпространство $Y^* \subseteq Y_0^*$ совпадает с Y_0^*. Следовательно, Y_0^* — минимальное подпространство в X_1^*. Отсюда следует [14], что X_1 изоморфно сопряженному Необходимость очевидна.

Отметим, что равенство $W_\gamma(X_1) = X_1$ в теореме 4 можно заменить равенством $W_X(X_1) = X_1$ и при этом теорема остается верной.

Теорема 4 позволяет сравнительно легко устанавливать сопряженность банаховых пространств. Например, пространство $C[0, 1]$ слабо компактно и плотно вложено в $L_p[0, 1]$, т. е. $C[0, 1] \in E(L_p[0, 1])$, $1 \leqslant p < \infty$. Очевидно, $W_{L_p}(C[0, 1]) = L_\infty[0, 1] \neq C[0, 1]$. Отсюда по теореме 4 следует, что $C[0, 1]$ неизоморфно сопряженному [7]. Аналогично не изоморфны сопряженным и пространства c_0, c, $L_1[0, 1]$, $M[0, 1]$ [7]. Примером сопряженного пространства являются пространства $L_p[0, 1]$, $1 < p \leqslant \infty$, l_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и др. Пусть $X_1 = m^*$ и $\sigma = \sigma(m^*, m)$. Ясно, что $W_\sigma(m^*) = m^*$. Это равенство следует, в частности, из теоремы Алаоглу [1, 7, 9, 10, 14].

Теорема 5. *В любом нерефлексивном банаховом пространстве X_1, изоморфном сопряженному, существует гиперподпространство $H(x^*)$, где x^* — ненулевой элемент в X_1^*, неизоморфное X_1, тогда и только тогда, когда $W_\sigma(H(x^*)) = W_\sigma(X_1)$, где $\sigma = \sigma(X, Y^*)$ и Y^* — минимальное подпространство в X_1^*.*

Доказательство этой теоремы основано на теореме 4.

Следствие. *Справедливы следующие утверждения:* 1) *в любом нерефлексивном банаховом пространстве X_1, изоморфном сопряженному, существует гиперплоскость, неизоморфная X_1;* 2) *в любом нерефлексивном сепарабельном банаховом пространстве X_1, изоморфном сопряженному и с безусловным базисом, существует замкнутое подпространство, не имеющее безусловного базиса.*

Теорема 5 и ее следствие отрицательно решают три проблемы [4]: 1. Всякая ли гиперплоскость в X_1 изоморфна X_1? 2. Всякое ли X_1 изоморфно $X_1 \oplus R$, где R — поле вещественных или комплексных чисел? 3. Каждое ли дополняемое бесконечномерное замкнутое подпространство пространства с безусловным базисом имеет безусловный базис? Например, каждое гиперподпространство $H(x^*)$ в l_1, где $x^* \notin c_0$, не имеет безусловного базиса. Линденштраусс [7] привел пример замкнутого подпространства в l_1, неизоморфного сопряженному и, следовательно, без безусловного базиса. В любом рефлексивном пространстве с безусловным базисом нет замкнутых подпространств без безусловных базисов. Это следует из теоремы 3.

Лемма. *Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы X_1 не содержало подпространств, изоморфных l_1, необходимо и достаточно, чтобы каждому элементу $x^{**} \in X_1^{**}$ соответствовал единственный элемент $x \in X_1 (X_1 \subseteq X_1^{**})$ или $x \in Z^{**}$ такой, что $x^{**}(x^*) = x^*(x)\ \forall x^* \in X_1^*$.*

Доказательство. Необходимость. Возможны два случая 1) $X_1^* = Z^*$; 2) $X_1^* \neq Z^*$. В случае 1 лемма очевидна. Рассмотрим случай 2. Так как $X_1^* \neq Z^*$, то существует дефлектор $x_1^* \in X_1^*$, т. е. $H(x_1^*) \in (W)$. Тогда, очевидно, существует тотализатор $x^{**} \in X_1^{**}$ такой, что $x^{**}(x_1^*) = 1$ и $x^{**}(z^*) = 0\ \forall z^* \in Z^*$. Пусть x_0 — некоторый элемент из X_1, такой, что $x_1^*(x_0) = 1$. Очевидно, $x_0 \notin H(x_1^*)$. Так как $H(x_1^*) \in (W)$, то можно указать ограниченную в X_1 последовательность $\{x_n\} \subset H(x_1^*)$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} z^*(x_n) = z^*(x_0)\ \forall z^* \in Z^*$. По условию X_1 не содержит подпространств, изоморфных l_1, поэтому по теореме Розенталя [2] из $\{x_n\}$ можно извлечь слабую подпоследовательность Коши $\{x_{n_k}\}$, такую которая (*)-слабо сходится к некоторому элементу из X_1^{**}. Предположим, что существует $z^* \in Z^*$ такой, что $x_0(z^*) \neq 0$ (x_0 рассматривается как элемент из X_1^{**}). Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} x_1^*(x_{n_k}) = x_1^*(x_0) = 0$. Отсюда следует, что x_1^* — нулевой элемент из X_1^*. Это противоречит тому, что x_1^* — дефлектор в X_1^*. Следовательно, $x_0(z^*) = 0\ \forall z^* \in Z^*$. Итак, установлено, что каждому тотализатору $x^{**} \in X_1^{**}$ соответствует единственный элемент $x_0 \in X_1 \subseteq X_1^{**}$ такой, что $x_1^*(x_0) = 1$, $x_0(z^*) = 0\ \forall z^* \in Z^*$. Легко показать, что Z^{**} изометрически изоморфно $W_X(X_1)$. Отсюда и из проведенного выше рассуждения следует требуемое утверждение.

Достаточность. Из теоремы Оделя и Розенталя следует [3], что если X_1 содержит подпространство, изоморфное l_1, то существует $x^{**} \in$

$\in X_1^{**}$, который не является $(*)$-слабым пределом слабой последовательности Коши в X_1. Поэтому $x^{**} \notin X_1 \subseteq X_1^{**}$.

Следствие. *Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы существовал элемент $x^{**} \notin X_1 \subseteq X_1^{**}$ такой, что $x^{**}(x^*) = 1$ и $x^{**}(z^*) = 0 \forall z^* \in Z^*$, где x^* — некоторый дефлектор в X_1^*, необходимо и достаточно, чтобы X_1 содержало подпространство, изоморфное l_1.*

Теорема 6. *Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы шар $B(X_1)$ был секвенциально $(*)$-слабо плотен в соответствующем шаре $B(X_1^{**})$, необходимо и достаточно, чтобы X_1 не содержало подпространств, изоморфных l_1.*

Доказательство теоремы 6 аналогично доказательству леммы, так как на основании ее каждый элемент $x^{**} \in X_1^{**}$ есть элемент из $X_1 \subseteq X_1^{**}$ или Z^{**} и поэтому x^{**} является $(*)$-слабым пределом ограниченной в X_1 последовательности.

Теорема 7. *Любое $X_1 \in E(X)$ может быть представлено в виде прямой суммы $X_1 = Y_0 \oplus Y_0^{*\perp}(X_1)$, где $Y_0^{*\perp}(X_1)$ — аннулятор Y_0^* в $X_1 \subseteq X_1^{**}$, а Y_0 — Z-пространство в X_1.*

Доказательство. Пусть P — оператор сужения всех элементов $X_1 \subseteq X_1^{**}$ на Y_0^*. Очевидно, P — оператор проектирования X_1 на Y_0 непрерывен, так как каждый элемент из Y_0^* может быть непрерывно продолжен с Y_0 на X_1.

Теорема 8. *Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы X_1 не содержало подпространств, изоморфных l_1, необходимо и достаточно, чтобы Z-пространство в X_1 обладало свойством (W).*

Доказательство. Необходимость. На основании леммы и ее следствия каждый тотализатор в X_1^{**} принадлежит $X_1 \subseteq X_1^{**}$. Каждый тотализатор в X_1 обращается в нуль на Z^* и ему соответствует единственный дефлектор $x^* \in X_1^*$. Тогда $Y_0 = \bigcap H(x^*)$, где x^* — произвольный дефлектор в X_1^*, обладает свойством (W), т. е. Z-пространство в X_1 обладает свойством (W). В самом деле, обозначим через Y_1 множество всех тотализаторов в X_1, включая 0, а через Y_2 — множество всех элементов в $X_1 \subseteq X_1^{**}$, включая и 0, таких, что для любого ненулевого $x \in Y_2$ существует $z^* \in Z^*$ такой, что $x(z^*) \neq 0$. Очевидно, $W_X(Y_1) = Y_1$ и $W_X(Y_2) = W_X(X_1)$. На каждом элементе $x \in Y_2$ любой дефлектор обращается в нуль. Если бы это было не так, то, рассуждая так же, как и при доказательстве леммы, заключаем, что существует ненулевой элемент $x \in Y_2$ такой, что $x(z^*) = 0 \forall z^* \in Z^*$. Это противоречит определению Y_2. Следовательно, $Y_0 \supseteq Y_2$. Отсюда следует требуемое утверждение. Кроме того, можно показать, что $Y_0 = Y_2$. Предположим, что существует элемент $x_0 \in Y_0$ и $x_0 \notin Y_2$. Тогда существует $x^* \in X_1^*$ такой, что $x^*(Y_2) = 0$ и $x^*(x_0) = 1$, т. е. x^* — дефлектор, так как $Y_2 \in (W)$. Отсюда следует, что $x^*(x) = 0 \forall x \in Y_0$, а это противоречит равенству $x^*(x_0) = 1$. Таким образом, $Y_0 = Y_2$.

Достаточность. Пусть Z — пространство $Y_0 \in (W)$. Отсюда следует, что каждый тотализатор в X_1^{**} принадлежит $X_1 \subseteq X_1^{**}$ и на основании леммы X_1 не содержит подпространств, изоморфных l_1.

Теорема 9. *Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы сепарабельное банахово пространство X_1 имело сепарабельное сопряженное, необходимо и достаточно, чтобы X_1 не содержало подпространств, изоморфных l_1.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Так как X_1 не содержит подпространств, изоморфных l_1, то по лемме каждый тотализатор $x^{**} \in X_1^{**}$ принадлежит $X_1 \subseteq X_1^{**}$. Следовательно, Z-пространство $Y_0 \in (W)$ и $Z^* = Y_0^*$. Так как X_1 сепарабельно и, следовательно, сепарабельно и X, то существует сепарабельное тотальное подпространсто $Y^* \subseteq X^*$. На шаре $B(W_X(X_1))$ пространства $W_X(X_1) = W_X(Y_0)$ топологии $\sigma(W_X(X_1), Y^*)$ и $\sigma(W_X(X_1), Z^*)$ совпадают, а это влечет плотность Y^* в Z^*. Следовательно, Z^* сепарабельно. Пространство, образованное всеми тотализаторами в X_1, рефлексивно. Следовательно, X_1^* сепарабельно.

Отметим, что в классе всех банаховых пространств $X_1 \in E(X)$ теорема 9 положительно решает проблему Банаха: пусть сепарабельное банахово пространство X_1 имеет несепарабельное сопряженное; содержит ли X_1 изоморфное l_1 подпространство? Проблема Банаха отрицательно решена в общем случае (см., например, [8]). Джеймс решил указанную проблему положительно в классе банаховых пространств с безусловным базисом 7, 9].

В классе банаховых пространств $X_1 \in E(X)$ положительно решается проблема Джеймса [7]: всякое ли бесконечномерное банахово пространство, в котором нет подпространств, изоморфных c_0 либо l_1, содержит бесконечномерное рефлексивное подпространство? Джеймс [7, 9] решил эту проблему положительно для X_1 с безусловным базисом.

Теорема 10. *Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы X_1 было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы X_1 не содержало подпространств, изоморфных c_0 либо l_1.*

Доказательство. Необходимость очевидна. В самом деле, если X_1 рефлексивно, то оно не содержит подпространств, изоморфных l_1. Это следует, в частности, из равенства $X_1^* = Z^*$. Так как X_1 слабо полно, то оно не содержит и подпространств, изоморфных c_0.

Достаточность. Если X_1 не содержит подпространств, изоморфных l_1, то на основании теорем 7 и 8 X_1 можно представить в виде $X_1 = Y_0 \oplus \oplus Y_0^{*\perp}(X)$, где Y_0 — Z-пространство, обладающее свойством (W), а $Y_0^{*\perp}(X_1)$ — рефлексивное подпространство в $X_1 \subseteq X_1^{**}$. Очевидно, $Z^* = Y_0^*$ и является $(*)$-слабо полным на Y_0, т. е. Z^* изоморфно сопряженному. При условиях теоремы Z^* не содержит подпространств, изоморфных l_1. Кроме того, Z^* слабо полно. Это следует из того, что Z^{**} изометрически изоморфно относительному пополнению $W_X(X_1)$ (см. лемму). Таким образом, Z^* рефлексивно и вместе с ним рефлексивно и Y_0. Отсюда следует рефлексивность X_1.

Предложение 3. *Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы сепарабельное банахово пространство X_1 было изоморфно c_0 или являлось подпространством пространства, изоморфного c_0, необходимо и достаточно, чтобы каждое бесконечномерное замкнутое подпространство в X_1 содержало подпространство, изоморфное c_0.*

Справедливость предложения вытекает из свойств пространств c_0 и l_1.

Теорема 11. *Пусть $X_1 \in E(X)$. Каждое бесконечномерное замкнутое подпространство в X_1 содержит подпространство, изоморфное c_0, либо l_1, либо бесконечномерное и рефлексивное.*

Доказательство теоремы основано на применении теоремы 10. Отметим, что в классе банаховых пространств $X_1 \in E(X)$ теорема 11 положительно решает проблему [2], формулировка которой по существу соответствует формулировке теоремы 11.

Отметим, что если $X_1 \in E(X)$ не содержит подпространств, изоморфных l_1, то в представлении $X_1 = Y_0 \oplus Y_0^{*\perp}(X_1)$, где Y_0 — Z-пространство, второе слагаемое $Y^{*\perp}(X_1)$ конечной размерности.

Теорема 12. *Пусть $X_1 \in E(X)$ и $X_1 \in F$ или $X_1 \in R(X)$. Для того чтобы слабая топология $\sigma(X_1, X_1^*)$ совпадала с топологией $\sigma(X_1, X^*)$ на шаре $B(X_1)$ в X_1, необходимо и достаточно, чтобы X_1 не содержало подпространств, изоморфных l_1. Иными словами, выполняется равенство*

$$\sigma(X_1, X_1^*)/B(X_1) = \sigma(X_1, X^*)/B(X_1), \tag{1}$$

где $\sigma/B(X_1)$ — топология σ на шаре $B(X_1)$, тогда и только тогда, когда X_1 не содержит подпространств, изоморфных l_1.

Доказательство. Необходимость очевидна.

Достаточность. Условие $X_1 \in F$ или $X_1 \in R(X)$ вместе с тем, что X_1 не содержит подпространств, изоморфных l_1, порождает равенство $X_1^* = Z^*$. Предположим, что существует $x^* \in X_1^*$ и $x^* \notin Z^*$. Тогда по лемме существует тотализатор $x \in X_1 \subseteq X_1^{**}$ такой, что $x^*(x) = 1$ и $x(z^*) = 0 \forall z^* \in \overset{*}{Z}$. Применяя к последнему равенству условие $X_1 \in F$ или $X_1 \in R(X)$, получаем, что x — нулевой элемент в X_1, а это противоречит первому из равенств, указанных выше. Итак, $X_1^* = Z^*$. Отсюда и из известного результата [14, с. 274] следует справедливость равенства (1).

Теорема 13. *Пусть $X_1 \in E(X)$, $X_1 \in E(Y)$, где Y — некоторое банахово пространство, и K_1 — замыкание множества K, ограниченного в X_1, по одной из норм $\|\cdot\|_X$ или $\|\cdot\|_Y$. Тогда топология $\sigma_1 = \sigma(X_1, X^*)/K_1$ совпадает с топологией $\sigma_2 = \sigma(X_1, Y^*)/K_1$.*

Доказательство. Не умаляя общности, предположим, что $X \subseteq Y$. Тогда топология σ_1 сильнее топологии σ_2 и (K_1, σ_1) — множество K_1 с топологией σ_1 взаимно однозначно и непрерывно вложено в (K_1, σ_2) — множество K_1 с топологией σ_2. Отсюда, так как множество (K_1, σ_1) компактно в топологии σ_1, следует, что (K_1, σ_1) гомеоморфно (K_1, σ_2). Следовательно, $\sigma_1 = \sigma_2$.

Следствие. *Пусть X_1, X и Y такие же, как в теореме 13. Замыкания в X и Y ограниченного в X_1 множества K в топологиях, индуцированных нормами $\|\cdot\|_X$ и $\|\cdot\|_Y$, совпадают.*

Теорема 14. *Пусть $X_1 \in E(X)$. Для того чтобы наименьшее замкнутое подпространство в X_1 со свойством (W) было Z-пространством, необходимо и достаточно, чтобы X_1 было таким же, как в лемме.*

1. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.— М. : Наука, 1984. 752 с.
2. *Rosenthal H. P.* Some recent diskoveries in the isomorphic theory of Banach spaces // Bull. Amer. Math. Soc.— 1978.— **84**, N 5.— P. 803—831.
3. *Odell E., Rosenthal H. P.* A double—dual characterization of separable Banach spaces containing l_1 // Isr. J. Math.— 1975.— **20**, N 3—4.— P. 375—384.
4. *Кадец М. И.* Геометрия нормированных пространств // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ.— 1975.— **13**.— С. 99—127.
5. *Петунин Ю. И., Пличко А. Н.* Теория характеристик подпространств и ее приложения.— Киев : Вища шк., 1980.— 218 с.
6. *Крейн М. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
7. *Мильман В. Д.* Геометрическая теория пространств Банаха. I // Успехи мат. наук.— 1970.— **25**, вып. 3.— С. 113—174.
8. *James R. C.* A separable somewhat reflexive Banach spaces with nonseparable dual // Bull. Amer. Mat. Soc.— 1974.— **80**, N 4.— P. 738—743.
9. *Дэй М. М.* Нормированные линейные пространства.— М. : Изд-во иностр. лит., 1961.— 232 с.
10. *Кириллов А. А., Гвишиани А. Д.* Теоремы и задачи функционального анализа.— М. : Наука, 1979.— 382 с.
11. *Яндаров В. О.* О некоторых свойствах сепарабельных банаховых пространств, не содержащих подпространств, изоморфных l_1 // Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям.— 1982.— Вып. 15.— С. 202—219.
12. *Яндаров В. О.* Об одном классе сепарабельных банаховых пространств, не содержащих подпространств, изоморфных l_1 // Докл. АН СССР.— 1984.— **276**, № 6.— С. 1347—1351.
13. *Яндаров В. О.* К геометрической теории некоторых классов банаховых пространств // Укр. мат. журн.— 1983.— **35**, № 5.— С. 594—600.
14. *Бурбаки Н.* Топологические векторные пространства.— М. : Изд-во иностр. лит., 1959.— 410 с.

Грозн. нефт. ин-т

Получено 22.12.86