УДК 517.946

М. М. Дринь

Корректная разрешимость параболических задач сопряжения в пространствах растущих функций

Пусть Q_0 — бесконечная область в $(n+1)$-мерном пространстве точек $(t, x_1, \ldots, x_n) = (t, x)$, ограниченная гиперплоскостями $t = 0$, $t = T$ и боковой границей Q_1^2. Предположим, что область Q_0 разделена на две подобласти Q_0^1 и Q_0^2 ограниченной или неограниченной поверхностью Q_1^1, причем $Q_1^1 \cap Q_1^2 = \varnothing$. Пусть при этом Q_0^1 — подобласть с боковой границей Q_1^1. Положим $\Omega_{q\nu}^\tau = Q_q^\nu \cap \{t = \tau\}$, $q = 0, 1$; $\nu = 1, 2$.

В области Q_0 рассмотрим следующую задачу сопряжения:

$$\sum_{j=1}^{N^\nu} (A_{ij}^\nu u_j^\nu)(t, x) \equiv D_t^{n_i^\nu} u_i^\nu (t, x) - \sum_{j=1}^{N^\nu} \sum_{|\bar{k}| \leqslant 2bn_j^\nu} a_{\bar{k}}^{\nu ij} (t, x) D_{t,x}^{\bar{k}} u_j^\nu (t, x) =$$

$$= f_{0i}^\nu (t, x), \quad (t, x) \in Q_0^\nu, \quad i = 1, \ldots, N^\nu; \quad \nu = 1, 2, \tag{1}$$

$$\sum_{\nu=1}^{2} \sum_{j=1}^{N^\nu} S_{ij}^\nu u_j^\nu \big|_{Q_1^1} \equiv \sum_{\nu=1}^{2} \sum_{j=1}^{N^\nu} \sum_{|\bar{k}| \leqslant 2bn_j^\nu + \sigma_i^1} s_{\bar{k}}^{\nu ij} (t, x) D_{t,x}^{\bar{k}} u_j^\nu \big|_{Q_1^1} = f_{1i}^1,$$

$$i = 1, \ldots, m^1 + m^2, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{N^2} B_{ij} u_j^2 \big|_{Q_1^2} \equiv \sum_{j=1}^{N^2} \sum_{|\bar{k}| \leqslant 2bn_j^2 + \sigma_i^2} b_{\bar{k}}^{ij} (t, x) D_{t,x}^{\bar{k}} u_j^2 \big|_{Q_1^2} = f_{1i}^2, \quad i = 1, \ldots, m^2, \tag{3}$$

$$D_t^{\rho^\nu} u_i^\nu (t, x) \big|_{t=0} = \varphi_i^{\nu\rho^\nu} (x), \quad x \in \Omega_{0\nu}^0; \quad \rho^\nu = 0, 1, \ldots, n_i^\nu - 1;$$

$$i = 1, \ldots, N^\nu; \quad \nu = 1, 2, \tag{4}$$

где $\bar{k} = (k_0, k) = (k_0, k_1, \ldots, k_n)$, $|\bar{k}| = 2bk_0 + |k| = 2bk_0 + k_1 + \ldots + k_n$, $D_{t,x}^{\bar{k}} = D_t^{k_0} D_x^k$; $\{n_j^\nu\}$, $\{\sigma_i^\nu\}$ — некоторые наборы целых чисел, причем $n_1^\nu \geqslant \ldots \geqslant n_{N^\nu}^\nu \geqslant 1$, $\sigma_1^1 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_{m^1+m^2}^1$, $\sigma_1^2 \geqslant \ldots \geqslant \sigma_{m^2}^2$, $S_{ij}^\nu = 0$ при $2bn_j^\nu + \sigma_i^1 < 0$, $B_{ij} = 0$ при $2bn_j^2 + \sigma_i^2 < 0$; $m^\nu = b(n_1^\nu + \ldots + n_{N^\nu}^\nu)$.

Предположим, что операторы (A_{ij}^ν) равномерно параболические по И. Г. Петровскому, (S_{ij}^1), (S_{ij}^2) и (A_{ij}^1), (A_{ij}^2) связаны равномерным условием совместного накрывания [1], (B_{ij}) и (A_{ij}^2) — равномерным условием дополнительности, коэффициенты $a_{\bar{k}}^{\nu ij}$, $s_{\bar{k}}^{\nu ij}$ и $b_{\bar{k}}^{ij}$, а также поверхности Q_1^ν достаточно гладкие, точнее выполняются условия $1 - 3$ и 4_l из работы [2] с l таким же, как в теореме 1.3 этой работы (в частном случае, когда $n_j^1 = n_j^2 = n_j$, см. условия $1 - 4$ из работы [3]).

Пусть $n_{ij}^{\nu 1}$ (n_{ij}^2) и $m_{ij}^{\nu 1}$ (m_{ij}^2) — наивысшие порядки производных соответственно по нормали к Ω_{11}^τ (Ω_{12}^τ), $0 \leqslant \tau \leqslant T$, и по t в операторах S_{ij}^ν (B_{ij}). Положим $\rho_0^{\nu 1} = \max\limits_{i,j} (n_{ij}^{\nu 1} - 2bn_j^\nu)$, $\rho_0^2 = \max\limits_{i,j} (n_{ij}^2 - 2bn_j^2)$, $\pi_j^{\nu 1} = \max m_{ij}^{\nu 1} - n_j^1$,

$\pi_j^2 = \max_i m_{ij}^2 - n_j^2$, $\pi_0^{\nu 1} = \max_j \pi_j^{\nu 1}$, $\pi_0^2 = \max_j \pi_j^2$, $l_0 = \max(0, \sigma_1^1, \sigma_1^2)$, $l_1 = \max(0, -\sigma^1_{m^1+m^2}, -\sigma^2_{m^2})$.

В работах [2, 3] для гладких ограниченных решений задачи (1) — (4) доказано интегро-дифференциальное представление, которое запишем в виде

$$u_i^\nu = \sum_{\mu=1}^{2}\sum_{j=1}^{N^\mu}\Big\{(\mathscr{G}_0^{1\nu\mu})_{ij} f_{0j}^\mu + \sum_{|k|\leqslant \rho_0^{\mu 1}} (\mathscr{R}_1^{\nu\mu k})_{ij}(D_x^k f_{0j}^\mu) + \sum_{|\bar{k}|\leqslant \sigma_1^1 - 2b} (\mathscr{W}_1^{\nu\mu\bar{k}})_{ij} \times$$
$$\times (D_{t,x}^{\bar{k}} f_{0j}^\mu|_{t=0}) + \delta_{\mu 2}\Big[\sum_{|k|\leqslant \rho_0^2} (\mathscr{R}_2^{\nu 2k})_{ij}(D_x^k f_{0j}^2) + \sum_{|\bar{k}|\leqslant \sigma_1^2 - 2b} (\mathscr{W}_2^{\nu 2k})_{ij} \times$$
$$\times (D_{t,x}^{\bar{k}} f_{0j}^2|_{t=0})\Big]\Big\} + \sum_{j=1}^{m^1+m^2} (\mathscr{G}_1^{1\nu 1})_{ij} f_{1j}^1 + \sum_{j=1}^{m^2} (\mathscr{G}_1^{1\nu 2})_{ij} f_{1j}^2 +$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{2}\sum_{j=1}^{N^\mu}\sum_{p=0}^{n_j^\mu - 1}\Big\{(\mathscr{G}_2^{1\nu\mu p})_{ij}\varphi_j^{\mu p} + \sum_{|k|\leqslant 2b(n_j^\mu - p - 1) + \rho_0^{\mu 1}} (\mathscr{R}_1^{\nu\mu p k})_{ij}(D_x^k \varphi_j^{\mu p}) +$$
$$+ \sum_{|k|\leqslant 2b(n_j^\mu - p - 1) + \sigma_1^1} (\mathscr{V}_1^{\nu\mu p k})_{ij}(D_x^k \varphi_j^{\mu p}) + \sum_{|k|\leqslant 2b(n_j^\mu - p - 1) - 1} (\mathscr{O}_1^{\nu\mu p k})_{ij}(D_x^k \varphi_j^{\mu p}) +$$
$$+ \delta_{\mu 2}\Big[\sum_{|k|\leqslant 2b(n_j^\mu - p - 1) + \rho_0^2} (\mathscr{R}_2^{\nu 2 p k})_{ij}(D_x^k \varphi_j^{2p}) + \sum_{|k|\leqslant 2b(n_j^\mu - p - 1) + \sigma_1^2} (\mathscr{V}_2^{\nu 2 p k})_{ij}(D_x^k \varphi_j^{2p}) +$$
$$+ \sum_{|k|\leqslant 2b(n_j^\mu - p - 1) - 1} (\mathscr{O}_2^{\nu 2 p k})_{ij}(D_x^k \varphi_j^{2p})\Big]\Big\}, \quad i = 1, \ldots, N^\nu; \quad \nu = 1, 2, \tag{5}$$

где $(\mathscr{G}_q^{1\nu\mu})_{ij}$, $(\mathscr{R}_\gamma^{\nu\mu k})_{ij}$, $(\mathscr{W}_\gamma^{\nu\mu\bar{k}})_{ij}$, $(\mathscr{G}_2^{1\nu\mu p})_{ij}$, $(\mathscr{R}_\gamma^{\nu\mu p k})_{ij}$, $(\mathscr{V}_\gamma^{\nu\mu p k})_{ij}$, $(\mathscr{O}_\gamma^{\nu\mu p k})_{ij}$, $q = 0, 1$; $\gamma = 1, 2$, — интегральные операторы, ядрами которых являются соответственно функции

$$G_{qij}^{1\nu\mu},\ R_{\gamma ij}^{\nu\mu k},\ W_{\gamma ij}^{\nu\mu\bar{k}},\ G_{2ij}^{1\nu\mu p},\ R_{\gamma ij}^{\nu\mu p k},\ V_{\gamma ij}^{\nu\mu p k},\ Q_{\gamma ij}^{\nu\mu p k}. \tag{6}$$

Свойства функций (6) подробно описаны в работах [2, 3]. Там, в частности, установлены их оценки. Обозначим через c постоянную из этих оценок, которая характеризует тип убывания функций (6) при $|x| \to \infty$.

Ниже используются такие же, как в работе [4], пространства $H_{k(t,a)}^{s+\alpha}(Q_q^\nu)$ и $C_a^{s+\alpha}(\Omega_{0\nu}^0)$, $q = 0, 1$; $\nu = 1, 2$, растущих при $|x| \to \infty$ функций, тип роста которых равен соответственно $k(t, a) = c_0 a[c_0^{2b-1} - a^{2b-1}t]^{-1/(2b-1)}$ и $a = k(0, a)$. Здесь c_0 и a — фиксированные постоянные такие, что $c_0 < c$ и $(c_0/a)^{2b-1} > T$. Через $\|\cdot\|^{s+a}_{Q_q^\nu, k(t,a)}$ и $|\cdot|^{s+\alpha}_{\Omega^0_{0\nu,a}}$ обозначаются нормы соответственно в $H_{k(t,a)}^{s+\alpha}(Q_q^\nu)$ и $C_a^{s+\alpha}(\Omega_{0\nu}^0)$.

Теорема. *Если*

$$f_{qi}^\nu \in H_{k(t,a)}^{s - q\sigma_i^\nu + \alpha}(Q_q^\nu),\ q = 0, 1;\ \nu = 1, 2,\ \varphi_i^{\nu p} \in C_a^{2b(n_i^\nu - p) + s + \alpha}(\Omega_{0\nu}^0),$$
$$l_0 \leqslant s \leqslant l - l_0 - l_1,$$

и выполняются условия согласования порядка s [1], *то вектор-функция* $(u_i^\nu,\ i = 1, \ldots, N^\nu;\ \nu = 1, 2)$, *где* u_i^ν *определены формулой* (5), *является единственным решением задачи* (1)—(4), *удовлетворяющим условиям:* 1) $u_i^\nu \in H_{h(t,a)}^{2bn_i^\nu + l_0 + \alpha}(Q_{0\nu}^{t_0,T})$, $i = 1, \ldots, N^\nu$; $\nu = 1, 2$, $Q_{0\nu}^{t_0,T} = Q_0^\nu \cap \{t_0 \leqslant t \leqslant T\}$, *для любого* $t_0 \in (0, T)$; 2) u_i^ν, $i = 1, \ldots, N^\nu$; $\nu = 1, 2$, *имеют непрерывные в* Q_0^ν *производные* $D_t^p D_x^k u_i^\nu$, $p \leqslant n_i^\nu - 1$, $|k| \leqslant M_{ip}^\nu$, *где* $M_{ip}^\nu = \max[0, 2b(n_i^\nu - p -$

$-1)+\sigma_1^\nu]$, *кроме случая, когда* $\pi_j^{\nu 1}=-n_j^\nu$ *и* $\pi_j^2=-n_j^2\ \forall j=1,\ldots,N^\nu$ *и* $j=1,\ldots,N^2$ *соответственно, в котором* $M_{ip}^1=\max[0{,}2b(n_i^1-p-1)+$ $+\rho_0^{11}]$, *а* $M_{ip}^2=\max[0{,}2b(n_i^2-p-1)+\max(\rho_0^{21},\rho_0^2)]$.

Пусть, кроме того, пространства $C_a^{r+\alpha}(\Omega_{0\nu}^0)$, $r\leqslant 2bn_1^\nu+l-l_0-l_1$, *обладают следующим свойством: функции из этих пространств допускают продолжение на все* R_n *так, что продолженные функции принадлежат* $C_a^{r+\alpha}(R_n)$ *и оператор продолжения ограничен. Тогда* $u_i^\nu\in H_{k(t,a)}^{2bn_i^\nu+s+\alpha}(Q_0^\nu)$ *и справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{N^\nu}\|u_i^\nu\|_{Q_0^\nu,k(t,a)}^{2bn_i^\nu+s+\alpha}\leqslant C\Big(\sum_{\mu=1}^{2}\sum_{i=1}^{N^\mu}\|f_{0i}^\mu\|_{Q_0^\mu,k(t,a)}^{s+\alpha}+\sum_{i=1}^{m^1+m^2}\|f_{1i}^1\|_{Q_1^1,k(t,a)}^{s-\sigma_i^1+\alpha}+$$

$$+\sum_{i=1}^{m^2}\|f_{1i}^2\|_{Q_1^2,k(t,a)}^{s-\sigma_i^2+\alpha}+\sum_{\mu=1}^{2}\sum_{i=1}^{N^\mu}\sum_{p=0}^{n_i^\mu-1}|\varphi_i^{\mu p}|_{\Omega_{0\mu}^0,a}^{2b(n_i^\mu-p)+s+\alpha}\Big),\ \nu=1,2.$$

Доказательство теоремы проводится с помощью методики, развитой в работе [4]. Вначале рассматривается случай задачи (1)—(4) с нулевыми начальными условиями. Для интегральных операторов, представляющих по формуле (5) решение задачи (1)—(4) в этом случае, доказывается лемма об их действии в пространствах растущих функций. На основании этой леммы и свойств функций (6) устанавливается корректная разрешимость задачи с нулевыми начальными условиями. Используя затем представление (5) для решений задачи (1)—(4) с $f_{qi}^\nu\equiv 0$, $q=0{,}1$; $i=1,\ldots,N^\nu$; $\nu=1,2$, в области $Q_0\cap\{t_0\leqslant t\leqslant T\}$, $t_0>0$, доказываем единственность решений в классе функций, удовлетворяющих условиям 1 и 2. Утверждение первой части теоремы следует из свойств входящих в формулу (5) операторов и их ядер — функций (6).

Утверждение второй части теоремы получается на основании предыдущего, если предварительно функции $\varphi_i^{\nu\rho^\nu}$ продолжить на R_n до функций $\Phi_i^{\nu\rho^\nu}\in C_a^{2b(n_i^\nu-\rho^\nu)+s+\alpha}(R_n)$, затем построить функции v_i^ν, имеющие своими значениями при $t=0$ функции $\Phi_i^{\nu\rho^\nu}$, и в задаче (1)—(4) ввести замену искомых функций по формуле $u_i^\nu=v_i^\nu+w_i^\nu$, $i=1,\ldots N^\nu$; $\nu=1,2$.

1. *Житарашу Н. В.* Шаудеровские оценки и разрешимость общих краевых задач для общих параболических систем с разрывными коэффициентами // Докл. АН СССР.— 1966.— **169**, № 3.— С. 511—514.
2. *Дринь М. М., Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических задач сопряжения.— Черновцы, 1984.— 95 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 252Ук-85.
3. *Дринь М. М., Ивасишен С. Д.* Матрица Грина общей граничной задачи для параболической по И. Г. Петровскому системы с разрывными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 11.— С. 7—10.
4. *Ивасишен С. Д.* О корректной разрешимости параболических граничных задач в пространствах растущих функций // Укр. мат. журн.— 1982.— **34**, № 1.— С. 25—30.

Черновиц. ун-т
Получено 04.04.85