УДК 517.988.68

Н. С. Клименко

Об асимптотическом интегрировании дифференциального уравнения с медленно меняющимися и осциллирующими коэффициентами в банаховом пространстве

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$dx/dt = A(t, \tau, \varepsilon)\, x, \tag{1}$$

где $x(t, \varepsilon)$ — искомая вектор-функция переменного $t \in [0, L/\varepsilon]$ со значениями в банаховом пространстве B; $A(t, \tau, \varepsilon)$ — оператор, действующий в B; $\tau = \varepsilon t$; $L > 0$ — фиксированное число; $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ — малый параметр, причем

$$A(t, \tau, \varepsilon) = A_0(\tau) + \tilde{A}(t, \tau, \varepsilon),\ \tilde{A}(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \varepsilon^s e^{im\omega t} A_{sm}(\tau). \tag{2}$$

Задача расщепления уравнения вида (1) рассматривалась в работах [1—3].

В данной работе строится решение уравнения (1) для случая кратного собственного значения главной части операторной функции.

Предполагаем, что выполняются условия:

1) область определения $D(A_0(\tau))$ плотна в B и не зависит от $\tau \in [0, L]$;

2) $A_0(\tau)$ — замкнутый линейный нормально разрешимый оператор, сильно непрерывно дифференцируемый по τ достаточное число раз;

3) кратному собственному значению $\lambda_0(\tau)$ оператора $A_0(\tau)$ соответствует корневое подпространство конечной, не зависящей от τ, размерности $n \geqslant 2$, $\dim N(A) = 1$, $A = A_0 - \lambda_0 I$;

4) $\tilde{A}(t, \tau, \varepsilon)$ — равномерно ограниченный при $t \in [0, L/\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ ($\|\tilde{A}(t, \tau, \varepsilon)\| \leqslant C$) линейный оператор, оставляющий инвариантной область $D(A_0(\tau))$;

5) элементы $A_{sm}(\tau)$ разложения (2) — ограниченные, сильно непрерывно дифференцируемые по τ достаточное число раз.

Так как с помощью теорем расщепления [1—3] исходное уравнение (1) можно расщепить на два уравнения, действующих в подпространствах B_1 размерности n и B_2 размерности $\infty - n$ ($B = B_1 \oplus B_2$), то предполагаем, что это расщепление произведено и рассматриваем уравнение (1) лишь в подпространстве B_1.

Итак, рассмотрим уравнение (1) в B_1. Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Если $\lambda_0(\tau)$ — изолированное кратное собственное значение оператора $A_0(\tau)$, которому соответствует корневое подпространство конечной размерности $n \geqslant 2$, имеющее жорданов базис постоянной по τ структуры, и $(A_{10}(\tau)\varphi, \psi) \neq 0$, где φ, ψ — базисы соответственно в $N(A)$ и $N(A^*)$, $A(\tau) = A_0(\tau) - \lambda_0(\tau) I$, то формальное решение уравнения (1) в B_1 имеет вид*

$$x(t, \varepsilon) = U(t, \tau, \mu)\, e^{\int_0^t \lambda(\tau, \mu) dt}, \tag{3}$$

где векторная $U(t, \tau, \mu)$ и скалярная $\lambda(\tau, \mu)$ функции допускают разложения

$$U(t, \tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k U_k(t, \tau),\ U_k(t, \tau) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\omega t} U_{km}(\tau),$$

$$\lambda(\tau, \mu) = \lambda_0(\tau) + \tilde{\lambda}(\tau, \mu),\ \tilde{\lambda}(\tau, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \lambda_k(\tau),\ \mu = \varepsilon^{1/n}. \tag{4}$$

Доказательство теоремы заключается в построении алгоритма определения неизвестных элементов $U_{km}(\tau)$, $\lambda_k(\tau)$, $k = 0, 1, \ldots$, разложений

(4) таким образом, чтобы решение (3) формально удовлетворяло уравнению (1). Подставляя (3) в (1), находим $\varepsilon \frac{\partial}{\partial \tau} U(t, \tau, \mu) + \frac{\partial}{\partial t} U(t, \tau, \mu) + \lambda(\tau, \mu) U(t, \tau, \mu) = A(t, \tau, \varepsilon) U(t, \tau, \mu)$, или

$$[A_0(\tau) - (\lambda_0(\tau) + im\omega) I] U(t, \tau, \mu) = \varepsilon \partial U(t, \tau, \mu)/\partial \tau + \\ + \tilde{\lambda}(\tau, \mu) U(t, \tau, \mu) - \tilde{A}(t, \tau, \mu) U(t, \tau, \mu). \tag{5}$$

Сравнивая в (5) коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем систему рекуррентных уравнений

$$[A_0(\tau) - (\lambda_0(\tau) + im\omega) I] U_k(t, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} U_{k-n}(t, \tau) + \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_{k-j}(\tau) U_j(t, \tau) - \\ - \sum_{j=1}^{[k/n]} A_j(t, \tau) U_{k-jn}(t, \tau), \ k = 0, 1, \ldots, \tag{6}$$

$[\alpha]$ — целая часть α. Отделяя в (6) коэффициенты при сомножителях $e^{im\omega t}$, имеем

$$[A_0(\tau) - (\lambda_0(\tau) + im\omega) I] U_{km}(\tau) = \sum_{j=0}^{k=1} \lambda_{k-j}(\tau) U_{jm}(\tau) + U'_{k-n,m}(\tau) - \\ - \sum_{j=1}^{[k/n]} \sum_{m_1} A_{jm_1}(t, \tau) U_{k-jn,m-m_1}(\tau), \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \ k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Так как при $m = \pm 1, \pm 2, \ldots$ оператор $[A_0(\tau) - (\lambda_0(\tau) + im\omega) I]$ обратим, то из уравнения (7) определяем $U_{km}(\tau)$:

$$U_{km}(\tau) = [A_0(\tau) - (\lambda_0(\tau) + im\omega) I]^{-1} \Big\{ \sum_{j=0}^{k-1} \lambda_{k-j}(\tau) U_{jm}(\tau) + U'_{k-n,m}(\tau) - \\ - \sum_{j=1}^{[k/n]} \sum_{m_1} A_{jm_1}(\tau) U_{k-jn,m-m_1}(\tau) \Big\}, \ m = \pm 1, \pm 2, \ldots; k = 0, 1, \ldots \tag{8}$$

При $m = 0$ из (7) получаем следующее уравнение с необратимым оператором в левой части:

$$(A_0(\tau) - \lambda_0(\tau) I) U_{k0}(\tau) = \sum_{j=1}^{k-1} \lambda_{k-j}(\tau) U_{j0}(\tau) + U'_{k-n,0}(\tau) - \\ - \sum_{j=1}^{[k/n]} A_{j0}(\tau) U_{k-jn,0}(\tau), \ m = 0, \ k = 0, 1, \ldots. \tag{9}$$

Неизвестные функции уравнения (9) определяются по алгоритму, предложенному в работе [4], с использованием обобщенного обратного оператора [5].

Результаты теоремы позволяют построить фундаментальное решение уравнения (1) в B_1 при достаточно малых μ, отличных от нуля.

Об асимптотическом характере в смысле Крылова — Боголюбова — Митропольского полученного формального решения свидетельствует оценка

$$\| x(t, \varepsilon) - x_p(t, \varepsilon) \| \leqslant C \varepsilon^{(p+1-n)/n}, \tag{10}$$

где $x(t, \varepsilon)$ — точное решение уравнения (1) в B_1, $x\ (t, \varepsilon)$ — приближенное решение, получаемое из соотношений (3), если в формальных разложениях (4) ограничиться $p+1$ слагаемым, C — постоянная. Попутно получены ограничения на малый параметр ε, при которых справедлива оценка (10).

1. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1966.—252 с.
2. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1969.—536 с.
3. *Клименко Н. С., Сотниченко Н. А.* Асимптотическое представление решений дифференциальных уравнений с медленно меняющимися и осциллирующими коэффициентами в банаховом пространстве.— Киев, 1984.—28 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 93УК-85.
4. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* Об асимптотическом решении для дифференциального уравнения в банаховом пространстве при наличии конечной системы кратных собственных значений // Укр. мат. журн.— 1976.—28, № 5.— С. 655—662.
5. *Плоткин Я. Д., Турбин А. Ф.* Обращение возмущенных на спектре нормально разрешимых линейных операторов // Там же.— 1975.—27, № 4.— С. 477—487.

СКТБ Ин-та геофизики АН УССР, Киев

Получено 08.02.85